అర్థశాస్త్రం

సంఖ్యాత్మక పద్ధతులు

ఖండాలు : 5 - 8

BRAOU

DR. B.R AMBEDKAR OPEN UNIVERSITY
UNIVERSITY - LIBRARY
CM0215

డా॥ బి. ఆర్. అంబేద్కర్ సార్వత్రిక విశ్వవిద్యాలయం
హైదరాబాదు
1995

CM-0215
31-3-97

రచయితల బృందం

సంపాదకులు

ఆచార్య ఎం. జగదీశ్వర్ రావు

సహ సంపాదకులు

శ్రీ కె. సతీష్ రెడ్డి

ఆచార్య పి. రామయ్య

డా ॥ బి. సుందర్ రావు

Dr. B R.A.O.U. LIBRARY
Acc No... ....
Date........ ....
Call No ....

రచయితలు

ఆచార్య ఎన్. రాజగోపాల్ రావు

ఆచార్య ఎస్. సుబ్రమణ్యం

ఆచార్య జి. రామచంద్రుడు

ఆచార్య. సి. సుబ్బరామి రెడ్డి

డా ॥ సి. రత్నం

డా ॥ ఏ. సదానందం

డా ॥ ఎం. ఉపేందర్

ముఖచిత్రం

శ్రీ చంద్ర

గ్రాఫిక్ డిజైనర్

శ్రీ ఎం. రమేశ్

© డా ॥ బి.ఆర్. అంబేద్కర్ సార్వత్రిక విశ్వవిద్యాలయం, హైదరాబాదు

ముద్రణ : 1995

అన్ని హక్కులు విశ్వవిద్యాలయానివి. ఈ పుస్తకంలోని ఏ భాగం అయినా ఉపయోగించదలచుకొంటే విశ్వవిద్యాలయ అనుమతి పొందాలి. పాఠాలు డా ॥ బి. ఆర్. అంబేద్కర్ సార్వత్రిక విశ్వవిద్యాలయం పాఠ్య ప్రణాళికలో ఒక భాగం. పాఠ్య ప్రణాళిక మొత్తం వివరాలు ఈ పుస్తకం చివరలో వున్నాయి

ఇతర వివరాలకు డైరెక్టర్ (అకడమిక్), డా ॥ బి. ఆర్. అంబేద్కర్ సార్వత్రిక విశ్వవిద్యాలయం, రోడ్ నం. 46, జుబ్లీ హిల్స్, హైదరాబాద్ - 500 033 ను సంప్రదించండి.

ముద్రణ : చిత్రలిపి ప్రింటర్స్,

గొల్కొండ క్రాస్ రోడ్స్, హైదరాబాద్ ; ఫోన్ : 631001 (డా ॥ బి.ఆర్.ఏ.ఓ.యు. కొరకు)

పుస్తక పరిచయం

అనేక సాంఘీక శాస్త్రాల మాదిరిగానే అర్థశాస్త్రంలో కూడా విశ్లేషణ, పరిశీలన, అవగాహన, భవిష్యత్తును అంచనా వేయడం మొదలైనవి ముఖ్యమైన ఉద్దేశాలుగా ఉన్నాయి. ఈ ముఖ్య ఉద్దేశాలను సాధించడానికి సిద్ధాంతీకరణ, ప్రయోగాత్మక పరిశీలన అను రెండు మార్గాలూ అవసరమే. సాధారణంగా పరిశోధనలలో ఈ రెండు మార్గాలు కలిసిపోతూ ఉంటాయి. వాస్తవానికి వాటి మధ్య తేడా ఉంది. కొన్ని అంగీకరించిన విషయాలతోనూ, స్వీకృతాలతోనూ, నిర్వచనాలతోనూ ప్రారంభించి కొన్ని వాదనా పద్ధతులనూ, నిరూపణా పద్ధతులనూ ఉపయోగించి సిద్ధాంతీకరణ చేస్తాం. అటువంటి సిద్ధాంతాల నుండి మరికొన్ని ఫలితాలను కూడా రాబట్టుతాం. కాని ప్రయోగాత్మక పరిశీలన సాధారణంగా ఆగమన పద్ధతి (Inductive method) స్వభావాన్ని కలిగి వుంటుంది. ఈ రెండు పద్ధతులు ఒకదానితో ఒకటి జతపడి ఉంటాయి. ప్రయోగాత్మక పరిశీలనకు సిద్ధాంతాలు మార్గ దర్శకాలు కాగా, సిద్ధాంతాల వాస్తవికతకు ప్రయోగాత్మక పరిశీలనలు పరీక్షా విధానాలుగా ఉంటాయి. సాధారణంగా సిద్ధాంతీకరణకు గణిత శాస్త్ర పరిజ్ఞానం, ప్రయోగాత్మక పరిశీలనకు సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిజ్ఞానం అవసరమవుతుంది. ఈ రెండు శాస్త్రాలలోని పద్ధతుల కలయికనే సంఖ్యాత్మక పద్ధతులు (Quantitative Methods) గా వ్యవహరిస్తున్నాం. అర్థశాస్త్రంలో ప్రస్తుత వాదనా పోకడలు గమనిస్తే, వాటి అవగాహనకు ఈ సంఖ్యాత్మక పద్ధతుల అధ్యయనం ఎతైనా అవసరమన్నది నిర్వివాదాంశం.

అందుకే పి.జి. స్థాయిలో అర్థశాస్త్ర అధ్యయనం చేయగోరు విద్యార్థులకు గణిత, సాంఖ్యక శాస్త్రాలతో పరిచయాన్ని కలిగించాలనే లక్ష్యంతో M.A. అర్థశాస్త్రం మొదటి సంవత్సరంలో " సంఖ్యాత్మక పద్ధతులు " (Quantitative Methods) అను కోర్సును నిర్బంధ పేపరుగా ప్రవేశపెడ్తున్నాం. అయితే, డిగ్రీ స్థాయిలో గణిత, సాంఖ్యక శాస్త్రాల పరిజ్ఞానం లేనివారు కూడా పి.జి. స్థాయిలో ఈ పేపరును సులువుగా అధ్యయనం చేయడానికి గాను ప్రాథమిక స్థాయిలో వుండేటట్లు పాఠ్యాంశ ప్రణాళికను (syllabus) రూపొందించాం. ఎక్కువ విషయ అవగాహనకు, వివిధ భావనలను అర్థశాస్త్రంలో అనువర్తింప జేయడానికి ప్రయత్నించాం. అందుకే గణిత, సాంఖ్యక శాస్త్రాలలో సాధారణంగా కనిపించే తీక్షణత ఈ పాఠ్యాంశాలలో కన్పించదు.

అధ్యయన సౌలభ్యం కోసం పాఠ్య ప్రణాళికను ఖండాలుగా, ఈ ఖండాలను వివిధ భాగాలుగా విభజించాం. సాధారణంగా ప్రతి ఖండం ఒక ప్రత్యేక విషయాన్ని అధ్యయనం చేస్తుంది. ప్రతి భాగం దాని విషయ సూచిక, ఉద్దేశాలు, పరిచయంతో ఆరంభమై సారాంశంతో ముగుస్తుంది. సంప్రదింపు గ్రంథాలను, నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలను చివరలో ఇచ్చాం.

సంఖ్యాత్మక పద్ధతులకు సంబంధించిన ఈ కోర్సులో ఎనిమిది ఖండాలున్నాయి. మొదటి నాలుగు ఖండాలు (పార్టు A) గణిత శాస్త్రానికి సంబంధించినవి కాగా చివరి నాలుగు ఖండాలు (పార్టు B) సాంఖ్యక శాస్త్రానికి చెందినవి. మొదటి పుస్తకంలో గణిత శాస్త్ర భాగాలను చేర్చాం. అందులోని మొదటి ఖండం బీజీయ గణితాన్ని, రెండవ ఖండం అవకలనాన్ని, మూడవ ఖండం పాక్షిక అవకలనాన్ని, నాల్గవ ఖండం మాత్రికల సిద్ధాంతాన్ని చర్చిస్తాయి. ఇక ఈ పుస్తకంలో చేర్చబడిన ఐదవ ఖండం దత్తాంశానికి సంబంధించిన సాంఖ్యక విశ్లేషణను తెలుపగా, ఆరవ ఖండం సంభావ్యత సిద్ధాంతాన్ని, సంభావ్యత పంపిణీలను, సంభావ్యత అంచనాలను వివరిస్తుంది. ఏడవ ఖండం సహ సంబంధాన్ని, ప్రతి గమనాన్ని విశ్లేషించగా, చివరి ఖండం దత్తాంశాలు, సూచీ సంఖ్యలు, కాల శ్రేణుల విశ్లేషణను తెలుపుతుంది.

BRAOU

BRAOU

విషయ సూచిక

	పేజీ సంఖ్య
ఖండం - V : దత్తాంశపు సాంఖ్యక విశ్లేషణ	**1**
భాగం - 15. సాంఖ్యక పద్ధతులు - పరిచయం	3
భాగం - 16. దత్తాంశ సేకరణ - వర్గీకరణ	12
భాగం - 17. కేంద్ర స్థానపు కొలతలు	61
భాగం - 18. ఏక చలరాశి దత్తాంశ విశ్లేషణ - విస్తరణ, అసౌష్ఠవత, శికరీయ కొలతలు	126
ఖండం - VI : సంభావ్యత : పంపిణీలు, అంచనాలు	**163**
భాగం - 19. సంభావ్యత, ప్రాథమిక సంభావ్యతా వాదం	164
భాగం - 20. సంభావ్యతా విభాజనాలు : ద్విపద, పాయిసన్, సామాన్య విభాజనాలు	189
భాగం - 21. సార్థకతా పరీక్షలు	209
ఖండం - VII : సహ సంబంధం , ప్రతిగమనం	**245**
భాగం - 22. సహ సంబంధం, ప్రతిగమనం	246
భాగం - 23. బహుళ ప్రతిగమనం	290
ఖండం - VIII :దత్తాంశ ఆధారాలు, సూచీ సంఖ్యలు, కాలశ్రేణులు	**323**
భాగం - 24. స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశ స్వభావం, ఆధారాలు : భారతదేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ దత్తాంశ ఆధారాలు	324
భాగం - 25. జాతీయాదాయం, మదింపు పద్ధతులు, భారతదేశ జాతీయాదాయం	337
భాగం - 26. ధర, ద్రవ్య సప్లయ్ గణాంకాలు	351
భాగం - 27. జనాభా గణాంకాలు	364
భాగం - 28. జాతీయ నమూనా సర్వే	384
భాగం - 29. సూచీ సంఖ్యలు	401
భాగం - 30. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ, భాగాలు : వృద్ధి రేట్ల గణన	437

BRAOU

BRAOU

ఖండం - 5

దత్తాంశపు సాంఖ్యక విశ్లేషణ

ఆర్థిక విశ్లేషణకు, పరిశోధనకు దత్తాంశం ఎంతో అవసరం. దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడానికి గాను ఆధునిక కాలంలో సాంఖ్యక పద్ధతులను, సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిజ్ఞానాన్ని ఉపయోగిస్తున్నాం. అందుకే ఈ పుస్తకంలో సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిజ్ఞానాన్ని మీకు పరిచయం చేయడానికి ప్రయతిస్తున్నాం. మొదటగా దత్తాంశానికి సంబంధించిన సాంఖ్యక విశ్లేషణను ఈ ఖండంలో చర్చించుకొందాం. మొదటి భాగంలో సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిధిని, ప్రాధాన్యతను, పరిమితులను తెలుసుకోవడమేగాక జనాభా, ప్రతిరూపం, యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం, సంభావ్యత వంటి భావనలను చర్చించు కొందాం. సాంఖ్యక విశ్లేషణలో దత్తాంశ ప్రాముఖ్యతను, దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను, దత్తాంశాన్ని సమర్పించే పద్ధతులను రెండవ భాగంలో విశ్లేషించాం. గణాంక విశ్లేషణలో తరుచుగా ఉపయోగించే అంకమధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకం, గుణమధ్యమం, హార మధ్యమం వంటి కేంద్ర స్థానపు కొలతలను తర్వాత భాగంలో వివరించాం. ఈ ఖండంలోని చివరి భాగంలో దత్తాంశ విశ్లేషణకు చెందిన విస్తరణ, అసౌష్ఠవత, శికరీయ కొలతలను పరిశీలిద్దాం.

ఈ ఖండంలో నాలుగు భాగాలు చేర్చబడినవి. అవి :

భాగం - 15 : సాంఖ్యక పద్ధతులు - పరిచయం

భాగం - 16 : దత్తాంశ సేకరణ - వర్గీకరణ

భాగం - 17 : కేంద్ర స్థానపు కొలతలు

భాగం - 18 : ఏక చలరాశి దత్తాంశ విశ్లేషణ - విస్తరణ, అసౌష్ఠవత, శికరీయ కొలతలు

BRAOU

భాగం - 15 : సాంఖ్యక పద్ధతులు - పరిచయం

విషయక్రమం

15.0 ఉద్దేశాలు

15.1 పరిచయం

15.2 సాంఖ్యకశాస్త్ర నిర్వచనం

15.3 సాంఖ్యక శాస్త్ర వుపయుక్తత, పరిమితులు

15.4 అర్థశాస్త్రం - గణాంక శాస్త్రాల మధ్య సంబంధం

15.5 ప్రాథమిక సాంఖ్యక భావనలు

15.5.1 చలాంకం

15.5.2 జనాభా

15.5.3 ప్రతిరూపం

15.5.4 యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం

15.5.5 సాంఖ్యక క్రమం

15.5.6 సంభావ్యత

15.6 సారాంశం

15.7 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

15.8 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

15.9 పదకోశం

15.0 ఉద్దేశాలు

ఆర్థిక విశ్లేషణ మరియు పరిశోధనలో సాంఖ్యక పద్ధతుల ప్రాధాన్యత, సాంఖ్యక శాస్త్ర నిర్వచనం, దాని వుపయుక్తత మరియు పరిమితులను గురించి అర్థశాస్త్ర విద్యార్థులకు ప్రాథమిక అవగాహన కలిగించడం ఈ భాగం యొక్క ముఖ్యోద్దేశము. జనాభా, ప్రతిరూపం, యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం సంభావ్యత మొదలైన అంశాలను కూడా ఈ భాగంలో పరిచయం చేసాం.

ఈ భాగాన్ని చదివిన తర్వాత మీరు

- ✡ సాంఖ్యక శాస్త్రానికి ఉన్న కొన్ని ముఖ్యమైన నిర్వచనాలను మరియు సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిధి, వుపయుక్తత మరియు పరిమితులను అర్థం చేసుకోవచ్చు.
- ✡ అర్థశాస్త్రం గణాంక శాస్త్రాల మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని అర్థం చేసుకోవచ్చు.
- ✡ కొన్ని ప్రాథమిక సాంఖ్యక భావనల స్థూల భావాన్ని గ్రహించవచ్చు.

15.1 పరిచయం

అర్థశాస్త్రంలో చర్చించే ముఖ్యమైన అంశాలన్నీ ప్రధానంగా పరిమాణాత్మకమయినవే. ఉదాహరణకు జాతీయ ఆదాయం పెట్టుబడి, వినియోగం, ఉద్యోగిత, వృద్ధి రేటు మొదలైన అంశాలన్నీ దత్తాంశపరంగా చర్చించే అంశాలే. వాటి మధ్య వుండే పరస్పర సంబంధాలను అర్థం చేసుకోవడం అర్థశాస్త్రజ్ఞులకు ఎంతో అవసరం. అంటే ఆర్థిక విశ్లేషణలో దత్తాంశ విశ్లేషణ తప్పనిసరి. కాబట్టి, అర్థశాస్త్ర అధ్యయనం, దత్తాంశ విశ్లేషణకు వుపయోగించే సాంఖ్యక పద్ధతులకు ఎంతో ప్రాధాన్యత వుంటుంది.

సాంఖ్యక శాస్త్రం లేదా సాంఖ్యక పద్ధతుల గురించిన ప్రాథమిక విషయాలు, అనగా నిర్వచనం, పరిధి, వుపయుక్తత మరియు సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిమితులు, సాంఖ్యక శాస్త్రంలో వుపయోగించే కొన్ని ముఖ్యమైన భావనలు సాంఖ్యక శాస్త్రం మరియు అర్థశాస్త్రాల మధ్య సంబంధం మొదలైన అంశాలను గురించి ఈ భాగంలో చర్చించాం. దత్తాంశ సేకరణ, వర్గీకరణ మరియు దత్తాంశ విశ్లేషణకు వుపయోగించే వివిధ సాంఖ్యక పద్ధతులను రాబోయే భాగాల్లో తెలుసుకొంటారు.

15.2 సాంఖ్యక శాస్త్ర నిర్వచనం

సాంఖ్యక శాస్త్రానికి అనేక నిర్వచనాలు వున్నాయి. ఈ నిర్వచనాలలో ప్రతీదీ సాంఖ్యక శాస్త్రం లోని ఏదో ఒక్క భాగాన్ని మాత్రమే వర్ణిస్తుంది. వీటిలో ఏ ఒకటి కూడా నేటి సాంఖ్యక శాస్త్ర అభివృద్ధిని సూచించే పరిపూర్ణ నిర్వచనం కాదని చెప్పవచ్చు. సాంఖ్యక శాస్త్రానికి ఆంగ్లపదము Statistics. ఇది Latin భాషలోని Statistics, ఇటాలియన్ భాషలోని స్టాటిస్టా అన్న పదాల నుంచి ఉత్పన్నమయినట్టు తోస్తున్నది. ఈ పదాలన్నీ స్టేటు (State), రాజ్యము లేదా దేశము, అన్న అర్థాన్ని సూచిస్తాయి. పూర్వకాలంలో పన్నులు విధించడానికి, విదేశీ దాడుల నుంచి రక్షణ కోసం అవసరమైన సైనిక సిబ్బంది మొదలైన వివరాలకుగాను జనాభా, వారి ఆస్తిపాస్తులు, పారిశ్రామిక వ్యవసాయ ఉత్పత్తులు మొదలైన దేశ పాలనా సంబంధమైన విషయాలను ప్రభుత్వాలు సేకరించేవి.

17వ శతాబ్దంలో జూద క్రీడలు, తత్సంబంధమైన సంభావ్యత సిద్ధాంతాల సాంఖ్యకాలు సాంఖ్యక పద్ధతులుగా రూపొందినాయని చెప్పవచ్చు. బెర్నోలి, డిమోయిర్, లాప్లాస్, పాయిజాన్, బేయి, లాగ్రేజ్, మార్కోవ్ మొదలగు గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఆధునిక సాంఖ్యక పద్ధతులను ప్రత్యేకించి, సంభావ్యతా సిద్ధాంత అభివృద్ధికి చాలా తోడ్పడ్డారు. ఆధునిక కాలంలో ఫ్రాన్సిస్‌గాల్టన్ ప్రతిగమన పద్ధతులను, కార్ల్ పియర్సన్ సహ సంబంధ సిద్ధాంతాన్ని, గౌస్ సామాన్య విభాజన సిద్ధాంతాన్ని సాంఖ్యక శాస్త్ర పితామహుడుగా పేరు గాంచిన " ఫిషర్ " బిందుజాలకము (point estimation), ఖచ్చిత ప్రతిరూప విభాజనాలు, విస్తృతి విశ్లేషణలు మొదలైన నవీన భావనలను ప్రతిపాదించి ఈ సాంఖ్యక శాస్త్రాభివృద్ధికి దోహద పడ్డారు.

BRAOU

సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు అనేక శాస్త్రీయ రంగాలలోనికి చొచ్చుకొని పోయి వాటి అభివృద్ధికి తోడ్పడుతూ తాను కూడా సరిక్రొత్త ఆవరణలను సంతరించుకొంటూ ఏంతో ప్రాముఖ్యాన్ని పొందుతున్నవి.

15.2.1 నిర్వచనాలు

సాంఖ్యక శాస్త్రానికి శాస్త్రజ్ఞులు ఇచ్చిన అనేక నిర్వచనాల్లో ముఖ్యమైన వాటిని ఈ క్రింద తెలియజేస్తున్నాం.

(i) " ఏదైనా ఒక విషయాన్ని గురించి సేకరించి వర్గీకృత రూపంలో ఉన్న సాంఖ్యాత్మక వివరాలే సాంఖ్యకాలు " - బౌలే.

(ii) సంభావ్యతా సిద్ధాంతాలను, అంచనాలు వేసే పద్ధతులను తెలిపేది సాంఖ్యక శాస్త్రం - బాడింగ్టన్.

పరిశోధనా లక్షణ స్వరూప స్వభావాలను పరిశీలించడానికి ప్రాతిపదికగా సంఖ్యాత్మక వివరాల సేకరణ, వర్గీకరణ నిర్వహణా విధానాలకు సంబంధించిన శాస్త్రమే సాంఖ్యక శాస్త్రం.

(iii) పరిశోధనాత్మక విషయాన్ని గురించిన దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి సమర్పించడానికి విశ్లేషించి పోల్చడానికి అనువైన విధానాలను తెలిపే శాస్త్రమే సాంఖ్యక శాస్త్రం - సెలిగ్మాన్.

పైన పేర్కొన్న నిర్వచనాల ఆధారంగా సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని ఈ క్రింది మాటలలో క్లుప్తంగా చెప్పవచ్చు. విశ్లేషించి చూపడానికి, వ్యాఖ్యానించడానికి అనువైన సంఖ్యాత్మక వివరాలను సాంఖ్యకాలు అనీ, దత్తాంశ సేకరణ, సమర్పణ, విశ్లేషణ , వ్యాఖ్యానము మొదలైన విషయాలకు సంబంధించిన పద్ధతులనూ వాటికి అనువైన సూత్రాలను రూపొందించి పరిశీలించే శాస్త్రాన్ని సాంఖ్యక శాస్త్రమని నిర్వచించవచ్చు.

15.3 సాంఖ్యక శాస్త్ర వుపయుక్తత, పరిమితులు

15.3.1 వుపయుక్తత

సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని రెండు ప్రాథమిక శాఖలుగా విభజించవచ్చు. విభాజన సిద్ధాంతాలు, సంభావ్యతా సిద్ధాంతాలు, ప్రతిగమన, సహసంబంధ సిద్ధాంతాలు మొదలైన వాటిని సిద్ధాంత సాంఖ్యక శాస్త్రం (Theoretical Statistics) గాను ; సాంఖ్యక పద్ధతుల ఆవశ్యకత గల గుణ నియంత్రణ (Quality Control) , వ్యాపార నిర్వహణ (Business management) , ఎకనామెట్రిక్స్ (Econometrics) మొదలైన వాటిని అనువర్తిత సాంఖ్యక శాస్త్రం అని భావించవచ్చు.

సాంఖ్యక శాస్త్రం వెలువరించదగ్గ ఏ సుగుణాలమైన సాంఖ్యక విశ్లేషణ ద్వారా వివరంగా పరిశీలించవచ్చు. అందువల్ల నేడు పారిశ్రామిక , ఆర్థిక, వాణిజ్య, యుద్ధ , విద్యా, సాంఘిక రంగాలలోనూ ; వైద్య , భౌతిక, రసాయనిక, జీవ, ఖగోళ శాస్త్రాల వంటి వైజ్ఞానిక రంగాలలోనూ సాంఖ్యక శాస్త్రం అనేక విధాలుగా వుపయోగ పడుతున్నది. పైగా సాంకేతిక రంగంలో డెస్క్ క్యాలుక్యులేటర్స్ (Desk calculators) , అనేక విధాలైన కంప్యూటర్లు మొదలైన గణన యంత్రాలు బాగా అభివృద్ధి చెందడం వలన అన్ని రంగాలలోను సాంఖ్యక పద్ధతుల సహాయంతో వ్యయ ప్రయాసలు లేకుండా అతి క్లిష్టమైన సమస్యలు సైతం పరిష్కృతమవుతున్నాయి.

15.3.2 సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిమితులు

సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిస్థితులను అన్ని రంగాలలో విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నా వీటికి కొన్ని పరిమితులు లేకపోలేదు. వీటిలో ముఖ్యమైన వాటిని తెలుసుకొందాం.

(i) పరిశీలనా లక్షణాన్ని సంఖ్యాత్మకంగా వ్యక్తీకరించలేని పరిస్థితులలో ఏ గుణాత్మక లక్షణాలను (qualitative charecteristcs) గురించి అయినా నిర్దిష్టమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి సాంఖ్యక పద్ధతులు అంతగా తోడ్పడవు. ఉదా : నిజాయితీ, తెలివితేటలు, పేదరికం మొదలైన లక్షణాలు సంఖ్యాత్మకాలు కావు. కానీ ఇటువంటి సందర్భాలలో ఈ లక్షణాలను సంఖ్యాత్మకంగా గాని, మరో విధంగా గాని వ్యక్తీకరించినప్పుడు వాటి విశ్లేషణకు సాంఖ్యక పద్ధతులు తోడ్పడతాయి.

(ii) సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని సగటుల శాస్త్రమని కూడా (Science of averages) అనవచ్చు. ఒక పట్టణంలో నూటికి ఒకరు రోడ్డు ప్రమాదాల్లో మరణిస్తున్నారని సాంఖ్యక పద్ధతుల ద్వారా నిర్ణయించి నప్పుడు, ఆ పట్టణంలోని ప్రతి నూరు మందిలోను ఒకరు తప్పక రోడ్డు ప్రమాదంలో మరణిస్తున్నారని అర్థం కాదు.

(iii) భౌతిక , సామాన్య శాస్త్రాల్లోని నియమాలు ఎంత ఖచ్చితంగా వుంటాయో సాంఖ్యక శాస్త్రంలోని నియమాలు అంత ఖచ్చితంగా వుండవు. సాంఖ్యక విశ్లేషణ పద్ధతుల ఆధారంగా ఏ విషయాన్ని గురించి అయినా, సంభావ్యతా సిద్ధాంతాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని మాట్లాడగలమేగాని నిర్ణయాలను దృఢంగా చెప్పలేం.

(iv) సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు దుర్వినియోగం చెందే అవకాశాలున్నవి. అందువల్ల సేకరించిన దత్తాంశాల ఆధారంగా పదిమంది పది విధాలైన నిర్ణయాలు తీసుకోవటం జరగవచ్చు.

15.4 అర్థశాస్త్రం, గణాంక శాస్త్రాల మధ్య సంబంధం

ఆల్ఫ్రెడ్ మార్షల్ 1890 లో చేసిన ఈ క్రింది వ్యాఖ్య ఆధారంగా ఆర్థిక విశ్లేషణలో గణాంక శాస్త్ర ప్రాధాన్యాన్ని సులువుగా గ్రహించవచ్చు.

" Statistics are the straw out of which I, like every other economist, have to make bricks ".

అంటే ప్రతి ఆర్థిక వేత్త తన విశ్లేషణ కోసం తప్పనిసరిగా గణాంక సమాచారం పైననే ఆధారపడవలసి వుంటుందని అర్థం చేసుకోవచ్చు. స్థూలంగా అర్థ శాస్త్రంలోని ప్రధాన అంశాలు జాతీయ ఆదాయం, ఉద్యోగితా స్థాయి, పెట్టుబడి, ఆదాయం, పొదుపు మొదలగునవి. ఈ అంశాలన్నీ ప్రధానంగా పరిమాణాత్మకమైనవి. వీటిని నిర్ణయించే అంశాలు అనగా వీటి మధ్య వుండే పరస్పర సంబంధాలను అర్థం చేసుకోడానికి, ఈ అంశాలకు సంబంధించిన గణాంక సమాచారం ఎంతో ప్రాధాన్యత వహిస్తుంది. గణాంక సమాచారం మరియు గణాంక పద్ధతులు అన్నవి ఆర్థిక సమస్యలను అర్థం చేసుకోవడానికీ మరియు ఆర్థిక విధానాల రూపకల్పనకూ ఎంతో దోహదపడతాయి. ఉదాహరణకు ఏ వస్తువుల ఉత్పత్తి జరగాలి, ఎంత ఉత్పత్తి జరగాలి, ఎవరి కోసం ఉత్పత్తి జరగాలి అనేవి అర్థశాస్త్రంలో తరచూ ఎదురయ్యే ప్రశ్నలు. ఇలాంటి సమస్యల నేపధ్యంలో సరైన ఆర్థిక నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి గణాంక సమాచారం మరియు గణాంక పద్ధతులు ఎంతో అవసరం. ఉత్పత్తికి సంబంధించిన గణాంకాల ఆధారంగా, డిమాండ్‌కు సరిపడే సప్లయిని సాధించడానికి అవసరమయ్యే ఆర్థిక విధానాలను రూపొందించవచ్చు.

వినియోగానికి సంబంధించిన గణాంకాల ఆధారంగా సమాజంలోని వివిధ వర్గాల ప్రజలు తమ తమ ఆదాయాలను ఏవిధంగా వినియోగిస్తున్నారో తెలుసుకోవచ్చు. ఈ అంశాల ఆధారంగా ప్రజల జీవన ప్రమాణాలను, వారి వారి పన్ను చెల్లించే సామర్థ్యాన్ని అంచనా వేయవచ్చు. వివిధ రకాల మార్కెట్లల్లో ధర, వస్తు

BRAOU

పరిమాణ నిర్ణయం, సప్లయి డిమాండ్‌ల వ్యాకోచత్వం మొదలైన అంశాలన్నీ అర్థం చేసుకోవడంలో కూడా గణాంక సమాచారం మరియు గణాంక పద్ధతుల అవసరం ఎంతైనా ఉన్నది.

జాతీయాదాయాన్ని ఏ విధంగా గణించాలి, జాతీయాదాయం సమాజంలోని వివిధ వర్గాల ప్రజల మధ్య ఏ విధంగా పంపిణీ చేయాలి, ఆదాయ అసమానతలను ఏ విధంగా అంచనా వేయాలి, వాటిని ఏ విధంగా తగ్గించాలి మొదలైన అంశాలను అర్థం చేసుకోవడానికి గణాంక శాస్త్ర పద్ధతులు ఎంతో ఉపకరిస్తాయి. అదే విధంగా పెరుగుతున్న ధరలు, జనాభా, నిరుద్యోగం మరియు పేదరికం మొదలైన సమస్యల్ని అర్థం చేసుకొని పరిష్కార మార్గాల్ని అన్వేషించడంలో కూడా గణాంక సమాచారం మరియు గణాంక శాస్త్ర పద్ధతులు ఎంతో తోడ్పడతాయి.

ఆర్థిక విధానాల రూపకల్పనలోనే కాకుండా, వాటి సామర్థ్యాన్ని మరియు ఆర్థిక వ్యవస్థలో వాటి ప్రభావాన్ని పరిశీలించి అంచనా వేయడానికి కూడా గణాంక శాస్త్ర పద్ధతులు సహాయ పడతాయి. ఫిషర్ మహనీయుడు అన్నట్లుగా ఆర్థిక విశ్లేషణలో గణాంక శాస్త్ర ప్రాధాన్యత ఎంతగా పెరిగిందంటే అది అర్థ శాస్త్రంలోనే ఒక శాఖగా భ్రమించడం జరుగుతోంది.

ఈ మధ్య కాలంలో, సైద్ధాంతిక అర్థశాస్త్రానికి గణాంక పద్ధతులను ప్రత్యేక రీతిలో అన్వయించే ఎకనామెట్రిక్స్ (Econometrics) ను విరివిగా ఆర్థిక పరిశోధకులు ఉపయోగిస్తున్నారు. గణాంక శాస్త్రంలోని ప్రతిచయన సిద్ధాంతాలు ఆర్థిక గణాంక సేకరణలో ఎంతో ఉపయోగకరమైనవి. సేకరించిన ఆర్థిక గణాంక సమాచారం ఏ మేరకు నమ్మదగినదీ, అవి ఎంత ప్రధానమైనవో అనే విషయాల్ని నిర్ణయించడానికి గణాంక పద్ధతుల ఉపయోగం తప్పనిసరి అవుతుంది. డిమాండ్, సప్లయి, ఉత్పత్తి, వ్యయం, వినియోగ ఫలాల విశ్లేషణ మరియు అంచనాలలో గణాంక పద్ధతుల ఉపయోగం అనివార్యమయింది.

ఆ విధంగా, ఇటీవలి కాలంలో ఆర్థికవేత్తలు కేవలం నిరపేక్షమైన పదాల్లో సిద్ధాంతీకరణతో సంతృప్తి చెందడం లేదు. వాస్తవ ప్రపంచంలోని సమాచారం ఆధారంగా వారు కార్యకారణ సంబంధాలు, గ్రహిస్తూ వాస్తవ ఆర్థిక పరిస్థితులను ప్రతిబింబించే ఆర్థిక విశ్లేషణను చేస్తున్నారు.

అర్థశాస్త్రంలోని కొన్ని ప్రధానమైన విభాగాల్లో గణాంక శాస్త్ర ఉపయోగాన్ని ఈ క్రింద వివరించాం.

1. జాతీయోత్పత్తి, జాతీయాదాయ అంచనాలు మరియు ఉత్పాదక - ఉత్పాదిత విశ్లేషణ ;
2. ద్రవ్యము, బ్యాంకింగ్, పరపతి మొదలైన విషయాలు మరియు ప్రభుత్వ విత్తము ;
3. వ్యాపార చక్రాలు, దీర్ఘకాల వృద్ధి మరియు కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ;
4. సంస్థలు, పరిశ్రమలు, మార్కెట్ వ్యవస్థలు, ధర నిర్ణయాలు, లాభ మరియు వ్యయ విశ్లేషణ ;
5. ధర నిర్ణయ సిద్ధాంతాలు, ధరల ధోరణులు, ధరల విధానాలు మరియు ద్రవ్యోల్బణ విశ్లేషణ ;
6. జనాభా విశ్లేషణ, భూమి సమస్య మరియు ఆర్థిక భౌగోళిక శాస్త్రం ;
7. నిరుద్యోగం, పేదరికం, ఆదాయ మరియు సంపద పంపిణీలో అసమానతలు మొదలైన సమస్యలు.

ఈ విశ్లేషణలో గణాంక శాస్త్ర పద్ధతి ఎంతో ఉపయుక్తమయినది.

BRAOU

ఈ దత్తాంశం నుంచి సహేతుకమైన నిర్ణయాలను తీసుకోవటానికి సాంఖ్యక శాస్త్ర నిపుణులు మాత్రమే సమర్థులు.

15.5 ప్రాథమిక సాంఖ్యక భావనలు (Basic Statistical Concepts)

15.5.1 చలాంకం (Variable)

పరిమాణాత్మక లక్షణ పరిశీలనలో అంశాలను ఈ లక్షణం దృష్ట్యా సంఖ్యారూపంలో వ్యక్తీకరించవచ్చు. మనుష్యుల ఎత్తు, బరువు, వయస్సు మొ॥ లక్షణాలను సంఖ్యారూపంలో చూపవచ్చు. ఇదే విధంగా కుటుంబ ఆదాయం, జాతులు, తలసరి ఆదాయం, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తి, పెట్టుబడి, ద్రవ్య సరఫరా, పరపతి, సృష్టి మొదలగు వాటిని కూడా సంఖ్యారూపంలో చూపవచ్చు. ఈ లక్షణ విలువలు వస్తువు (item) నుండి మరో వస్తువుకు మార్పు చెందుతాయి. కాబట్టి ఇటువంటి పరిమాణాత్మక లక్షణాలను చలాంకాలు అంటారు. ఒక చలాంక విలువ ధనాత్మక పూర్ణాంక విలువకు సమానమైతే అటువంటి చలాంకాన్ని విచ్ఛిన్న చలాంకం (Discrete variable) అంటారు. ఉదా॥ కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య, ట్రాక్టర్ల ఉత్పత్తి, ఇట్లాకాక ఒక అంతరంలో ఏ విలువనైనా తీసుకోగల్గితే అట్లాంటి చలాంకాన్ని అవిచ్ఛిన్న చలాంకం అంటారు. ఉదా॥ విద్యార్థి ఎత్తు, బరువు, ఉష్ణోగ్రత మొదలగునవి.

15.5.2 జనాభా (Population)

ఏదైనా ఒక సాంఖ్యక పరిశీలనలో ఒక లక్షణాన్ని గురించి సహేతుకమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఆ లక్షణం కల్గిన వస్తువుల నుంచి దానికి సంబంధించిన వివరాలను సేకరిస్తాం. ఇటువంటి వస్తువు లేదా వివరాల సమూహాన్ని జనాభా (population) అంటారు. లోకంలోని వస్తు లేదా వివరాల సంఖ్య అనంతమైనదైతే (infinite) అటువంటి జనాభాను అపరిమిత జనాభా (infinite population) అంటారు.

15.5.3 ప్రతిరూపం (Sample)

ఏదైనా లోకానికి చెందిన ఒక పరిమితమైన వస్తు సమూహాన్ని ప్రతిరూపమని, ప్రతిరూపంలోని వస్తువుల సంఖ్యను ప్రతిరూప పరిమాణం (sample size) అని అంటారు. ఏదైనా ఒక లక్షణ పరిశీలన కోసం దానికి చెందిన ప్రతి వస్తువు నుంచి వివరాలను సేకరిస్తాం. కాని లోకం పరిమితమైతేనే ఈ దత్తాంశ సేకరణ సంభవం కావచ్చు. కాని లోకం (universe) అనంతమైతే దత్తాంశసేకరణ అసంభవమవుతుంది. ఇటువంటి సందర్భంలో సరియైన పరిమాణం గల ప్రతి రూపాన్ని ఈ లోకం నుంచి సాంఖ్యక రచనల ద్వారా (statistical designs) ఎన్నుకొని, ప్రతిరూప దత్తాంశాన్ని మాత్రమే సేకరిస్తాం. ఇటువంటి దత్తాంశాన్ని ఆధారంగా తీసుకొని లోకానికి చెందిన పరిశీలనా లక్ష్యాన్ని గురించి స్థూలంగా అంచనా వేస్తాం.

లోకంలోని ప్రతి అంశం నుంచి సేకరించిన దత్తాంశ విలువన్నింటికి ప్రాతినిధ్యం వహించి, పరిశీలనా లక్షణ స్వరూపాన్ని క్లుప్తంగా చెప్పగల సంఖ్యను ఆ లోకపు పరామితి (parameter) అంటాం. ఉదాహరణకు సామాన్య విభాజనం (normal distribution) లోని అంకమధ్యమం "μ" క్రమ విచలనం " σ " లు సామాన్య లోకం (normal population) పరామితులవుతాయి. ప్రతి రూప దత్తాంశ విలువల నుంచి గణించినప్పుడు వచ్చే ఇటువంటి అంక మధ్యమం '$\overline{X}$', ప్రతి రూప క్రమ విచలనం "S" లను "సాంఖ్యకాలు" (statistics) అంటాం. సాధారణంగా ప్రతి రూప విలువల ప్రమేయాన్ని సాంఖ్యకంగా పరిగణిస్తాం.

15.5.4 యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం (Random Experiment)

ఒక ప్రయోగాన్ని జరిపినప్పుడు దాని ఫలితం అనిశ్చితమై ఆ ప్రయోగాన్ని సదృశ పరిస్థితులలో లెక్కలేనన్ని సార్లు చేయగల్గితే ఆ ప్రయోగాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం అంటారు. ఇటువంటి ప్రయోగ ఫలితాలను ఒక క్రమంలో నమోదు (record) చేసినప్పుడు వచ్చే సంఖ్యా సముదాయాన్ని ఆ పరిశోధన విషయానికి సంబంధించిన సాంఖ్యక దత్తాంశం (statistical data) అంటాం. ఈ దత్తాంశ సహాయంతో కొన్ని విధాలయిన అనిశ్చిత పరిస్థితుల్లో కూడా పరిశోధన విషయంపై సహేతుకమైన తీర్మానాలను తీసుకోవడమే సాంఖ్యక విశ్లేషణ (statistical analysis) ముఖ్యోద్దేశం. ఈ సాంఖ్యక విశ్లేషణ చాలా వరకు సంభావ్యతా సిద్ధాంతం మీద ఆధారపడి వుంది.

15.5.5 సాంఖ్యక క్రమం (Statistical Regularity)

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలను అనేక సార్లు సదృశ పరిస్థితులలో కొనసాగిస్తున్నప్పుడు, ప్రతిసారి ప్రయోగ ఫలితం, ముందుగా అనిశ్చితమని తెలుసుకొన్నాం. ఈ ఫలితాలు క్రమాన్ని తప్పి యాదృచ్ఛిక చాంచల్య స్థితిని పొందడం వల్ల అనిశ్చితాలు అవుతాయి. కాని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ఫలితాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే సగటున ఈ ఫలితాలు (average result) ఒక నిర్దిష్ట క్రమాన్ననుసరించడం గమనిస్తాం. సాంఖ్యక దత్తాంశంలో ఇమిడి వున్న ఈ క్రమాన్ని సాంఖ్యక క్రమం అంటారు. దత్తాంశ విలువలలో వున్న ఇటువంటి సాంఖ్యక క్రమం సంభావ్యతా నిర్వచనానికి తోడ్పడుతుంది.

15.5.6 సంభావ్యత (Probability)

ఏదైనా యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాన్ని అనేకసార్లు కొనసాగించి ప్రతిసారి ఘటన E (event E) జరిగిందీ లేనిదీ గణించి " n " ప్రయోగ ప్రయత్నాల (trials) లో " f_n " (Σn) సార్లు ఘటన ని గ్రహించినామనుకోండి. మొదటి "n" ప్రయత్నాలలో ఆ ఘటన "E" సాపేక్ష పౌనః పున్యం (relative frequency) fn / n అవుతుంది. సదృశ పరిస్థితుల్లో ప్రయోగాన్ని అనంతంగా ($n \to \alpha$) జరిపితే ఘటన E సాపేక్ష పౌనః పున్యం ఒక ధనరాశి (P) అనే హద్దు సమీపంలో స్థిరీకృతత్వం (stabilisation) చెందడం గమనిస్తాం. అంటే,

$$\lim_{n \to \alpha} fn / n = P$$

ఈ స్థిర ధనరాశిని E ఘటన యొక్క సంభావ్యత అని అంటారు. ఇటువంటి నిర్వచనాన్ని సంభావ్యతకు సాంఖ్యక నిర్వచనం (Statistical definition of probability) అని అంటారు.

15.6 సారాంశం

ఈ భాగంలో చదివినట్లుగా, ఆర్థిక విశ్లేషణ, పరిశోధనలో దత్తాంశ విశ్లేషణ ఆవశ్యకత వుంది కాబట్టి, అర్థశాస్త్ర విద్యార్థులుగా సాంఖ్యక విశ్లేషణా పద్ధతుల గురించి తెలుసుకోవడం ఎంతైనా అవసరం. విశ్లేషించి చూపడానికి, వ్యాఖ్యానించడానికి అనువైన ఏవైనా సంఖ్యాత్మక విలువలను లేదా వివరాలను సాంఖ్యకాలు అనీ, దత్తాంశ సేకరణ, సమర్పణ, విశ్లేషణ, వ్యాఖ్యానం మొదలైన విషయాలకు సంబంధించిన పద్ధతులనూ వాటికి అనువయిన సూత్రాలనూ రూపొందించి, పరిశీలించే శాస్త్రాన్ని సాంఖ్యక శాస్త్రమనీ చెప్పవచ్చు. నేడు, పారిశ్రామిక, ఆర్థిక, వాణిజ్య, యుద్ధ, విద్యా, సాంఘిక రంగాలలోనూ; వైద్య , భౌతిక, రసాయనిక, జీవ, ఖగోళ శాస్త్రాల వంటి వైజ్ఞానిక రంగాలలోనూ సాంఖ్యక శాస్త్రం అనేక రకాలుగా వుపయోగపడుతున్నది.

BRAOU

జాతీయాదాయం, ధరలు, పెట్టుబడి, ఉద్యోగితా, జనాభా, ద్రవ్యోల్బణం, బాంకింగ్, వాణిజ్యం, భూమి సమస్య, నిరుద్యోగం, పేదరికం, అసమానతలు మరియు బడ్జెట్, అంతర్జాతీయ వ్యాపారం మొదలగు అనేక ఆర్థిక విషయాల విశ్లేషణలో సాంఖ్యక పద్ధతులను విరివిగా ఉపయోగించడం జరుగుతున్నది.

సాంఖ్యక విశ్లేషణలో తరచుగా ఉపయోగించే కొన్ని ముఖ్యమయిన ప్రాథమిక భావనలు : చలాంకం, జనాభా, ప్రతిరూపం, యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం, సంభావ్యత, సగటు, విచలనం మొదలైనవి.

15.7 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. Taro Yamane : Statistics
2. S.P. Gupta : Statistical Methods
3. A.L. Nagar & Das : Statistics
4. తెలుగు అకాడమి : ఆర్థిక విశ్లేషణ పద్ధతులు
5. Frank Jr : Mathematics & Statistics for Economists
6. R.G.D. Allen : Mathematics for Ecomists
7. Macmillan Teach Yourself Series : Statistics.

15.8 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు 30 - 40 పంక్తులలో జవాబులివ్వు.

1. అర్థశాస్త్రానికి సాంఖ్యక శాస్త్రానికి వున్న సంబంధాన్ని తెలుపండి.
2. సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని నిర్వచించండి.
3. కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రాథమిక సాంఖ్యక భావనలేవి ?

II. కింది ప్రశ్నలకు 15 - 20 పంక్తులలో జవాబులు రాయండి.

1. సాంఖ్యక శాస్త్ర వుపయుక్తతను తెలుపండి.
2. సాంఖ్యక క్రమమనగానేమి ?
3. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగమనగానేమి ?

15.9 పదకోశము

ఆర్థిక విశ్లేషణ	Economic Analysis
దత్తాంశ విశ్లేషణ	Statistical Analysis

BRAOU

దత్తాంశ సేకరణ	Data collection
దత్తాంశ వర్గీకరణ	Classification of data
సాంఖ్యక భావనలు	Statisttical concepts
సంఖ్యాత్మక వివరాలు	Statistical information, statistics
సాంఖ్యక శాస్త్ర వుపయుక్తత	Usability of statistics
సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిమితులు	Limitations of statistics
చలాంకము	Variable
జనాభా	Population
ప్రతి రూపము	Sample
యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము	Random experiment
సాంఖ్యక క్రమము	Statistical regularity
సంభావ్యత	Probability
ఘటన	Event

\- డా. ఎ. సదానందం

BRAOU

భాగం - 16 : దత్తాంశ సేకరణ - వర్గీకరణ

విషయసూచిక

16.0 ఉద్దేశాలు

16.1 పరిచయం

16.2 దత్తాంశ సేకరణ

16.2.1 విషయావగాహన

16.2.2 దత్తాంశ సేకరణకై ప్రణాళికలు

16.3 దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు

16.3.1 ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు

16.3.2 గౌణ దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు

16.4 దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం

16.4.1 ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం

16.4.2 గౌణ దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం

16.5 జనాభా పద్ధతి - ప్రతి రూప గ్రహణ పద్ధతి

16.6 తిరిగి చేర్చే మరియు తిరిగి చేర్చని ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి

16.7 ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ప్రయోజనాలు

16.8 జనాభాల రకాలు

16.9 ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతులు

16.10 ప్రతిరూపాన్ని గ్రహించుటలోని ఉద్దేశాలు

16.11 ప్రతిరూప గ్రహణ సిద్ధాంతము

16.12 ప్రతిరూప దోషాలు

16.13 వర్గీకరణ పద్ధతులు

16.14 చలాంకము

16.15 గణాంక శ్రేణులు

BRAOU

16.16 పౌన : పున్య విభాజనాలు

16.16.1 విరళ శ్రేణులు

16.16.2 అవిరళ శ్రేణులు

16.16.3 పౌన : పున్య సాంద్రత

16.16.4 పౌన : పున్య విభాజన నిర్మాణం

16.16.5 సంచిత పౌన : పున్యం

16.16.6 సాపేక్ష పౌన : పున్య విభాజనము

16.16.7 ద్విదశ పౌన : పున్య విభాజనము

16.17 గణాంక దత్తాంశం - చిత్రపట ప్రదర్శన

16.17.1 బార్ చిత్రపటాలు

16.17.2 పై చార్టులు లేదా వృత్త చిత్రాలు

16.17.3 రేఖా చిత్ర పటాల ద్వారా దత్తాంశ సమర్పణ

16.18 పౌన : పున్య రేఖా చిత్రాలు

16.19 గణాంక చిత్రపటాల పరిమితులు

16.20 సారాంశం

16.21 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

16.22 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

16.23 పదకోశం

16.0 ఉద్దేశాలు

సాంఖ్యక విశ్లేషణలో దత్తాంశ పాత్ర, దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు, ప్రాథమిక మరియు గౌణ దత్తాంశములు, దత్తాంశ వర్గీకరణ, చిత్రపట ప్రదర్శన ద్వారా దత్తాంశ సమర్పణ మరియు పౌన : పున్య విభాజనాలు, సంచిత, సాపేక్ష పౌన : పున్యము మరియు పౌన : పున్య చిత్ర పటాలు మొదలైన అంశాలను చర్చించడం తద్వారా దత్తాంశ విశ్లేషణలో వీటి పాత్రను విద్యార్థికి తెలియజేయడం ఈ భాగం ముఖ్యోద్దేశం.

ఈ భాగాన్ని చదివిన తర్వాత విద్యార్థి

BRAOU

✡ దత్తాంశ మంటే ఏమిటో, ఆర్థిక విశ్లేషణ మరియు పరిశోధనలో దత్తాంశము ప్రాధాన్యతను గ్రహించవచ్చు.

✡ దత్తాంశ రకాలు, దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను అర్థం చేసుకోవచ్చు.

✡ దత్తాంశ వర్గీకరణ అవసరాన్ని వర్గీకరణ విధానాలను అర్థం చేసుకోవచ్చు.

✡ చిత్ర పట ప్రదర్శన ద్వారా దత్తాంశ సమర్పణ, బార్, వృత్త మరియు రేఖా చిత్రాలను అర్థం చేసుకోవచ్చు.

✡ పౌన : పున్య విభాజనాలను పౌన : పున్య రేఖ చిత్రాలను అర్థం చేసుకోవచ్చు.

16.1 పరిచయం

ఆర్థిక పరిశోధనలోనే కాకుండా, సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు నేటి సామాజిక వ్యవస్థలోని అన్ని రంగాలలో విరివిగా వాడుతున్నారు. శాస్త్రీయ పరిశోధన, విద్య, వ్యవసాయం, పారిశ్రామిక, సామాజిక ఇంకా వ్యాపారం మొదలైన అనేక రంగాలలో సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు ఉపయోగిస్తున్నారు. ఒక పారిశ్రామిక సంస్థలో ఉత్పత్తిదారుడు, తన పరిశ్రమలో రాబోయే ఐదు సంవత్సరములలో ఎంత ఉత్పత్తి చేయవలెనో, ఆ ఉత్పత్తికి కావలసిన కులీలు, ముడి సరుకు మొదలైనవి ఎంత కావలెనో, ఏ ఏ రకానికి ఎంతెంత ఉత్పత్తి చేయవలెనో మొదలైన విషయాల గురించి సాంఖ్యక పద్ధతుల వల్ల అంచనా వేసి ఆ ప్రకారం ఉత్పత్తి సాగిస్తారు.

ఏ రంగంలోనైనా ఏదైనా ఒక విషయాన్ని గురించి పరిశీలించడానికి, ఆ విషయానికి సంబంధించిన సంఖ్యాత్మక దత్తాంశాన్ని సేకరించవలె. ఉదాహరణకు విలాసవస్తువులపై ఎక్కువ ఎక్సైజ్ సుంకాన్ని విధించడం ద్వారా వాటి వినియోగాన్ని తగ్గించగలమో లేదో తెలుసుకోవడానికి, వివిధ మార్కెట్లలో పన్ను విధింపుకు పూర్వం మరియు తర్వాత జరిగిన కొనుగోళ్ల దత్తాంశాన్ని సేకరించి విశ్లేషించాలి. ఈ కొనుగోళ్లకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్నే ' సాంఖ్యక దత్తాంశం ' (statistical data) అని అంటారు.

కొన్ని సందర్భాలలో దత్తాంశాన్ని కేవలం సంఖ్యా రూపంలో గుర్తించలేము. ఉదాహరణకు ఒక ప్రాంతంలోని ప్రజల నిజాయితీ గురించి పరిశీలించవలసి వస్తే, నిజాయితీని సంఖ్యలలో తెలుపలేము కదా. అటువంటప్పుడు నిజాయితీతో సంబంధము కల మరో విషయాన్ని, ఆ ప్రాంతంలో జరిగే దొంగతనాల సంఖ్యను బట్టి ఆ ప్రాంతం నిజాయితీని నిర్ణయిస్తాడు. అట్లే విద్యార్థుల I.Q. (Intelligence Quotients) లను వారి మార్కులను బట్టి నిర్ణయిస్తాము.

దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులతో తగిన నిర్ణయాలను తీసుకోవడానికి " దత్తాంశం సేకరణ " కీలక పాత్ర పోషిస్తోంది. ఈ దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను గురించి ఈ క్రింది ప్రకరణాలలో చర్చించినాము.

16.2 దత్తాంశ సేకరణ (Collection of Data)

సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులలో దత్తాంశ సేకరణ చాలా ప్రధానమైనది. తీసుకొనే ప్రతి నిర్ణయము దత్తాంశపు స్థాయి (quality of data) పై ఆధారపడి వుంటుంది. కనుక దత్తాంశ సేకరణలో ఎలాంటి లోటు లేకుండా, సాధ్యమైనంత వరకు దత్తాంశము సరియైనదిగాను, నమ్మకం కలదిగాను, పూర్తి అయినదిగాను ఉండాలి. దత్తాంశ సేకరణ నిర్ణీత పద్ధతిలో జరగాలి. లేకపోతే చేయవలసిన పరిశోధనకు ఆ దత్తాంశము వీలుగా ఉండక

కాలము, ధనము వృధా కాగలదు. దత్తాంశ సేకరణ చేసేటప్పుడు క్రింది రెండు విషయాలు దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

(a) ఏ విషయ పరిశోధనకైతే దత్తాంశం తీసుకోబడుతుందో, ఆ విషయం పూర్తిగా అవగాహన చేసుకోవాలి.

(b) దత్తాంశ సేకరణకై ప్రణాళిక వేసుకోవాలి.

16.2.1 విషయావగాహన

పరిశీలకుడు తాను ఏ విషయం ఎందుకు పరిశీలించదలిచాడో, దానిని క్షుణ్ణంగా అవగాహన చేసుకోవాలి. లేకపోతే పరిశీలన వృధా అవుతుంది. ఉదాహరణకు ఒక దేశంలోని " నిరుద్యోగము " గురించి పరిశీలించదలిచామనుకొందాము. ఈ విషయంపై పలురకాల విషయాలు గోచరిస్తాయి. పట్టణ వాసులలో నిరుద్యోగము, గ్రామీణ వాసులలో నిరుద్యోగము, చదువుకున్న వారిలో నిరుద్యోగము, చదువుకోని వారిలో నిరుద్యోగము మొదలైనవి. అయితే " నిరుద్యోగము " అనే విషయము యొక్క ఏ అంశం గురించి పరిశీలించదలిచామో ఆ అంశం పూర్తిగా తెలిసి వుండాలి. లేకపోతే, సేకరించిన దత్తాంశము పరిశోధన చేసే విషయానికి తగినదిగా ఉండదు. కనక విషయావగాహన చాలా ప్రధానమైనది. ఇంకా ఏ అంశం గురించి పరిశీలన జరుపబడుతుందో దానికి సంబంధించిన ప్రవచనము (statement of the purpose) క్లుప్తముగాను, అసందిగ్ధముగాను ఉండాలి. నిర్దిష్టముకాని ఏదైనా ఒక ప్రవచనము (statement) వల్ల ఏమీ లాభము లేదు.

16.2.2 దత్తాంశ సేకరణకై ప్రణాళిక వేయటం

పరిశోధన చేసే విషయాన్ని గురించి క్షుణ్ణంగా అవగాహన చేసుకొన్న తర్వాత, దత్తాంశ సేకరణకై స్కీము (scheme) తయారు చేయాలి. ఈ స్కీములో

(a) దత్తాంశ సేకరణ పరిధులు

(b) దత్తాంశ సేకరణకై గ్రహించవలసిన యూనిట్లు

(c) దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు

(d) ప్రశ్నా పత్రము తయారుచేయటం మొదలైన విషయాలన్నీ పూర్తిగా తెలుపాలి.

(a) దత్తాంశ సేకరణ పరిధి (Scope of Inquiry)

ఏ విషయం గురించి పరిశోధన జరపాలో తెలుసుకున్న తరువాత, దత్తాంశ సేకరణ చేయవలసిన పరిధి కూడా నిర్ణయించుకోవాలి. ఏ పరిధిలో దత్తాంశ సేకరణ చేస్తే వచ్చే ఫలితాలు సంతృప్తికరంగా ఉంటాయో విచారించవలసిన ప్రణాళిక తయారుచేసే వానిపై ఉంటుంది. సాధారణంగా ఈ పరిధి కాలము, ధనము, సేకరించవలసిన విషయాల సంఖ్య మొదలైన వాటిపై ఆధారపడి వుంటుంది.

(b) దత్తాంశ సేకరణకై గ్రహించవలసిన యూనిట్లు

దత్తాంశ సేకరణలో యూనిట్ల ప్రాధాన్యత చాలా ఉంది. దత్తాంశాన్ని ఏ యూనిట్లలో సేకరించాలో పూర్తిగా నిర్ణయము చేసుకోవాలి. ఉదాహరణకు మన దేశంలోని బట్టల మిల్లులలో సమ్మెలు, లాకౌట్‌ల ప్రభావము ఉత్పత్తిపై ఏ విధంగా ఉందో పరిశీలించవలసి వస్తే వివిధ రాష్ట్రాల నుంచి ఎంతెంత కాలము మిల్లులు పనిచేయలేవనే విషయం తెలుసుకోవలసి వుంది. ఇందుకై మిల్లులు పనిచేయని కాలం సరిగా నిర్వచించాలి.

Dr BRAOU LIBRARY Acc. No: CM-0215 Class No: 330 అర్థశా

లేకపోతే వివిధ రాష్ట్రాల నుంచి రాబట్టిన సమాచారాలలో తేడాలుంటాయి. కొన్ని రాష్ట్రాలు 3 నెలలు పైగా మిల్లులు మూతపడితేనే పని చేయని గంటలు యిస్తాయి. లేదా మరికొన్ని రాష్ట్రాలు 1 నెల పైగా మిల్లులు మూత బడితేనే పనిచేయని గంటలు యిస్తాయి. మరికొన్ని రాష్ట్రాలు ఒక వారంపైగా మిల్లులు మూతబడితేనే పనిచేయని గంటలు యిస్తాయి. అందువల్ల పని చేయని గంటలు అనే యూనిట్‌ను పరిపూర్ణముగా నిర్వచించని ఎడల దత్తాంశపు విలువలు పోల్చడానికి వీలుకాక, వివిధ రాష్ట్రాలలో పారిశ్రామిక సంబంధాలను తెలుసుకోవడం కష్టమవుతుంది. కనక పరిశీలించవలసిన విషయానికి తగిన సాంఖ్యక యూనిట్లను ఎన్నుకోవలెను.

(c) **దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు :** ఈ విషయము 16.3 లో విపులంగా చర్చించాము.

(d) **ప్రశ్నా పత్రము తయారు చేయుట :** ఈ విషయము కూడా 16.3 లోనే చర్చించినాము.

16.3 దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు

దత్తాంశ సేకరణలో పరిశీలకుడు (Investigator) రెండు పద్ధతులను అనుసరించడానికి వీలుంది.

(a) తనంతతాను స్వయంగా,క్షేత్ర దర్యాప్తు చేసి దత్తాంశం సేకరించ డం. ఈ విధంగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశము (Primary Data) అంటారు.

(b) ప్రభుత్వ ఏజన్సీలవద్ద కాని, ప్రైవేటు ఏజన్సీల వద్ద కాని ఇదివరలో సేకరించిన దత్తాంశం నుంచి మూలకాలను సేకరించడం. ఈ విధంగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ద్వితీయ దత్తాంశం (Secondary Data) అంటారు. పై రెండు విధాలుగా సేకరించిన దత్తాంశాలలో ఒక్కొక్క విధానాన్ని బట్టి, దత్తాంశపు మంచి చెడ్డలు ఉంటాయి. అయితే ఈ రెండు పద్ధతులలోను, ఏ పద్ధతిననుసరించి దత్తాంశాన్ని సేకరించాలి అన్న విషయం పరిశీలించబడే లక్ష్యము, పరిశీలన కోసం నిర్దేశింపబడిన కాలము, పరిశీలనకై నియోగించిన పరిశీలకుని నేర్పరితనము, పరిశీలన ఎంత ఖచ్చితంగా ఉండాలి (Accurancy of investigation), మొదలైన అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. సాధారణంగా ఏ రకానికి చెందిన సాంఖ్యక పరిశీలనైనా కొన్ని కొన్ని లోపాలకు గురి అయి ఖచ్చితమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి వీలుండదు. ఉదాహరణకు మనుష్యుల ఎత్తును కొలిచేటప్పుడు సెంటిమీటర్లు కూడా తీసుకొంటారు. కాని రెండు ప్రదేశాల మధ్య దూరాన్ని కొలిచేటప్పుడు మీటర్లకు కూడా అంత ప్రాముఖ్యత నీయము. అందువల్ల ఎంత ఖచ్చితంగా దత్తాంశ మూలకాల కొలతలు తీసుకోవాలి అన్న విషయం పరిశీలించబడే విషయంపైన, ఎంత ఖచ్చితంగా సాంఖ్యక పరిశీలన జరపాలి అన్న అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. కనక సాధ్యమైనంత ఖచ్చితంగా దత్తాంశ సేకరణ చేయాలి.

16.3.1 ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు (Methods of Primary Collection)

ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణకు సాధారణంగా క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు.

(i) ప్రత్యక్ష పరిశీలన (Direct Observation) : ఈ పద్ధతి ప్రకారం పరిశీలకుడు తనకు కావలసిన దత్తాంశాన్ని స్వయంగా సేకరిస్తాడు. ఈ పద్ధతి సాధారణంగా పరిశీలించబడే క్షేత్రము స్వల్పమైనపుడు, అతి ఖచ్చితమైన నిర్ణయం కావలసినపుడు మాత్రమే వాడతారు. కాని ఈ పద్ధతిలో డబ్బు, కాలము వృధా అవుతాయి. ఏ సాంఖ్యక పరిశీలనలోనైనా, పరిశీలించబడే క్షేత్రము అపరిమితంగా ఉండడం వల్ల ఈ పద్ధతి అంత వాడుకలో లేదు.

BRAOU

(ii) పరోక్ష పరిశీలన (Indirect Observation) : కొన్ని కొన్ని సందర్భాలలో పరిశీలించబడే విషయానికి సంబంధించి సరియైన సమాచారము ప్రత్యక్షంగా పొందలేము. ఉదాహరణకు ఒక విచారణ సంఘము ఒక అధికారి గతంలో జరిపిన అవకతవకల గురించి విచారణ చేయదలచి, ఆ వ్యక్తి వద్ద నుంచి సమాచారము పొందాలంటే, ఆ వ్యక్తినే కాకుండా ఆ వ్యక్తితో సంబంధము కలిగివున్న మరికొంత మంది వ్యక్తులను కూడా సాక్షులుగా విచారణ జరిపి, ముందుగా నిర్ణయించుకొన్న కొన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాల ద్వారా విషయాన్ని పరోక్షంగా సేకరిస్తారు. ఇటువంటి పద్ధతులు సాధారణంగా భారత ప్రభుత్వం వారు నియమించే విచారణ సంఘాలలో వాడుతుంటారు.

(iii) ఏజెంట్ల ద్వారా సమాచారం పొందుట : ఈ పద్ధతిలో పరిశీలకుడు పరిశీలించే క్షేత్రములో కొంత మంది ఏజంట్లను నియమించి, ఆ ఏజంట్లు సేకరించిన సమాచారాన్ని ఉపయోగిస్తాడు. అయితే, సమాచార సేకరణకు ఏ పద్ధతి ఉత్తమమైనదో ఏజంట్లు ముందుగా నిర్ణయము చేసుకోవాలి. సాధారణంగా ఉజ్జాయింపు ఫలితాలతో సంతృప్తిపడితే, ఈ పద్ధతివల్ల ఉజ్జాయింపు విలువలను అతి శీఘ్రముగా పొందవచ్చును. కాని ఖచ్చితమైన ఫలితాలు కావలసిన యెడల ఈ పద్ధతి క్షేమకరము కాదు.

(iv) ప్రశ్నా పత్రము (Questionaire) పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో పరిశీలనా విషయానికి సంబంధించిన కొన్ని ప్రశ్నలను తయారు చేసి ఈ ప్రశ్నా పత్రాలను ఆ వ్యక్తులు, ఆ ప్రశ్నా పత్రాలలోని ప్రశ్నలన్నింటికి సరియైన సమాధానాలు వ్రాసి తిరిగి పరిశీలకునికి పంపుతారు. అయితే ఈ పద్ధతిలో రెండు లోపాలు మనకు గోచరిస్తాయి. మొదటిది ఈ ప్రశ్నా పత్రాలను నింపి తిరిగి పంపకపోవుట, రెండవది ప్రశ్నా పత్రములోని ప్రశ్నలకు సరియైన సమధానాలు తిరిగి ఈయకపోవుట.

కనుక ఈ పద్ధతి సమర్ధవంతమగుటకు (i) ప్రశ్నా పత్రములోని ప్రశ్నలు సమాధానమిచ్చే వ్యక్తులకు పూర్తిగా అర్ధమయ్యేటట్లు ఉండాలి. (ii) ప్రశ్నా పత్రము నేర్పుతో తయారు చేయాలి. (iii) సమాధానమిచ్చే వ్యక్తులు సరియైన సమాధానాలు ఈయటానికి ఆసక్తి చూపాలి. ఈ పద్ధతి వల్ల ఒకే దర్యాప్తుతో రెండు మూడు అంశాలకు చెందిన పరిశీలనలు జరుపగలము.

(v) ప్రశ్నా పత్రము ఏజంట్ల ద్వారా పంపుట : (iv) పద్ధతిలో ప్రశ్నా పత్రము పోస్టులో పంపడానికి బదులుగా కొంతమంది ఏజంట్లను నియమించి, ఆ ఏజంట్ల ద్వారా ప్రశ్నా పత్రములోని ప్రశ్నలకు వ్యక్తుల వద్ద నుంచి ప్రత్యక్షంగా సమాధానాలు సేకరిస్తారు. ఇందుకోసం ఏజంట్లను ఆయా పనులకై తగిన శిక్షణ ఇచ్చి నియమిస్తారు. ఈ పద్ధతి యిప్పుడు ఎక్కువ వాడుకలో ఉంది.

సమాధానాలు సేకరించేటప్పుడు ఏజంట్లు సాధారణంగా క్రింది విషయాలు దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

(i) ప్రశ్నలను పూర్తిగా అవగాహన చేసుకోవలెను.

(ii) ఇచ్చిన సమాధానము సరియైన సమాధానము అవునా, కాదా అనే నిర్ణయము చేయగలిగి ఉండాలి.

(iii) కావలసిన సమాచారాన్ని సేకరించడానికి తగిన నేర్పు కలిగి ఉండాలి.

(iv) ఉన్న విషయాన్ని యథాతథంగా తీసుకోవాలి.

(v) నిష్పాక్షిక బుద్ధి కలిగి ఉండాలి.

BRAOU

ఏజంట్లకు పూర్తి శిక్షణ యిచ్చి తర్ఫీదు యిస్తే వారు సేకరించిన విషయాలు ఉపయోగపడతాయి. ప్రశ్న పత్రాలు తయారు చేసేవారు క్రింది విషయాలను దృష్టిలో ఉంచుకోవాలి.

(i) ప్రశ్న పత్రము చాలా పెద్దదిగా ఉండరాదు. కావలసిన విషయాలకు చెందిన ప్రశ్నలన్నీ అసందిగ్ధముగా ఉండాలి.

(ii) ఉత్సాహముతో సమాధానాలు ఇచ్చేటట్లు ప్రశ్నలుండాలి.

(iii) ప్రశ్నలు క్లుప్తముగాను, ద్వంద్వార్థాలు లేకుండాను ఉండాలి. సాధ్యమైనంత వరకు సమాధానము " అవును " ," కాదు " వచ్చేటట్లు ప్రశ్నలు తయారు చేయాలి.

(iv) పరిశీలించే విషయానికి తగినట్లుగా ప్రశ్నల సంఖ్య ఉండాలి.

(v) ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వటానికి తగిన సూచనలు ఈయాలి. సమాధానాలు ఇవ్వటంలో తప్పులు జరుగకుండా ఉండడానికి ఈ సూచనలు తోడ్పడాలి.

(vi) సమాధానము యొక్క యదార్థత ప్రమాణము నిర్దేశింపవలెను. (అంటే సమాధానము రూపాయిలలో కాని, సంవత్సరములలో కాని, లేదా నెలలో కాని, లేదా పైసలలో కాని సవరించి ఈయవలె).

(vii) ప్రశ్న పత్రము తయారు చేసిన తరువాత, ముందుగా 10 మంది వ్యక్తులకు ఈ పత్రాలు పంచిపెట్టి వారి ప్రభావము తెలుసుకొని, అవసరమైన మార్పులు ప్రశ్నపత్రములో చేసి అప్పుడు ఏజంట్లకు ఈయాలి.

16.3.2 గౌణ దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు (Methods of Collection of Secondary Data)

సాంఖ్యక దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి అన్ని పరిస్థితులలోను పర్యటలు జరుపనవసరము లేదు. కొన్ని సందర్భాలలో పరిశీలనకు ఉపయోగపడే దత్తాంశాన్ని, సాంఖ్యక దత్తాంశాలను సేకరించే సంస్థల రికార్డుల నుంచి కూడా పొందవచ్చు. ఈ సంస్థలు, ముఖ్యంగా ప్రభుత్వ సంస్థలు, దత్తాంశాలను సేకరించి పొందుపర్చడానికి నియోగించబడినాయి. కనక వీటిని ఉపయోగించుకోవచ్చు. ఈ ప్రభుత్వ సంస్థలే కాకుండా, ప్రభుత్వేతర వ్యాపార సంస్థలు, మునిసిపాలిటీలు, రైల్వేలు మొదలైనవి కూడా వాటి పరిధులకు సంబంధించిన దత్తాంశాలను సేకరించి, పొందుపరుస్తారు.

టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యను, వారమునకొకసారి, ఎగుమతి, దిగుమతులను నెలకొకసారి, పరిశ్రమలలో ఉత్పత్తి సంవత్సరమునకొకసారి, ఈ విధముగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ఆయా సంస్థల వారు నిర్ణీత కాలాలలో ప్రచురిస్తూ ఉంటారు. జాతీయ ఆదాయము (National Income) కమిటీ వారి రిపోర్టులను, టారిఫ్ సంఘం రిపోర్టులు మొదలైన ప్రత్యేక " సాంఖ్యక దృగ్విషయము " (Statistical Phenomenon) కల దత్తాంశాలను ఒక నిర్ణీత కాలము కాకుండా, విభిన్న కాలాలలో ప్రచురిస్తూ ఉంటారు.

ఈ రకమైన సంస్థలు సేకరించిన దత్తాంశాల నుంచి పరిశీలన కోసం ఎన్నుకోబడు దత్తాంశాన్ని ద్వితీయ లేదా గౌణ దత్తాంశము (Secondary Data) అంటారు.

16.4 దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం

16.4.1 ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం

ప్రశ్న పత్రములోని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాసిన తర్వాత, పోస్టు ద్వారా కానీ, ఏజంట్ల ద్వారా కానీ పరిశీలకునికి ఆ ప్రశ్న పత్రములన్నీ పంపుతారు. వీటిన్నిటినీ ముందుగా పరిశీలకుడు పరిష్కరణ చేయాలి. ఈ పరిష్కరణ చేసేటప్పుడు ప్రశ్న పత్రములోని సమాధానాలలో లోపం గాని, నిలకడ లేకపోవడం గాని ఉంటే దొరుకుతాయి. ఈ రకంగా కొన్ని తప్పులున్న ప్రశ్న పత్రాలను తిరిగి పంపి సరిచేయించుటకాని, లేదా తనే సరిచేయుటకాని లేదా ఆ ప్రశ్న పత్రాన్ని తొలగించుట కాని చేస్తారు. సమాధానాలలో ఎక్కువ లోపాలున్న ప్రశ్న పత్రాన్ని తొలగించుటం మంచిది. అయితే ఇటువంటి పరిస్థితిలో ముఖ్యమైన మరొకరి గురించి ఆ ప్రశ్న పత్రంలోని సమాచారాన్ని వదులుకుంటున్నాము. మరికొన్ని ప్రశ్న పత్రాలలో సమాధానాలు ఏకరూపంగా ఉండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు వయస్సుకు కొందరు సంవత్సరాలలోను మరికొందరు సం॥ రాలు, నెలలలోను కూడా ఇస్తారు. దీనికి కారణము, కాలము యొక్క యూనిట్‌ను స్థిరంగా నిర్ణయం చేయక పోవడమేనని గుర్తించి, సమాధానాలు ఏకరూపంగా ఉండేందుకు యూనిట్లను నిర్ణయించాలి. అందువల్ల పనులలో ఉన్న ఉద్యోగులు నిష్పాక్షికంగా, శాస్త్రీయంగా నేర్పుకలవారై ఉండాలి.

16.4.2 ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం

ద్వితీయ దత్తాంశం నుండి దత్తాంశ సేకరణ జరుపునపుడు

(i) దత్తాంశాన్ని ఏ సందర్భంలో సంస్థ సేకరించింది ?

(ii) దత్తాంశము నిష్పాక్షికమైనదా, కాదా ?

(iii) దత్తాంశము ఏ యూనిట్లలో ఈయబడినది ?

(iv) సజాతీయ పరిస్థితులలో దత్తాంశ సేకరణ జరిగిందా ? లేదా ?

(v) దత్తాంశపు యదార్థత మొదలైన విషయాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని చేయాలి.

16.5 జనాభా పద్ధతి, ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి

16.5.1 జనాభా పద్ధతి (census Method)

సామాన్య లక్షణాలలో ఉన్న అంశాల సముదాయాన్ని ' జనాభా ' లేదా ' సమిష్టి ' అని నిర్వచించవచ్చు. గణాంక విచారణకై జనాభా అంతటిని పరిశీలించి, జనాభా లక్షణాలను నిర్ణయించే పద్ధతిని ' జనాభా పద్ధతి ' లేదా సమిష్టి పద్ధతి అంటారు.

ఉదాహరణకు, జనాభా పద్ధతి ద్వారా భారతదేశ ప్రజల నెలసరి ఆదాయాన్ని తెలుసుకోవాలను కొందాము. మొదట భారతదేశంలోని ప్రతి పౌరుని నెలసరి ఆదాయాన్ని గణించి, వాటి ద్వారా భారతదేశ ప్రజల నెలసరి ఆదాయాన్ని నిర్ణయించవలసి వుంటుంది. అలాగే ఒక విశ్వవిద్యాలయంలోని విద్యార్థుల మార్కులను తెలుసుకోవడానికి ఈ పద్ధతిని అవలంబిస్తే ఆ విశ్వవిద్యాలయంలోని ప్రతి విద్యార్థి మార్కులను తెలుసుకోవలసి ఉంటుంది.

BRAOU

ఈ పద్ధతి ద్వారా తీసుకొన్న నిర్ణయాలు ఖచ్చితంగా ఉండి ప్రతి అంశాన్ని ప్రతిబింబింపచేస్తాయి. కాని ఈ పద్ధతి ప్రయోగ పూర్వకంగా చాలా వ్యయ ప్రయాసలతో కూడి ఉంటుంది. పరిమిత సమయంలో నిర్ణయాలు తీసుకోవల్సిన సందర్భాలలో ఈ పద్ధతి అనుకూలం కాదు. జనాభా అపరిమితమైనప్పుడు , ఈ పద్ధతి ద్వారా చేసిన గణాంక విచారణ విశ్వసనీయమైనదని చెప్పలేము.

16.5.2 ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి (Sampling Method)

సమిష్టి లేదా జనాభా మొత్తం నుంచి కొన్ని అంశాలను శాస్త్ర పద్ధతుల ద్వారా ఎంచుకొని, వాటి పరిశీలన ద్వారా వెలువడిన ఫలితాలనాధారంగా జనాభాను గురించిన నిర్ణయాలు రూపొందించే పద్ధతినే 'ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ' అని అంటారు.

ప్రతి రూపమంటే విచారణ కోసం సమిష్టి నుంచి ఎన్నుకొన్నభాగము. ఉదాహరణకు, ప్రజాస్వామ్య దేశాలలో దేశంలోని ప్రజలందరు పరిపాలించడానికి బదులుగా, ఆ ప్రజలు ఎన్నుకొన్న కొంతమంది ప్రజా ప్రతినిధులు మాత్రమే పరిపాలిస్తారు. ఇక్కడ మొత్తం ప్రజలను సమిష్టిగాను, పరిపాలన కోసం ఎన్నుకొన్న ప్రజా ప్రతినిధులను ఈ సమిష్టి నుంచి గ్రహించిన ప్రతిరూపంగాను భావించాల్సి ఉంటుంది. అట్లాగే ఒక వర్తకుడు తాను కొనబొయ్యే ధాన్యాన్ని పరిశీలించటానికి, మొత్తం ధాన్యాన్ని పరిశీలించే బదులు పిడికెడు ధాన్యాన్ని పరిశీలిస్తే సరిపోతుంది కదా !

16.6 తిరిగి చేర్చే మరియు తిరిగి చేర్చని ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి (Sampling with and without Replacement)

సమిష్టి నుంచి ఒక అంశాన్ని గ్రహించిన తరువాత రెండవ అంశాన్ని గ్రహించేటప్పుడు, ముందు గ్రహించిన అంశాన్ని సమిష్టిలో కలిపివేయడానికి, కలపకపోవడానికి అవకాశం ఉంటుంది. ఒక అంశాన్ని గ్రహించేటప్పుడు అంతకు ముందు గ్రహించిన అంశాన్ని సమిష్టిలో కలపకపోతే, అది తరువాత ఎన్నిక చేసిన ప్రతిరూపంలో మళ్లీ రావడానికి అవకాశం లేదు. అంటే ఈ పద్ధతిలో ఒక అంశం ఒక్కసారే వస్తుంది. సమిష్టి నుంచి ప్రతిరూపాన్ని గ్రహించేటప్పుడు, ప్రతిరూపం లోని అంశాలు ఒక్కొక్కటి ఒక్కొక్కసారే వస్తే, ఆ ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతిని ' తిరిగి చేర్చని ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ' (sampling without replacement) అంటారు. అట్లా కాకుండా, ముందు గ్రహించిన అంశాన్ని సమిష్టిలో కలిపివేసిన తరువాత మళ్ళీ ఒక అంశాన్ని గ్రహిస్తే అది ముందు గ్రహించిన అంశమైనా కావచ్చు లేదా వేరొక అంశమైనా కావచ్చు. అందుచేత ఈ పద్ధతిలో ఒకే అంశం ఎన్నిసార్లయినా రావడానికి ఆస్కారం ఉంటుంది. ఈ విధంగా సమిష్టి నుంచి ప్రతిరూపాన్ని గ్రహించేటప్పుడు, ఒక అంశము ఒకేసారి కంటె ఎక్కువ సార్లు వస్తే, ఆ ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతిని ' తిరిగి చేర్చే ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ' (sampling without replacement) అంటారు.

జనాభా నుంచి ప్రతి రూపాన్ని తిరిగి చేర్చే ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ద్వారా గ్రహిస్తే, ఆ జనాభాను సైద్ధాంతికంగా అపరిమిత జనాభాగా భావిస్తారు.

16.7 ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ప్రయోజనాలు

1. గణాంక విచారణకయ్యే ఢబ్బు కాని, సమయము కాని శ్రమ కాని జనాభా పద్ధతిలో కంటె ఈ పద్ధతిలో చాలా స్వల్పము.

2. జనాభా మొత్తానికి బదులుగా ప్రతిరూపాన్ని మాత్రమే గణించటం చాలా సులభము.

BRAOU

3. తగిన శాస్త్ర పద్ధతి ద్వారా ఎన్నుకొని విశ్లేషించిన అంశాల విశ్వసనీయతను తెలుసుకోవచ్చు.

4. గణాంక విచారణ చేసే గణకులు, ఈ పద్ధతితో చేస్తే కొద్ది మందితో సరిపోతుంది. అందుచేత ఆ కొద్ది మందికి తగిన శిక్షణ యిచ్చి, విచారణ నిర్వహించవచ్చు. అప్పుడు వారి విచారణ ఫలితాల విశ్వసనీయత, సమర్థత ఎక్కువగా ఉంటుంది.

5. జనాభా పద్ధతిలో కంటె ఈ పద్ధతిలో చాలా తక్కువ సమయము సరిపోతుంది. గణాంక విచారణలో సమయానికి గల ప్రాధాన్యత మనకు తెలిసినదే కదా !

6. చాలా సందర్భాలలో జనాభా పద్ధతి ద్వారా గణాంక విచారణ కుదరక పోవచ్చు. ఉదాహరణకు, వివిధ రకాల బల్బుల ఆయుర్దాయాన్ని విశ్లేషించే జనాభా పద్ధతిలో ప్రతి బల్బును కాల్చివేయాలి. ప్రతి రూప గ్రహణ పద్ధతిలో ఈ విధమైన యిబ్బందులెదురవవు.

అయితే, ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతిలో, జనాభా పద్ధతిలోవలె ఖచ్చితమైన విలువను పొందలేకపోవచ్చు. ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ద్వారా తీసుకొన్న విశ్లేషణలు సమిష్టిలోని ప్రతి అంశాన్ని ప్రతిబింబించవు. ప్రతిరూప పరిమాణము పెరుగుతున్నకొద్దీ ఈ పద్ధతి ప్రకారం అంచనా వేసిన విలువ జనాభా పద్ధతిలోని విలువను సమీపిస్తూ ఉంటుంది.

16.8 జనాభాల రకాలు

జనాభాను దాని లక్షణాలను బట్టి పరిమిత జనాభా, అపరిమిత జనాభా, యథార్థ జనాభా, పరికల్పిత జనాభావంటి వివిధ రకాలుగా విభజించవచ్చు.

16.8.1పరిమిత జనాభా (Finite Population)

జనాభాలో ఉన్నటువంటి అంశాల సంఖ్య నిర్ణీతముగా ఉన్నప్పుడు అటువంటి జనాభాను " పరిమిత జనాభా" అంటారు. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులు, ఒక చెట్టుకు కాసిన పండ్లు ఒక పట్టణంలో నివసించే ప్రజలు, పరిమిత జనాభాకు ఉదాహరణలు.

16.8.2 అపరిమిత జనాభా (Infinite Population)

జనాభాలోని అంశాల సంఖ్య అనంతంగా ఉన్నప్పుడు, అటువంటి జనాభాను " అపరిమిత జనాభా " అంటారు. ఆకాశంలోని నక్షత్రాలను అపరిమిత జనాభాకు ఉదాహరణగా చెప్పవచ్చు. అపరిమిత జనాభాలో సమిష్టి పద్ధతి పనిచేయదు. ఎందుకంటే ఆకాశంలోని నక్షత్రాలను లెక్కించలేము కదా !

16.8.3 యదార్థ జనాభా (Existent Population)

జనాభాలోని అంశాలను " యదార్థమైన జనాభా " అంటారు. సమూహములోని వ్యక్తుల ఆదాయాలు, తరగతిలోని విద్యార్థుల పొడవులు యదార్థ జనాభాకు ఉదాహరణలు.

16.8.4 పరికల్పిత జనాభా (Hypothetical Population)

జనాభాలోని అంశాలు యదార్థాలు కాకుండా, కేవలము కల్పించినవయితే ఆ జనాభాను " పరికల్పిత

BRAOU

జనాభా " అంటారు. ' వరుసగా మూడు బొమ్మలు వచ్చేవరకు నాణాన్ని ఎగరవేయటం ' ద్వారా కల్పించిన జనాభాను పరికల్పిత జనాభాకు ఉదాహరణగా చెప్పవచ్చు. వరుసగా మూడు బొమ్మలు వచ్చే వరకూ నాణెము ఎగురవేస్తూపోతే అటువంటి ఎగురవేతలు అనంతము. వాటినన్నిటిని మనము ప్రయత్నింపలేము కాని కొన్ని విషయాల పరిశీలనకోసం అటువంటి ఎగురవేతల లోకొన్ని గురించి ఆలోచించ వలసిన అవసరము కలుగుతుంది. పాచికలను అనేకసార్లు దొర్లిస్తే రాగల జనాభా, పరికల్పిత జనాభాకు మరో ఉదాహరణ. కొత్తగా వచ్చిన ఉపాధ్యాయుని ఉపన్యాసాన్ని విని, ఆయన ఇక ముందు ఇచ్చే అనేక ఉపన్యాసాలను గురించి విద్యార్థులు నిర్ణయించుకోవటం మనకు తెలిసినదే.

16.9 ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతులు

జనాభా నుంచి ప్రతిరూపాన్ని సాధారణంగా రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఎంచుకోవడం జరుగుతుంది. అవి (1) ఉద్దేశ పూర్వక ప్రతిరూప గ్రహణము (2) యాదృచ్ఛిక లేదా సంభావ్యతా ప్రతిరూప గ్రహణము.

16.9.1 ఉద్దేశపూర్వక ప్రతిరూప గ్రహణము

ఈ పద్ధతిలో విచారణకర్త తన వివేచనా దృష్టిని ఉపయోగించి, తాను ప్రాతినిధ్య అంశాలుగా భావించిన వాటిని ప్రతిరూపంగా తీసుకొంటాడు. కాని ఈ ప్రతిరూపం మొత్తం జనాభాను ప్రతిబింబింపచేయదు. పైగా విచారణ కర్త నిష్పాక్షికతతో యితర ప్రభావాలకు లోనుకాకుండా అంశాలను ఎంచుకొన్నప్పుడే ఈ పద్ధతిలో గ్రహించిన ప్రతిరూపము జనాభాకు సరియైన ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. పోతే విచారణ కర్త ఎప్పుడూ యిట్లా వ్యవహరిస్తాడని చెప్పలేము. కనక ఉద్దేశపూర్వక ప్రతిరూప గ్రహణ తృప్తికరమైన పద్ధతి కాదని చెప్పవచ్చు.

అయితే విచారణ కర్త సమర్థుడు, నిష్పాక్షిక బుద్ధి కలవాడు అయినప్పుడు మనము తీసుకొనే నిర్ణయాల కోసం విచారణ చేయవలసిన అంశాలలో అంత సమర్థత, విశ్వసనీయత అవసరం లేనప్పుడు ఈ పద్ధతి వాడవలసిన అవసరం కలగవచ్చు.

16.9.2 యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప గ్రహణము (Random Sampling)

ప్రతిరూపాన్ని ఉద్దేశపూర్వకంగా కాకుండా, యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకనే పద్ధతిని, ' యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి ' అని అంటారు. ఈ పద్ధతిలో ప్రతిరూపంగా ఎంచుకోవడానికి ప్రతి అంశానికి సమానావకాశము కాని, శాస్త్ర పద్ధతుల ప్రకారము నిర్ణయించిన నిర్ణీత అవకాశము కాని ఉంటుంది. అంశాల ప్రాతినిధ్యానికి , వ్యక్తి పాక్షికతకు ఈ పద్ధతిలో అవకాశము ఉండదని చెప్పవచ్చు.

సమిష్టి నుంచి ప్రతిరూపాన్ని యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకోవడానికి వాడే పద్ధతులలో కొన్ని క్రింద ఇచ్చినాము.

(a) లాటరీ పద్ధతి (Lottery Method)

ఈ పద్ధతి ద్వారా N మంది ఉపాధ్యాయుల నుంచి n మందిని ఎంచుకోవాలనుకొందాము. ఆ N మందికి క్రమసంఖ్యల నిచ్చి, వాటికి ఒకే పరిమాణము గల N చీటీలపై వ్రాసి, ఒకే విధంగా మడిచి, బాగా కలుపుతారు. తరువాత వాటి నుంచి n చీటీలను బయటికి తీస్తారు. ఆ n చీటీలలోని క్రమసంఖ్యలు గల ఉపాధ్యాయులు, N మంది ఉపాధ్యాయుల యొక్క యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపంగా లెక్కిస్తారు. అయితే జనాభా చిన్నదిగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఈ పద్ధతి సులభ సాధ్యమవుతుందని గమనించాలి. అప్పుడుకూడా ఒకే పరిమాణముగల ఎన్నో కాగితాల మీద వ్రాసి, వాటిని బాగా కలపటం అంత సులభము కాదు.

BRAOU

అలాగే యింకొక ఉదాహరణ తీసుకొందాం. ఒక పట్టణంలోని ఉన్నత (higher) మాధ్యమిక (middle), అల్ప (lower) ఆదాయ వర్గాలుగల ఒక జనాభా యొక్క సగటు ఆదాయము కనుక్కోవలెనంటే ప్రతి రూపాన్ని గ్రహించడానికి అనిబద్ధమైన యాదృచ్ఛిక పద్ధతి ఉపయోగపడదు. పైన తెలిపినట్లు ప్రతిరూపము జనాభాకు తగిన ప్రాతినిధ్యం వహించవలెనంటే నిబద్ధమైన యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతే అవలంబించవలసి వుంటుంది.

వివిధ ఎంపిక పద్ధతుల ద్వారా ప్రతి రూపాలను గ్రహించడం జరుగుతుంది. ఈ పద్ధతులను అవలంబించడంలో ముఖ్యోద్దేశము ప్రతిరూపాన్ని జనాభాకు సరైన ప్రాతినిధ్యం వహించేటట్లు చేసి ఫలితాలలో ఎక్కువ సూక్ష్మతను సాధించడమే. ఈ పద్ధతులలో ముఖ్యమైనవి.

1. స్తరిత ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి

   (Stratified Sampling)

2. గుచ్ఛ ప్రతిరూప గ్రహణపద్ధతి

   (Cluster Sampling)

3. క్రమ ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి

   (Systematic Sampling)

16.10 ప్రతిరూపాన్ని గ్రహించుటలోని ఉద్దేశాలు (Objectives of Sampling)

1. ప్రతిరూపము ద్వారా తక్కువ వ్యయ ప్రయాసలతో తక్కువ సమయంలో వీలైనంత ఎక్కువ సమగ్రంగా జనాభా లక్షణాలను ప్రతిబింబింపచేయుటం.
2. ప్రతిరూపము ద్వారా వేసిన అంచనాల విశ్వసనీయతను నిర్ణయించటం.

ఒకే జనాభా నుంచి పారంపర్య ప్రతిరూపాలు గ్రహించి, వాటి ఫలితాలను పోల్చి చూసుకొని గాని, యింతకు ముందు నిర్వహించిన జనాభా పద్ధతివల్ల వచ్చిన ఫలితాలను ప్రతిరూపం ద్వారా సరిచూసి గాని ఈ విశ్వసనీయతను నిర్ణయించవచ్చు.

B R A O U

16.11 ప్రతిరూప గ్రహణ సిద్ధాంతము (Theory of Sampling)

ప్రతిరూపం ద్వారా ఉత్పన్నం చేసిన నిర్ణయాలు ఖచ్చితమైనవి కాకుండా సంభావ్యతల రూపంలో ఉంటాయి. ఇట్లా ఉత్పన్నం చేసిన అంచనాలకు, సమిష్టిలో అంచనాల యదార్థ విలువలకు ఎంతో కొంత వ్యత్యాసము ఉంటుంది. ఈ వ్యత్యాసానికి అవధులు నియమించి లోకపరామితులకోసం వేసిన అంచనాల సూక్ష్మతను నిర్ణయించడమే ప్రతిరూప గ్రహణ సిద్ధాంత ముఖ్యోద్దేశము.

నాణాలు ఎగరవేయడము, పాచికలు దొర్లించడము వంటి ప్రయోగాలలో కూడా అనేక స్వతంత్ర, యాదృచ్ఛిక శక్తుల ప్రభావము వల్ల రెండోసారి దొర్లించిన పాచికల ఫలితాలు మొదటిసారి దొర్లించిన పాచికల ఫలితాలవలనే ఉండనక్కరలేదు. అట్లాగే, ఒకే జనాభా నుంచి గ్రహించిన రెండు ప్రతి రూపాల ఫలితాలు ఒకే

విధంగా ఉంటాయని చెప్పలేము. అంటే ఒకే జనాభా నుంచి గ్రహించిన పారంపర్య ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమం,క్రమ విచలనం మొదలైన గణాంక మానాలలో ఎంతో కొంత తేడా ఉండవచ్చు.

16.12 ప్రతిరూప దోషాలు (Sampling Errors)

సమిష్టి మానాలకు, ప్రతిరూపం ద్వారా గణించిన వాటి అంచనాలకు మధ్య ఉండే బేధాన్ని సూచించడానికి పరామితులు, గణాంకాలు సహాయపడతాయి.

జనాభాల గణాంక మానాలకు పరామితులని, ప్రతిరూపాల ద్వారా గణన చేసిన వాటి అనురూప అంచనాలను గణాంకాలని అంటారు. గణాంకము ప్రతిరూప అంశాల ప్రమేయము (function).

జనాభా యొక్క అంక మధ్యమం, క్రమ విచలనం మొదలైనవి పరామితులకు ఉదాహరణలు. జనాభాలోని ప్రతి అంశాన్ని గణనలోకి తీసుకొని, వీటిని కనుక్కోవడం జరుగుతుంది. కనుక పరామితులు ఎప్పుడూ స్థిరంగా ఉంటాయి. గణాంకాలు ప్రతి రూపాన్ని అనుసరించి మారుతూ ఉంటాయి. సాధారణంగా ఒక ప్రతిరూపంలోని అంశాలు వేరొక ప్రతిరూపంలోని అంశాలను పోలి వుండవు. కనక ప్రతిరూపంలోని అంశాలను అనుసరించి మారుతూ వుంటాయి. పరామితులకూ, గణాంకాలకు మధ్య ఉండే బేధాలను ప్రతిరూప దోషాలు అంటారు.

ప్రతిరూపము సమిష్టి లక్షణాలను ప్రతిబింభింప జేయవలెనంటే ప్రతిరూప దోషాన్ని సాధ్యమైనంత స్వల్ప పరిమాణానికి తగ్గించవలెను. ప్రతిరూప దోషాన్ని తగ్గించవలెనంటే ప్రతిరూప పరిమాణాన్ని పెంచవలెను. ప్రతిరూప పరిమాణం ఎంత ఎక్కువగా ఉంటే దాని ఫలితాలు కూడా అంత ఎక్కువ విశ్వసనీయతతో ఉంటాయి. పోతే ప్రతిరూపాన్ని పాక్షికతతో ఎంచినప్పుడు, ప్రతిరూప పరిమాణము ఎంత పెద్దదైనా, అది సమిష్టిలోని అన్ని అంశాలను ప్రతిబింభింపచేయలేక పోవచ్చు. అందుచేత ప్రతిరూపాన్ని యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుతూ, పరిమాణాన్ని పెంచవలెను.

BRAOU

16.13 వర్గీకరణ పద్ధతులు

a. అమరిక

సంఖ్యా విలువలను వాటి పరిమాణాన్ని బట్టి ఆరోహణ (ascending) లేదా అవరోహణ (Descending) క్రమంలో ఏర్పాటు చేసే పద్ధతిని అమర్చడం లేదా అమరిక అంటాము. ఈ అమరిక పద్ధతివల్ల దత్తాంశంలోని కనిష్ఠ, గరిష్ఠ విలువల గురించి తెలుసుకోవడమే గాక దత్తాంశ విలువల విస్తరణ (dispersion) క్రమమూ, ఏ అంశం వద్ద విలువలు ఏ విధంగా కేంద్రీకృతమయినదీ కొంతవరకు గ్రహించవచ్చు.

పట్టిక 16.1 : 1 70 మంది విద్యార్థుల బరువులు (కిలో గ్రాములలో)

47,	51,	23,	40,	57,	56,	38,	59,	50,	21,	56,	63,	40,	30,	43
52,	46,	24,	38,	22,	64,	27,	40,	53,	51,	23,	62,	27,	48,	39
40,	57,	44,	22,	59,	32,	26,	58,	34,	57,	40,	58,	28,	65,	34
54,	27,	61,	45,	29,	38,	56,	35,	55,	26,	23,	38,	46,	48,	40
33,	40,	49,	32,	22,	38,	25,	38,	40,	43					

అమెరిక పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని ఏ మాత్రం సంక్షిప్తకరించడం ఒక క్రమంలో ఏర్పాటు చేసిన దత్తాంశాన్ని పట్టిక 16.2 రూపంలో కొంత వరకు తగ్గించి వ్రాయడం తెలుసుకొందాం.

పట్టిక 16.2

(x) బరువులు	గణచిహ్నాలు (Tally Marks)	విద్యార్థుల సంఖ్య	(x) బరువులు	గణచిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
21	1	1	44	1	1
22	111	3	45	1	1
23	111	3	46	11	2
24	1	1	47	1	1
25	1	1	48	II	2
26	11	2	49	1	1
27	111	3	50	1	1
28	1	1	51	11	2
29	1	1	52	1	1
30	1	1	53	1	1
32	11	2	54	1	1
33	1	1	55	1	1
34	11	2	56	111	3
35	1	1	57	111	3
38	~~1111~~ 1	6	58	11	2
39	1	1	59	11	2
40	~~1111~~ 111	8	61	1	1
43	11	2	62	1	1
			63	1	1
			64	1	1
			65	1	1
					70

BRAOU

నిలువుగీత (1) గుర్తుని గణచిహ్నమని (tally mark) అంటారు. ప్రతి ఒకసారి వచ్చే విలువ కెదురుగా ఒక మార్కుతో సంకేతిస్తాము. ఒక × విలువకెదురుగా గీయవలసిన ప్రతి ఐదో గణచిహ్నాన్ని ముందు గీసిన నాలుగు గణ చిహ్నములను ఖండించునట్లుగా ఒక అడ్డగీత ( ) ఇట్లా గీస్తాము. అంటే ~~1111~~ అని సంకేతిస్తాము. ~~1111~~ అన్న సంకేతం ఆ × విలువ ఐదుసార్లు వచ్చినట్లుగా సూచిస్తుంది.

బరువును × చలరాశి అని (variable), ప్రతి × విలువ కెదురుగా రాసిన సంఖ్యను ఆ × కు సంబంధించిన పౌన:పున్యమనీ (frequency) అంటాము. గణాంక పరిశోధన కవసరమైన దత్తాంశ సేకరణ మరియు సవరణ జరిగిన తరువాత గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడు ముందుగా చేయవలసిన పని యేమంటే సేకరించిన సమాచారాన్ని సరియైన విధంగా వర్గీకరించడం. దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించేటపుడు గణాంక పరిశోధకుడు తన పరిశోధనా లక్ష్యాన్ని దత్తాంశంలోని ముఖ్య లక్షణములను మరియు సేకరించిన దత్తాంశాన్ని వేరే సమాచారంతో పోల్చడం వంటి అంశాలను గుర్తుంచుకోవాలి.

దత్తాంశ వర్గీకరణ అంటే దత్తాంశాన్ని సజాతీయ లక్షణాలు కల వర్గాలుగా విభజించడమే. Secrist నిర్వచించినట్లుగా దత్తాంశ వర్గీకరణ అంటే దత్తాంశంలోని అంశాలను వాటి సారూప్యతలను బట్టి కొన్ని తరగతులుగా ఏర్పరచడంగాని వాటి విభేదములను బట్టి కొన్ని వర్గాలుగా విభజించడాన్ని గాని వర్గీకరణ అని చెప్పవచ్చు. వర్గీకరణ అనేది ప్రాథమికంగా దత్తాంశ స్వభావాన్ని బట్టి మరియు విచారణ లక్ష్యాన్ని బట్టి ఉంటుంది. ఉదా॥ కు కుటుంబాల గురించి సేకరించిన దత్తాంశమయితే, కుటుంబాలను, వయస్సును బట్టి మతం ఆధారంగా గాని, విద్యాస్థాయి లేదా ఆదాయ వినియోగ స్థాయిలను బట్టిగాని వేరు వేరు సమూహముగా విభజించవచ్చు.

BRAOU

b. వర్గీకరణ ఉద్దేశాలు

(1) దత్తాంశ సంక్షిప్తీకరణ : పరిశోధనా క్రమంలో పెద్ద మొత్తంలో సేకరించిన దత్తాంశము చాలా విభిన్నంగా ఉండడం చేత దాన్ని అర్థం చేసుకోవడంగాని దత్తాంశ ప్రాధాన్యాన్ని గుర్తించడంగాని చాలా కష్టమైన పని. ఉదాహరణకు Census ద్వారా సేకరించిన బృహద్దత్తాంశం విద్య, వృత్తి, ఆదాయం మొదలగు లక్షణాల ఆధారంగా వర్గీకరించనిదే జనాభా నిర్మాణంగాని స్వభావంగాని మనకు అర్థంకావు.

2) దత్తాంశంలో ఉన్న వివిధ అంశాల సారూప్యతను మరియు బేధాలను తెలుసుకోవడం వర్గీకరణ ద్వారా దత్తాంశంలోని ఒక రకమైన సంబంధం కలిగి వున్న అంశాలను మరియు వైవిధ్యం ఉన్న అంశాలను తెలుసుకోగలుగుతాము.

3) వివిధ చలాంకాల (variables) మధ్య సంబంధం వర్గీకరించిన దత్తాంశం ద్వారా ఏ ఏ చలాంకాల మధ్య ఎటువంటి సంబంధం ఉన్నదో కొంతవరకు అవగాహన చేసుకొనవచ్చు.

4) గణాంక పట్టికలను తయారు చేయడానికి ముందు వర్గీకరణ అవసరము.

C. వర్గీకరణ సూత్రములు (నియమములు)

1) వర్గీకరణ అనే సేకరించిన దత్తాంశంలోని ప్రతి అంశానికి ఎక్కడో ఒకచోట స్థానం కల్పించేదిగా ఉండాలి. ఉదాహరణకు సాధ్యమైనంత వరకు " మిగిలిన అంశాల " కంటె ఎక్కువ, లేదా వాటి కంటె తక్కువ అంశాలు అనేవి రాకుండా చూసుకోవలెను.

2) ఒక తరగతిలో చేరిన అంశం ఇంకొక తరగతిలోనికి రాకుండా వర్గీకరణ తరగతులు ఉండాలి.

3) వర్గీకరణ పద్ధతి అనేది విచారణ ముఖ్యోద్దేశానికి అనుగుణంగా ఉండాలి. ఉదాహరణకు శ్రామికుల వేతనాల స్థాయి గురించి అధ్యయనం చేసేటప్పుడు శ్రామికులను వారి మతం ప్రాతిపదికగా వర్గీకరిస్తే ప్రయోజనం శూన్యం.

4) ఒక తరగతిలో చేర్చే అంశాలన్నీ ఒక రకమైన సారుప్యతను కలిగి వుండాలి.

5) అవసరమైనపుడు కావలసిన మార్పులు చేయడానికి అనువుగా సరళంగా ఉండాలి.

d. వర్గీకరణ పద్ధతులు

దత్తాంశాన్ని వివిధ వర్గాలుగా లేదా తరగతులుగా విభజించడం అనేది ముఖ్యంగా నాలుగు రకాలుగా ఉంటుంది.

1) **భౌగోళిక వర్గీకరణ :** దత్తాంశాన్ని ప్రాంతాల వారీగా అంటే రాష్ట్రాలు, జిల్లాలు లేదా పట్టణ గ్రామీణ ప్రాంతాలు, లేదా ఉష్ణ మండల లేదా శీతల మండల ప్రాంతాలు మొదలైన భౌగోళిక లక్షణాల ఆధారంగా వర్గీకరించడం.

2) **కాలానుగుణ లేదా చారిత్రక వర్గీకరణ (Chronological or Historical Classification) :** అంశాలు సంభవించిన కాలాన్ని బట్టి వర్గీకరించడం.

3) **గుణాత్మక వర్గీకరణ (Qualitative Classification) :** అంశాలకుండే వివిధ లక్షణాలను బట్టి ఉదా : విద్య మొదలగు లక్షణాలను బట్టి వివిధ తరగతులుగా వర్గీకరించడం.

4) **పరిమాణాత్మక వర్గీకరణ :** ఒక చలాంకానికి సంబంధించిన వివిధ అంశాలను వాటి పరిమాణ విలువలను బట్టి వర్గీకరించడం. ఉదా : చిన్న రైతులు, పెద్ద రైతులు, భారీ పరిశ్రమలు, చిన్న తరహా పరిశ్రమలు మొ ॥.

16.14 చలాంకము (Variable)

గణాంక పరిభాషలో కలవడానికి అనుగుణమైన ఏదైనా ఒక లక్షణాన్ని చలాంకము అనవచ్చు. అంటే ఒక పరిధిలోని ఏ పరిమాణమైనా చలాంకము విలువ కావచ్చు. ఉదా : వయస్సు, ఆదాయం, బరువు, ఉత్పత్తి, పెట్టుబడి.

(a) విరళ చలాంకము (Discerete Variable)

చలాంకపు వైయక్తిక విలువల మధ్య ఖచ్చితమైన భేదం వున్నపుడు అట్లాంటిదాన్ని విరళ చలాంకం అంటారు. ఉదా : ఒక నగరంలోని ఇండ్లు, ఒక కుటుంబంలోని పిల్లల సంఖ్య, ఒక తరగతిలోని పిల్లల సంఖ్య.

(b) అవిరళ చలాంకము (Continuous Variable)

ఏదైనా రెండు సమీప విలువల మధ్య భేదం ఎంత స్వల్పం అయినప్పటికీ వాటి మధ్య చలాంకపు విలువలు వున్నట్లయితే అట్లాంటి దాన్ని అవిరళ చలాంకము అంటారు. ఉదా : ఎత్తు, బరువు, ఉష్ణోగ్రత.

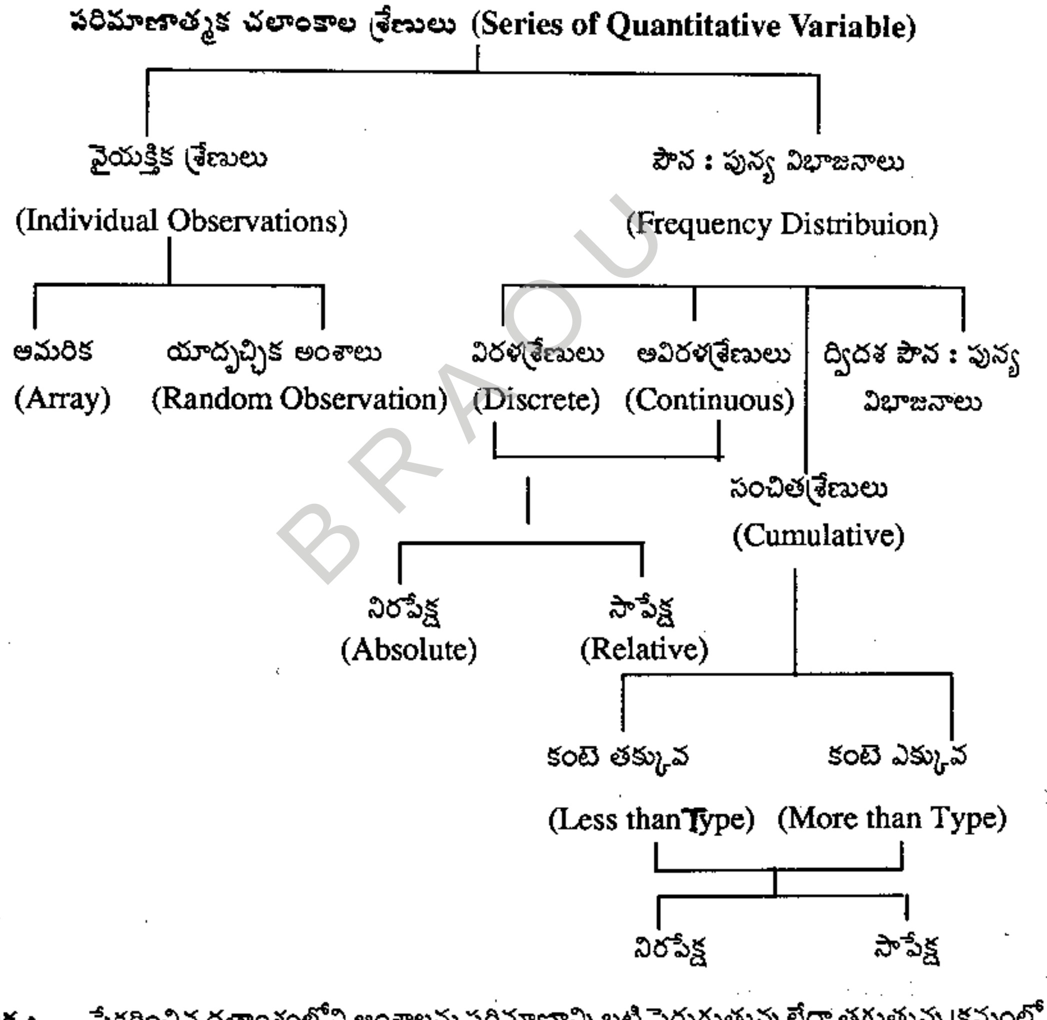
BRAOU

16.15 గణాంక శ్రేణులు (Statistical Series)

ఒక క్రమంలో సంభవించే సంఘటనలు, లేదా వాటి విలువలు లేదా ఒక చలాంకానికి సంబంధించిన అనేక విలువలను ఒక క్రమంలో అమర్చితే అట్లాంటి వాటిని గణాంక శ్రేణులు అని నిర్వచించవచ్చు. ఈ క్రమం అనేది పరిమాణాన్ని బట్టి గాని లక్షణాలను బట్టి గాని కాలాన్ని బట్టి గాని ఉండవచ్చు.

గణాంక దత్తాంశ వర్గీకరణ పద్ధతిని బట్టి గణాంక శ్రేణి స్వభావం ఉంటుందని చెప్పవచ్చు. సమయం, స్థలం, పరిమాణం మొదలగు లక్షణాల ఆధారంగా దత్తాంశాలను వివిధ తరగతులుగా విభజించడం, అవసరమైతే ఒక తరగతిని కొన్ని ఉపతరగతులుగా విభజించడం జరుగుతుంది. ఒక గణాంక శ్రేణిని కేవలం దత్తాంశాన్ని ఆకర్షణీయ పద్ధతిలో ప్రదర్శించడానికి కాక దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడానికి దాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి తయారు చేయడం జరుగుతుంది.

దత్తాంశంలోని అంశాల పరిమాణాన్ని బట్టి ఉండే గణాంక శ్రేణులలో ముఖ్యమైనవి క్రింద పేర్కొన్న విధంగా ఉంటాయి.



B R A O U

అమరిక : సేకరించిన దత్తాంశంలోని అంశాలను పరిమాణాన్ని బట్టి పెరుగుతున్న లేదా తగ్గుతున్న క్రమంలో అమర్చడమే అమరిక అని ఇదివరకే తెలుసుకొన్నాము.

16.16 పౌన : పున్య విభాజనాలు (Frequency Distributions)

దత్తాంశంలోని సజాతీయమైన లేదా ఒకే విలువ లేదా సమీప విలువలున్నటువంటి అంశాలను వేరు వేరు తరగతులుగా, సమూహాలుగా విభజించి తయారు చేసిన ఒక గణాంక శ్రేణినే పౌన : పున్య విభాజనంగా నిర్వచించవచ్చు. అంటే పౌన : పున్య విభాజనంలో 2 అంశాలున్నాయి. ఒకటి, పౌన : పున్య పట్టికలో ఎడమవైపు చలాంక వైయుక్తికపు విలువలు గాను లేదా తరగతి అంతరాలుగాను ఉంటాయి. రెండు, కుడివైపున ఆయా విలువలు ఎన్నిసార్లు వస్తున్నాయనే సంఖ్య. ఒక చలాంకానికి క్రింది పదహారు విలువలు ఉన్నపుడు దాని పౌన : పున్య పట్టిక క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15,

పట్టిక 16.3

అంశాల పరిమాణం (Size of Items)	అంశాల సంఖ్య (Frequences)
9	1
10	2
11	3
12	4
13	3
14	2
15	1
మొత్తం అంశాలు	16

పై పట్టికలో అంశాలను వాటి విలువలను బట్టి కొన్ని వర్గాలుగా అమర్చినామన్నమాట. ఉదాహరణకు 12 విలువగల అంశాలు 4 వున్నాయన్నమాట. అంటే 4 అనేది 12 యొక్క పౌన : పున్యం. అదేవిధంగా వివిధ విలువలకు ఎదురుగా ఉన్న సంఖ్యలు వాటి వాటి పౌన : పున్యాన్ని సూచిస్తాయి.

16.16.1 విరళ శ్రేణులు లేదా విరళ పౌన : పున్య విభాజనం

ఈ రకమైన శ్రేణులలో పౌన : పున్యాలు చలాంకం యొక్క కొన్ని ఖచ్చితమైన విలువలకు సంబంధించి ఉంటాయి. వాస్తవానికి పైన పేర్కొన్న ఉదాహరణలోని పౌన : పున్య పట్టిక విరళ శ్రేణికి సంబంధించినదే.

16.16.2 అవిరళ శ్రేణులు లేదా అవిరళ పౌన : పున్య విభాజనం (Continuous Frequency Distribution)

ఈ విధమైన పైన : పున్య విభాజనంలో పౌన : పున్యాలు చలాంకం యొక్క వైయుక్తిక విలువలకు కాకుండా

BRAOU

కొన్ని విలువల సమూహానికి లేదా వ్యాప్తికి (range of values) సంబంధించి ఉంటాయి. చలాంక విలువలు భిన్నాల రూపంలో ఉన్నపుడు గాని, చలాంకాన్ని ఖచ్చితంగా కొలవడం వీలుగానప్పుడు గాని ఈ విధమైన అవిరళ విభాజనం అవసరమవుతుంది. అయితే విరళ చలాంకపు విలువల్ని కూడా అవిరళ శ్రేణి రూపంలో అమర్చవచ్చు. విరళ చలాంకపు విలువలు చాలా ఎక్కువగా ఉన్నపుడు అవగాహన సౌలభ్యం కోసం వాటిని అవిరళ శ్రేణిగా మార్చడం అవసరమవుతుంది. సాధారణంగా ఎత్తు, బరువు మొదలగు లక్షణాలను అవిరళ శ్రేణుల రూపంలో అమర్చడం జరుగుతుంది. అయితే అర్థశాస్త్ర మరియు ఇతర సాంఘిక శాస్త్రాల్లోని ఎన్నో విరళ చలాంకాల విలువలను కూడా అవిరళ పౌన : పున్య విభాజన రూపంలో అమర్చి పరిశీలించడం సామాన్యంగా జరుగుతుంది. ఉదాహరణకు ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన అవిరళ పౌన : పున్య విభాజనాన్ని పరిశీలించండి.

కొంతమంది ఉద్యోగుల నెలసరి వేతనాలను, వారి సంఖ్యను పట్టిలో సూచించడం జరిగింది.

పట్టిక 16 . 4

నెలసరి వేతనాలు(రూపాయలలో) (Monthly wages in Rs.)	ఉద్యోగుల సంఖ్య (Number of Employees)
500 - 600	5
600 - 700	10
700 - 800	20
800 - 900	32
900 - 1000	18
1000 - 1100	9
1100 - 1200	6
మొత్తం	100

పై పట్టికలో ఎడమవైపు ఉన్న వాటిని తరగతి అంతరాలని (Class Intervals) కుడివైపు ఉన్నవాటిని పౌన : పున్యాలని అంటాము. రూ ॥ 500 కన్నా ఎక్కువ, రూ. 600 లోపు నెలసరి వేతనం ఉన్న ఉద్యోగుల సంఖ్య 5 అన్నమాట. ఇంకోవిధంగా చెప్పాలంటే 800 - 900 మధ్య విలువ ఉన్న చలాంకపు అంశాలు (items of the variable) 32 ఉన్నా యన్నమాట. అయితే 900 - 1000 అనే తరగతి అంతరంలో 900 అనేవి తరగతి అంతరం యొక్క దిగువ అవధి (Lower Limit) అని 1000 ని ఎగువ అవధి (Upper Limit) అనీ, రెండింటి మధ్య భేదాన్ని (అంటే 1000 - 900 = 100) తరగతి అంతరము లేదా వ్యాప్తి అని అంటారు.

అయితే తరగతి అంతరాలను చూపే పద్ధతులు 4 రకములు . క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

B R A O U

పట్టిక 16. 5

A	B Exclusive Type	C Inclusive Type	D Open and Class
50 మరియు 60 కంటె లోపు	50 - 60	50 - 59	60 కంటె తక్కువ
60 మరియు 70 కంటె లోపు	60 - 70	60 - 69	60 - 70
70 మరియు 80 కంటె లోపు	70 - 80	70 - 79	70 - 80
80 మరియు 90 కంటె లోపు	50 - 90	80 - 89	80 - 90
90 మరియు 100కంటె లోపు	90 - 100	90 - 99	90 - 100
100 మరియు 110 కంటె లోపు	100 - 110	100 - 109	100 - 110
110 మరియు 120 కంటె లోపు	110 - 120	110 - 119	110 కన్నా ఎక్కువ

A లోని తరగతి అంతరంల నిర్వచనం చాలా స్పష్టమైనదే. B లోని నిర్వచనం ప్రకారం దిగువ అవధికి సమానం అయిన అంశాలను కలిపి ఎగువ అవధికి సమానం అయిన అంశాలను తరువాతి అంతరంలో కలుపుతాము. ఉదా : 50 విలువ వున్న అంశాన్ని 50 - 60 లోను 60 విలువ వున్న అంశాన్ని 60 - 70 తరగతిలోను కలుపుతామన్నమాట. 'C' లో దిగువ అవధికి మరియు ఎగువ అవధికి సమాన విలువలున్న అంశాలను ఆయా తరగతులలోనే కలుపుతాము. ఉదా : 50 మరియు 59 విలువలున్న అంశాలను 50 - 59 అనే తరగతి అంతరంలోనే కలుపుతాము అయితే దత్తాంశంలోని కొన్ని అంశాల విలువలు పూర్ణ సంఖ్యలు కాక భిన్న సంఖ్యలు (fractional values) గా వున్నపుడు తరగతి అంతరములను ఈ విధంగా చూపవచ్చు.

50 - 59.9, 60 - 69.9, 70 - 79.9 మొదలగునవి. D లో చూపినట్లు కొన్ని సందర్భాలలో మొదటి తరగతి దిగువ అవధిగాని చివరి తరగతి ఎగువ అవధిగాని అనిశ్చితంగా ఉండవచ్చు (open end classes). దత్తాంశంలో కొన్ని అల్పతమ లేదా అధికతమ విలువలున్నపుడు వీటి అవసరము ఎంతైనా వుంటుంది. మధ్య విలువ (mid value) ఒక తరగతి అంతరంలో సరిగ్గా మధ్య వుండే విలువను మధ్య విలువ అంటాము.

అంటే $M.V. = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}$

λ_1 = దిగువ అవధి, λ_2 = ఎగువ అవది , MV = మధ్య విలువ.

ఉదా : 60 - 70 అనే తరగతికి $MV = \frac{60+70}{2}$

$= \frac{130}{2} = 65$ అన్నమాట

16.16.3 పౌన : పున్య సాంద్రత (Frequency Density)

తరగతి అంతరంలోని ఒక యూనిట్‌కు ఉండే పౌన : పున్యాన్ని పౌన : పున్య సాంద్రత అందురు.

$$FD = \frac{\text{తరగతి పౌన : పున్యము}}{\text{తరగతి అవధి}}$$

BRAOU

$$= \frac{\text{Class Frequency}}{\text{Class Width}}$$

ఉదా : 70 - 80 అనే తరగతి అంతరంలో 20 అంశాలున్నపుడు,

$$FD = \frac{20}{80 - 70} = \frac{20}{10} = 2$$

అంటే తరగతి అవధిలోని 10 విలువలకు ప్రతీ విలువకు రెండేసి అంశాల చొప్పున ఉన్నాయన్న మాట. ఇది ప్రమేయము మాత్రమే. వాస్తవానికి అవధిలోని అంశాల విలువలు ఆ విధంగా ఉండకపోవచ్చు.

16.16.4 పౌన : పున్య విభాజన నిర్మాణము (Construction of Frequency Distribution)

పౌన : పున్య విభాజనము తయారు చేయడంలోని వివిధ దశలను ఈ క్రింది విధంగా తెలుపవచ్చును.

1) **వ్యాప్తి (Range):** సేకరించిన దత్తాంశంలోని అత్యధిక విలువ మరియు అత్యల్ప విలువల బేధాన్ని వ్యాప్తి అంటాం.

2) **తరగతి అంతరాల సంఖ్య (Number of Class Intervals):** వివిధ తరగతి అవధుల ద్వారా వ్యాప్తిని కొన్ని తరగతి అంతరాలుగా విభజించాలి. అయితే ఎన్ని తరగతి అంతరాలుండాలనేది నిర్ణయించేటపుడు ఈ క్రింది విషయములు గుర్తుంచుకోవలెను.

(ఎ) ఎటువంటి దత్తాంశానికి అయినా పౌన : పున్య విభాజనంలోని తరగతుల సంఖ్య మరీ ఎక్కువగా ఉంటే కొన్ని తరగతులలో పౌన : పున్యాలు లేకపోవచ్చు. దత్తాంశాల విలువలు ఎక్కువ ఉండే చోట ఎక్కువ తరగతులు, తక్కువ వుండే చోట తక్కువ తరగతులు తీసుకోవడం మంచిది. సాధారణంగా తరగతుల సంఖ్య 20 కి మించకుండాను 5 కు తగ్గకుండాను నిర్ణయిస్తారు. తరగతుల సంఖ్య 20 కి మించినపుడు దత్తాంశానికి చెందిన కొన్ని లాక్షణిక కొలతల గణన (measures of characteristics) కష్టమవుతుంది. ఈ సంఖ్య 5 తగ్గినపుడు కొంత దత్తవిలువలోని సమాచారాన్ని కోల్పోయి లాక్షణిక యదార్థ విలువలను కనుక్కోవడానికి తోడ్పడకపోవచ్చు. తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయించడానికి × విలువల వ్యాప్తి ఆధారంగా M.A Sturges ప్రతిపాదించిన సూత్రాన్ని కూడా ఉపయోగించవచ్చు. $h = 1 + 3.332 \log n$, h = తరగతి అంతరాల సంఖ్య. N : దత్తాంశంలోని అంశాల సంఖ్య $\log 10 = 1, \log 100 = 2, \log 1000 = 3, \log 10,000 = 4$ కాబట్టి అంశాల సంఖ్య 10 కంటె తక్కువ వున్నప్పటికీ h అనేది 4 కంటె తక్కువ వుండదు. అట్లాగే అంశాల సంఖ్య పదివేలకు మించినప్పటికీ h 20 కి మించి వుండదు.

(బి) తరగతి అంతరముల పరిమాణం సాధ్యమైనంతవరకు 5 గాని 10 గాని లేదా వాటి గుణిజం (multiple of five or ten) వుండడం మంచిది.

(సి) గణనలు సులభం కావడానికి, పౌన : పున్యాల విషయములో ఏ రెండు తరగతులనైనా మార్చుటకు, వీలయిన సందర్భాలలో సమానమైన అంతరాలుగల తరగతులను తీసుకోవడం అవసరం.

(డి) తరగతుల మధ్య బిందువులు ఆయా తరగతులోని × విలువల సగటులకు సాధ్యమయినంత సన్నిహితంగా వుండేటట్లు తరగతుల అవధులను నిర్ణయించాలి. కేంద్ర స్థానము, విస్తరణ కొలతలు కనుక్కోనేప్పుడు ప్రతీ తరగతి మధ్య బిందువు దగ్గర ఆ తరగతి పౌన: పున్యమంతా కేంద్రీకృతమవుతుంది అన్న ప్రమేయంపై నిర్ణయం తోడ్పడుతుంది.

BRAOU

(ఇ) × విలువలు విచ్ఛిన్న (discrete) శ్రేణిలో వుంటే తరగతి అవధులను నిర్ణయించడం సులభం. × విలువలు అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిలో (continuous) ఉంటే అవి మామూలుగా స్థూల విలువలకు సవరించి వుంటాయి. కాబట్టి తరగతి అంతరాలను 50.5 - 60.5 అని వ్రాయడం అవసరం.

గణ చిహ్నాల ద్వారా పౌన : పున్య విభాజనాన్ని, పౌన : విభజన పట్టికను క్రింద ఇవ్వబడిన సమాచారానికి తయారు చేద్దాము.

ఉదా 3 : ఒక కర్మాగారంలోని 50 మంది శ్రామికులు నెలకు ఎన్నిగంటలు పనిచేసినారనే సమాచారాన్ని క్రింద ఇచ్చాం. దాని ఆధారంగా విధంగా పౌన : పున్య పట్టికను తయారు చేయండి.

110, 175, 161, 157, 155, 108, 164, 128, 114, 178, 165, 133, 195, 151, 71, 94, 87, 42, 30, 62, 130, 156, 167, 124, 164, 146, 116, 149, 104, 141, 103, 350, 162, 149, 79, 113, 69, 121, 93, 143, 140, 144, 187, 184, 197, 87, 40, 122, 203, 149

Sturges సూత్రంననుసరించి తరగతి అంతరాలసంఖ్య

$h = 1+3.322 \log N$

$= 1+3.322 \times 1.6990 = 6.97$ అంటే దాదాపు 7.

కాబట్టి దత్తాంశం విలువలను 7 సమాన అవధి గల తరగతులుగా విభజిద్దాం. అయితే తరగతి అంతరం నిర్ధారించడానికి కూడా Sturges మరొక సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించినాడు.

$$1 = \frac{\text{Range}}{1 + 3.\ 322 \log N}$$

$$= \frac{(204 - 30)}{1 + 3.322 \text{ X } 1.\ 6990}$$

$$= \frac{174}{6.97}$$

= 25 (Approximate value).

అంటే అతని అంతరాన్ని 25గా నిర్ణయించవలెను.

పట్టిక 16.6

తరగతి అంతరము	గణ చిహ్నాలు	పౌన : పున్యము
30 - 55	1 1 1	3
55 - 80	1 1 1 1	4
80 - 105	~~1111~~ 1	6
105 - 130	~~1111~~ 1 1 1 1	9
130 - 155	~~1111~~ ~~1111~~ 1	11
155 - 180	~~1111~~ ~~1111~~ 11	12
180 - 205	~~1111~~	5
	మొత్తము	50

BRAOU

16.16.5 సంచిత పౌన : పున్యము (Cumulative Frequency)

వర్గీకృత పౌన : పున్య విభాజనంలో ఆది నుంచి 1వ తరగతి ఎగువ అవధి వరకు ఉండే పౌన : పున్య మొత్తాన్ని ఆ (i) వ తరగతి సంచిత పౌన : పున్యము లేదా ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్యమని అంటారు (less than cumulative Frequency). fi అనేవి i వ తరగతి పౌన : పున్యమైతే (i = 1, 2, 3) c fi అనేది i వ తరగతి వరకు ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్యమయితే $cf_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i$ ప్రతి తరగతి ఎగువ అవధులను వీటికి సంబంధించిన ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్య విభజనాలను సూచించే పట్టికను ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్య పట్టిక లేదా ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్య విభాజనమంటారు.

అవరోహణ పౌన : పున్య విభాజనము (More than Cumulative Frequency Distribution)

వర్గీకృత పౌన : పున్య విభాజనంలో 'i 'వ తరగతి దిగువ అవధిని ఎగువ వున్న పౌన : పున్య మొత్తాన్ని ఆ 'i'వ తరగతి అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యమని (more than cumulative frequency) అంటాము. అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యాన్ని cf_i తో గుర్తిస్తే $c f_i = f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3} + \ldots$

ప్రతి తరగతి దిగువ హద్దులను వీటికి సంబంధించిన అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యాలను సూచించే పట్టికను అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్య విభాజనం అని అంటాము. క్రింది పట్టికను పరిశీలించండి.

పట్టిక 16. 7

తరగతి అంతరం	పౌన : పున్యం	అవరోహణ పౌనఃపున్యం		అవరోహణ పౌన : పున్యం	
	f	ఎగువ అవధి	cf	దిగువ అవధి	cf
0-10	5	10 కంటె తక్కువ	5	0 కంటె ఎక్కువ	100
10-20	8	20 కంటె తక్కువ	13	10 కంటె ఎక్కువ	95
20-30	12	30 కంటె తక్కువ	25	20 కంటె ఎక్కువ	87
30-40	15	40 కంటె తక్కువ	40	30 కంటె ఎక్కువ	75
40 -50	25	50 కంటె తక్కువ	65	40 కంటె ఎక్కువ	60
50-60	18	60 కంటె తక్కువ	83	50 కంటె ఎక్కువ	35
60-70	8	70 కంటె తక్కువ	91	60 కంటె ఎక్కువ	17
70-80	7	80 కంటె తక్కువ	98	70 కంటె ఎక్కువ	9
80-90	1	90 కంటె తక్కువ	99	80 కంటె ఎక్కువ	2
90-100	1	100 కంటె తక్కువ	100	90 కంటె ఎక్కువ	1
	100				

B R A O U

పై పట్టికలోని అవరోహణ పౌన : పున్య పరిశీలన ద్వారా ఒక విలువ కంటె తక్కువ ఎన్ని అంశాలున్నాయి

అనేది అవరోహణ పౌన : పున్యం ద్వారా ఒక విలువ కంటె ఎక్కువ ఎన్ని అంశాలున్నాయి అనేదే కాకుండా అంశాలు ఎక్కువగా ఏ స్థానం దగ్గర కేంద్రీకృతమయినాయి అనేది కూడా కొంతవరకు అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఉదా : పై పట్టికలోని అంకెల ప్రకారం 60 కంటె తక్కువ విలువ వున్న అంశాలు 83 మరియు 50 కంటె ఎక్కువ విలువ వున్న అంశాలు 35 ఉన్నాయని గ్రహించవచ్చు.

16.16.6 సాపేక్ష పౌన : పున్య విభాజనము (Relative Frequency Distribution)

ఇంతవరకు పైన చర్చించినవి వాస్తవానికి నిరపేక్ష పౌన : పున్య విభాజనాలుగా (Absolute Frequency Distributions) గా పేర్కొనవచ్చును. అయితే కొన్ని సందర్భాలలో ప్రతి తరగతిలో వున్న పౌన : పున్యాన్ని గాక మొత్తం అంశాల్లో ఎన్నో భాగం అంశాలు ఒక్కొక్క తరగతి అంతరాల్లో చూపే అవసరం రావచ్చు. ఇట్లాంటిదాన్ని సాపేక్ష పౌన : పున్య విభాజనం (Relative Frequency Disribution) అంటారు.

ఉదా : ఒక కర్మాగారాములో వున్న 500 మంది కార్మికుల యొక్క దినసరి వేతనములు ఈ క్రింది విధంగా వున్నవి.

పట్టిక 16.8

దినసరి వేతనం (రూపాయలలో)	కార్మికుల సంఖ్య (f)	సాపేక్ష పౌన : పున్యము (%)
5 - 10	15	$\frac{15}{500}$ x100 = 3.00 %
10 – 15	40	= 8.00 %
15 – 20	55	= 11. 00 %
20 – 25	70	= 14.00 %
25 – 30	135	= 27.00 %
30 – 35	90	= 18.00 %
35 – 40	65	= 13.00 %
40 – 45	20	= 4.00 %
45 – 50	10	= 2.00 %
మొత్తం	500	= 100.00%

పట్టికలోని మూడవ నిలువు వరుసలో ప్రతి తరగతి అంతరమునకు ఎదురుగా ఆ తరగతి అంతరములో వున్న అంశాలసంఖ్యనుగాక మొత్తం అంశాల్లో వాటి నిష్పత్తిని శాతం రూపంలో చూపడమైనది.

ఉదా : 25 - 30 రూపాయల దినసరి వేతనం ఉన్న కార్మికులు 27% ఉన్నారు. ఈ విధంగా సాపేక్ష పౌన : పున్య విభాజనం ద్వారా దత్తాంశం సంక్షిప్తీకరణ ద్వారా దత్తాంశంలోని లక్షణాలను కొంతవరకు అవగాహన చేసుకోవచ్చు.

BRAOU

16.16.7 ద్విదిశ పౌన : పున్య విభాజనము (Bi Variate or Two Way Frequency Distribution)

కొన్ని సందర్భాలలో సంబంధం వున్న రెండు పౌన : పున్యాలను విభాజనాలను ఒకచోట చేర్చి ద్విదిశ పౌన : పున్య విభాజనంగా వ్రాయడం జరుగుతుంది. రెండు చలాంకాల మధ్య ఉండే సహ సంబంధాన్ని విశ్లేషించడానికి ఈ రకమైన ద్విదిశ పౌన : పున్య విభాజనం ఎంతో సహాయపడుతుంది.

ఉదా : ఉద్యోగకాలాన్ని (length of service) బట్టి మరియు వేతన స్థాయినిబట్టి (wage levels) శ్రామికులను వర్గీకరించినట్లయితే ఆ రెండింటికి మధ్య ఉండే కార్యకారణ సంబంధాన్ని కొంతవరకు ఇట్లాంటి జాత్యంతర వర్గీకరణ (cross - classification) ద్వారా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

పట్టిక 16.9

వేతనాలు	100 కంటె తక్కువ	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 కంటె ఎక్కువ	మొత్తం
సర్వీసు 2 సం ॥ కంటె తక్కువ	5	10	1			16
2 - 4		7	12	2		21
4 - 6		6	7	8		21
6 - 8			6	8		16
8కంటె ఎక్కువ			4	10	12	26
మొత్తం	5	23	30	30		100

పై పట్టికలో 100 మంది కార్మికుల వేతనాలు మరియు సర్వీసుకు సంబంధించిన వివరాలు ఇవ్వబడినవి. 100 లోపు నెలసరి వేతనం మరియు రెండు సం ॥ ల కంటె తక్కువ సర్వీసు వున్న కార్మికులు 5 గురు వున్నారు. అయితే సర్వీసు ఎక్కువ వున్నవారి వేతస్థాయి కూడా ఎక్కువ వున్నట్లు గమనించవచ్చు. ఈవిధంగా ఈ రకమైన వర్గీకరణ ద్వారా వేతన రేటు మరియు ఉద్యోగ కాలానికి మధ్య ధనాత్మక సంబంధం వున్నట్లు అర్థం చేసుకోవచ్చు.

BRAOU

16.17 గణాంక దత్తాంశం : చిత్రపట ప్రదర్శన (Diagrammatic Presentation of Statistical Data)

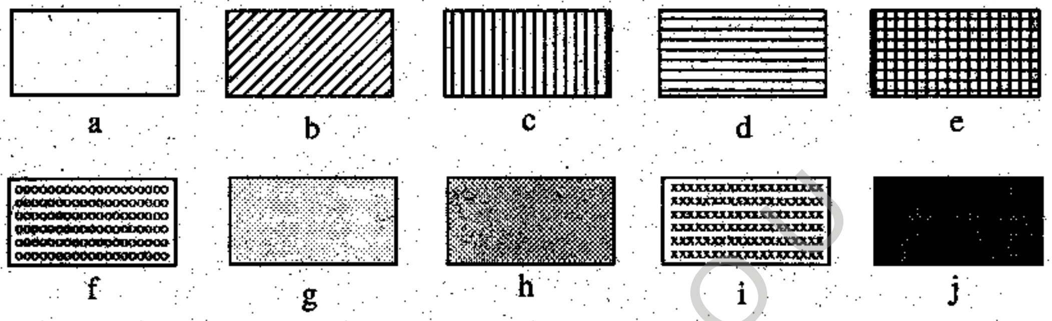
దత్తాంశాన్ని ఉన్నదున్నట్లుగా సంఖ్యారూపంలో ప్రదర్శించినప్పుడు దానిలో ముఖ్య లక్షణాలను సులభంగా అర్థం చేసుకోలేము. ముఖ్యంగా గణాంక పరిజ్ఞానం లేని సామాన్యజనానికి సులభంగా అర్థం అయ్యే రీతిలో గణాంక సమాచారాన్ని ప్రదర్శించాలంటే దానిని సంఖ్యల రూపంలో గాకుండా రేఖా చిత్రముల ద్వారా గాని చిత్రపటాల ద్వారా గాని ప్రదర్శించాలి. దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాల పరిమాణాలను బట్టి వాటిని ఆకర్షణీయమైన చిత్రపటాల ద్వారా ప్రదర్శించినపుడు వాటి ముఖ్య లక్షణాలు, అంశాల మధ్య వుండే సారూప్యతా విభేదాలు సులభగ్రాహ్యంగా వుంటాయి. ముఖ్యంగా వ్యాపార ప్రకటనలలో (advertising) వివిధ ఆర్థిక, వ్యాపార, పరిపాలనా రంగాలలో సామాన్య జనానికి అర్థమయ్యే రీతిలో సమాచారాన్ని అందించడంలో చిత్రపట ప్రదర్శన ఎంతో ముఖ్యమైన పాత్ర వహిస్తుంది. ఈ విధమైన దత్తాంశ ప్రదర్శన ముఖ్యంగా రెండురకములు.

(ఎ) చిత్రపటములు (Diagrammes) (బి) రేఖా చిత్రాలు (Graphs). అయితే వీటిలో కూడా వివిధ పద్ధతులు వున్నాయి.

A	B
చిత్రపటాలు	రేఖా చిత్రాలు
1. బార్‌గ్రాఫ్‌లు	1. కాలశ్రేణుల రేఖా చిత్రము
2. వృత్త చిత్రాలు	2. పౌన : పున్య రేఖా చిత్రాలు
3. పిక్టోరియల్ చిత్రములు	3. సంవర్గమాన (Logarithmic) రేఖచిత్రాలు

అయితే A లో వున్న పద్ధతులు మరియు B లో వున్న పద్ధతుల మధ్య ఒక ముఖ్యమైన భేదాన్ని గమనించాలి. A లోని పద్ధతులలో చిత్రాలు, దత్తాంశంలోని అంశాల పరిమాణాల నిష్పత్తిలో వున్నప్పటికీ ఖచ్చితమైన స్కేలు పాటించడం జరగకపోవచ్చు. 'B' లో వున్న రేఖా చిత్ర పద్ధతుల విషయంలో ఈ రకమైన స్కేలును పాటించడం జరుగుతుంది. ఇప్పుడు పైన తెలిపిన వివిధ పద్ధతులను గురించి తెలుసుకొందాం. దత్తాంశాన్ని వివిధ చిత్ర పటాల రూపంలో ప్రదర్శించేటప్పుడు ఈ క్రింది తెలిపిన విషయాలను గుర్తుంచుకోవాలి.

1. **ఆకర్షణీయమైన ప్రదర్శన :** చిత్రాలు చాలా శుభ్రంగాను ఆకర్షణీయమైన రీతిలోను వుండాలి. ఉదాహరణకు బార్ పటాలు, ఇతర చిత్రాలు గీసేటప్పుడు దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలను చూపేటప్పుడు ఈ క్రింద చూపిన విధంగా అంతర్భాగాలు గీయాలి.



2. **పేరు (Title):** చిత్ర పటంలో తెలిపే దత్తాంశానికి సంబంధించి తగిన పేరును పటం పై భాగంలో ఉపయోగించాలి.
3. **పరిమాణము - నిష్పత్తి (Size and Proportion) :** చిత్రపటం పరిమాణం పేజీలో మరీ చిన్నదిగాను మరీ పెద్దదిగాను గాకుండా తగిన పరిమాణంలో వుండాలి. అంతేగాకుండా చిత్రపటం పొడవు మరియు ఎత్తుల మధ్య నిష్పత్తి $\sqrt{2} : 1$ వుండడం మంచిదని 'లుట్జ్' (Lutz) అభిప్రాయం.
4. **స్కేలు (Scale) :** సాధ్యమయినంతవరకు స్కేలు 5, 10, 15, 20, 25 అంకెలుగా వుంటే మంచిది.
5. **తగిన చిత్ర పట ఎంపిక (Choice of Right Method) :** దత్తాంశ స్వభావాన్ని బట్టి మరియు ప్రదర్శనా వుద్దేశాన్ని బట్టి బార్ చిత్రపటమా లేదా వృత్త చిత్రమూ లేదా మరే ఇతర పద్ధతి సరియైనదో నిర్ణయించాలి.
6. **అధోజ్ఞాపకాలు (Foot Notes) :** చిత్రపటం క్రింద దత్తాంశం సేకరణకు సంబంధించిన వివరాలను ఇవ్వాలి.

16.17.1 బార్ చిత్రపటాలు (Bar Graphs)

ఆర్థిక వ్యాపార సమాచారాన్ని సమర్పించడంలో బార్‌పటాలు విరివిగా ఉపయోగించబడతాయి. బార్ పటాలను ఏక దిశ పటములుగా (One Dimesional Graphs) పరిగణించవచ్చు. ఎందుకంటే గణాంక సమాచారంలోని వివిధ వర్గాలను వాటి పరిమాణాలను బట్టి వేర్వేరు పొడవు గల బార్‌లను నిర్ణయించడం జరుగుతుంది. అంటే దత్తాంశంలోని వివిధ భాగాలను ప్రతిబింబించే బార్‌ల పొడవు వాటి విలువల నిష్పత్తిలో వుంటాయన్నమాట. బార్‌ల వెడల్పుకు పరిమాణ ప్రాధాన్యత ఏమీ ఉండదన్నమాట. బార్ చిత్రపటాల నిర్మాణంలో ఈ కింది నియమాలను పాటించాలి.

BRAOU

1. బార్ల వెడల్పునకు ఏమీ ప్రాతినిధ్య విలువ లేదు కాబట్టి అన్ని బార్ల వెడల్పు సమానంగా వుండడం మంచిది.

2. బార్లయొక్కపొడవు (లేదాఎత్తు) అవి ప్రాతినిధ్యం వహించే విలువల నిష్పత్తికి అనుగుణంగా వుండవలెను.

3. బార్‌కు బార్‌కు మధ్య వుండే నిడివి కూడా అంతటా సమానంగా వుండవలెను.

4. అన్నింటి కంటె ఎక్కువ విలువ వుండే అంశం విలువను బట్టి స్కేలును నిర్ణయించవలెను.

5. అన్ని బార్‌లు ఒకే ఆధారరేఖ నుండి గీయవలెను.

6. బార్ ప్రాతినిధ్యం, వహించే అంశం విలువను బార్‌పైన వ్రాయడం మంచిది.

వివిధ రకాల బార్‌పటాలు (Types of Bar Graphs)

బార్ పటాలలో కొన్ని ముఖ్యమైన రకాలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి.

(i) సాధారణ బార్ పటాలు (Simple Bar Graphs)

(ii) బహుళ బార్ పటాలు (Muliple Bar Graphs)

(iii) విభాగాల బార్ పటాలు (Component Bar Graphs)

(iv) విచలనాల బార్ పటాలు (Deviation Bar Graphs)

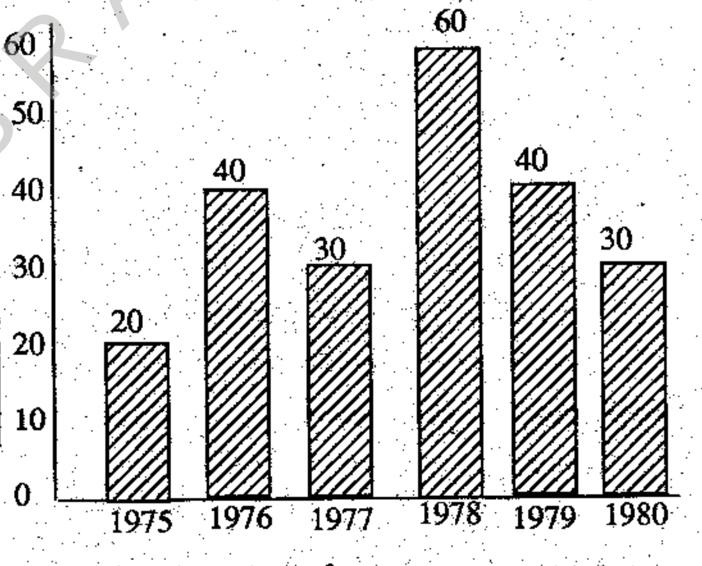
పైన తెలిపిన వివిధ రకాల బార్ పటాల గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకొందాము.

B R A O U

a. **సాధారణ బార్ పటం (Simple Bar Diagram) :** సాధారణ బార్ పటంలో ఒకే ఒక చలాంకానికి సంబంధించిన వివిధ అంశాల విలువను బార్‌ల ద్వారా ప్రదర్శించడం జరుగుతుంది.

ఉదా : ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన దత్తాంశాన్ని సాధారణ బార్ పటం ద్వారా ప్రదర్శించండి.

సంవత్సరం	కంపెనీ అమ్మకాలు ' 000 ' రూ॥ లలో
1975	20
1976	40
1977	30
1978	60
1979	40
1980	30



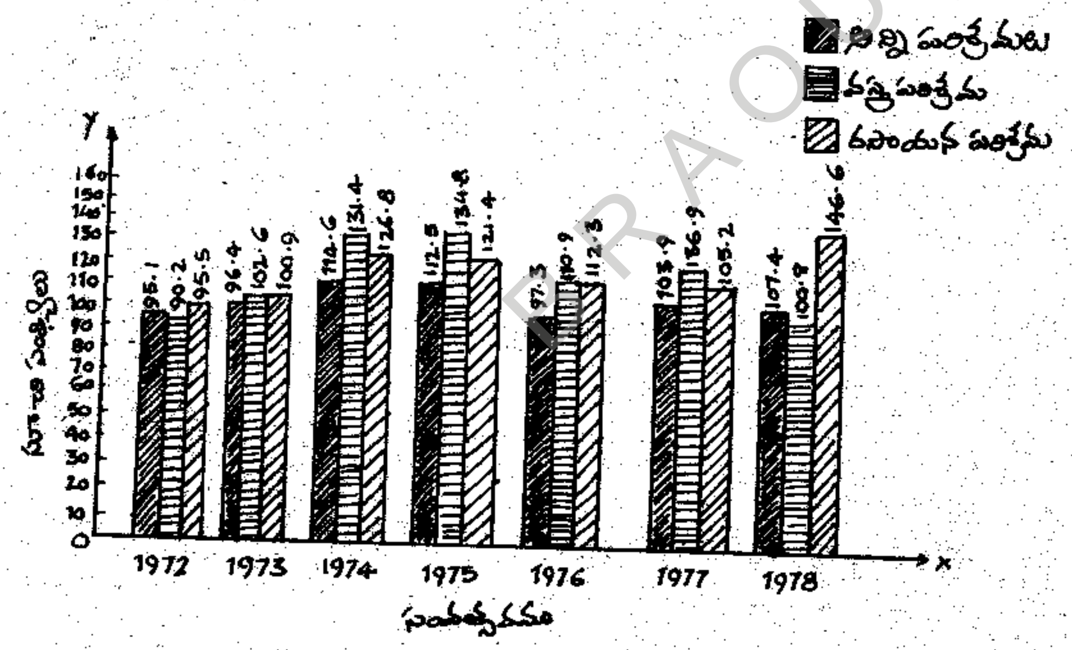
b. బహుళ బార్ పటము (Multiple Bar Diagram): రెండుగాని అంతకంటే ఎక్కువ చలాంకాల అనురూప విలువలను పోల్చవలసినప్పుడు బహుళ బార్ పటాన్ని వుపయోగించవచ్చు. దీనిలో ఒక కాలానికి సంబంధించిన, లేదా ఒక ప్రదేశానికి సంబంధించిన వివిధ చలాంకాల విలువలను సూచించే బార్‌లను ఒక సమూహంగా గీయాలి. ఒక సమూహం లోని బార్‌ల మధ్య విడిది ఏమీ వదలకుండా సమూహ సమూహాలకు మధ్య కొంత దూరాన్ని వదలవలెను.

క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశాన్ని బార్ పటాల ద్వారా ప్రదర్శించండి.

పట్టిక 16.10

సంవత్సరం	ఉత్పత్తి సూచీ సంఖ్యలు		
	అన్ని పరిశ్రమలు	వస్త్ర పరిశ్రమ	రసాయన పరిశ్రమ
1972	95.1	90.2	95. 5
1973	96.4	102.6	100.9
1974	114.6	131.4	126.8
1975	112.5	134.8	121.4
1976	97.3	110.9	112.3
1977	103.9	136.9	105.2
1978	107.4	100.8	146.6

ఉత్పత్తి సూచి సంఖ్యలు



BRAOU

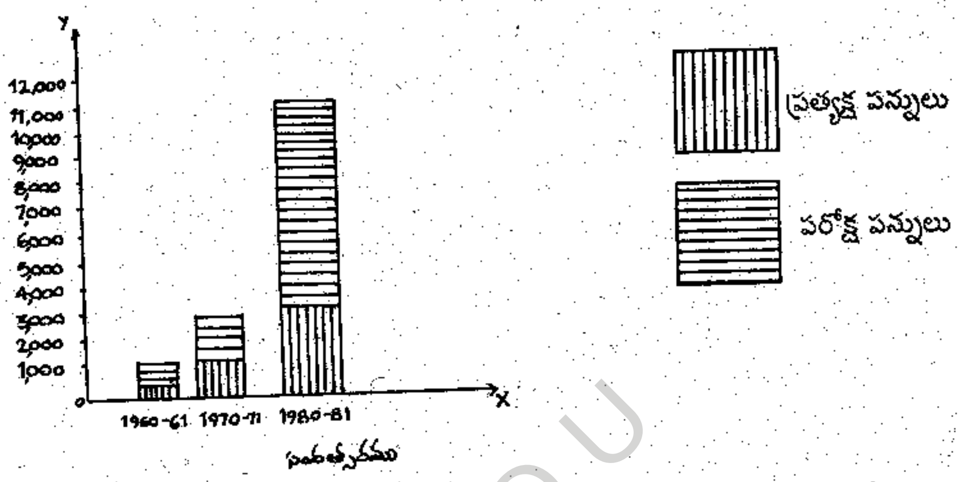
C. ఉప - భాగాల బార్ పటము (Subdivided Bar Diagram) : ఒకదానికొకటి సంబంధం వున్న చలాంకాల (related variables) కాలశ్రేణుల విలువలనుగాని లేదా ఒక చలాంకంలోని కొన్ని అంతర్భాగాలను పోల్చి చూపే అవసరమున్నప్పుడు ఉపభాగాల బార్ పటాన్ని ఉపయోగిస్తాము. ఈ రకమైన పటంలో ఒక్కొక్క బార్‌లో అది ప్రాతినిధ్యం వహించే అంశంలోని అంతర్భాగాల విలువల నిష్పత్తి ననుసరించి కొన్ని విడిభాగాలు చేసి చూపడమవుతుంది.

ఉదా : క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశాన్ని చిత్రపట రూపంలో చూపండి.

పట్టిక 3 - 11 పన్నుల ద్వారా కేంద్ర ప్రభుత్వ రాబడి (కోట్ల రూ ॥ లలో)

	1960 - 61	1970 - 71	1980 - 81
ప్రత్యక్ష పన్నులు	340.76	876.85	3054.75
పరోక్ష పన్నులు	712.97	2329.95	8431.67
మొత్తం	1053.73	3206.80	11476.42

పన్నుల ద్వారా కేంద్ర ప్రభుత్వ రాబడి.

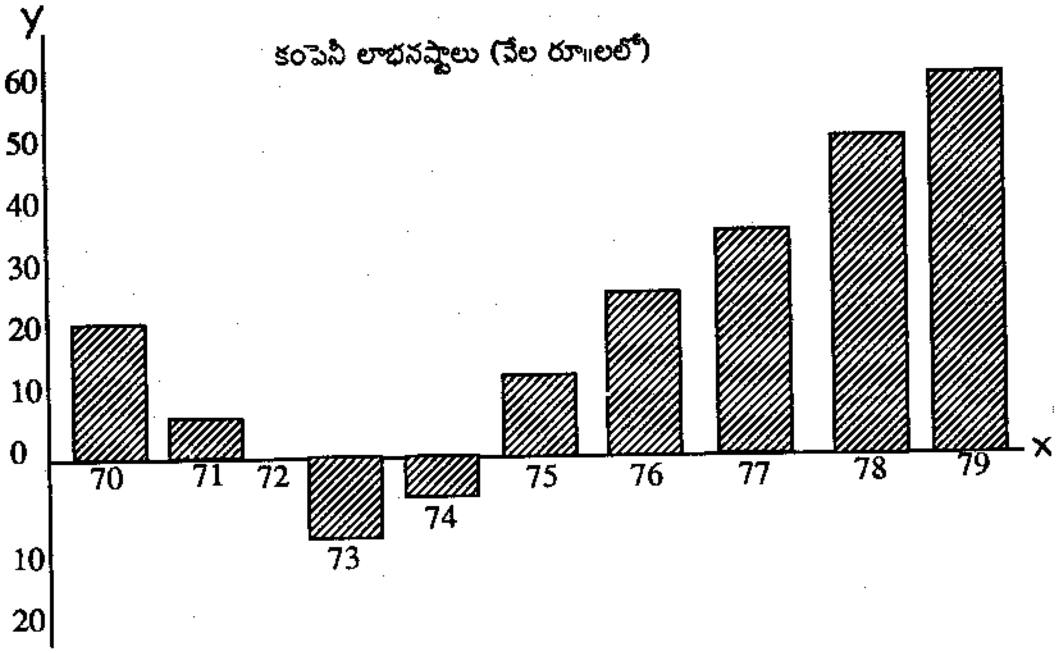


ఈ పద్ధతిలో బార్ ఎత్తు మొత్తం పన్నుల రాబడిని బార్‌లోని క్రింది అంతర్భాగం ప్రత్యక్ష పన్నుల రాబడిని మరియు బార్‌లోని పై అంతర్భాగం పరోక్ష పన్నుల రాబడిని సూచిస్తాయి. ఈ పటాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా ఒక సంవత్సరంలోని పన్ను రాబడినే గాక సంవత్సర సంవత్సరానికి వాటి మార్పును కూడా కొంతవరకు అర్థం చేసుకోవచ్చు.

d. విచలనాల బార్ పటము (Deviation Bar Diagram) : నికర పరిమాణాలను (net quantities), ఉదాహరణకు లాభ నష్టాలు, విదేశీ వ్యాపార చెల్లింపుల శేషంలోని మిగులు, లోటు మొదలైన వాటిని, చూపడానికి ఈ పద్ధతి చాలా అనువయినది.

ఉదా : ఒక కంపెనీ యొక్క లాభనష్టాల సమాచారం క్రింద ఇవ్వబడినది. తగిన చిత్రపటం ద్వారా దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శించండి.

సంవత్సరము	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
లాభం/నష్టం వేల రూ॥లలో	20	5	0	-10	-5	10	25	35	50	60



ఈ పటంలో చూపినట్లుగా ఆధారరేఖకు పైన వున్న బార్‌లు లాభాన్ని క్రింద వున్న బార్‌లు నష్టాన్ని సూచిస్తాయి. అంతేగాకుండా బార్‌ల పొడవు లాభనష్టాల పరిమాణాలను సూచిస్తుంది.

16.17.2 పై చార్టులు లేదా వృత్త చిత్రాలు (Pie Charts)

దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలను ఒక బార్‌లోని అంతర్భాగాలుగా చూపినట్లుగానే వృత్త చిత్రాలలో దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలను వాటి పరిమాణాన్ని బట్టి వృత్తంలో అదే నిష్పత్తిలో వివిధ భాగాలుగా చూపిస్తారు. అయితే వృత్త పటాన్ని గీసేముందు దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాల విలువలను అంశాల మొత్తం విలువలో శాతం రూపంలో లెక్కించాలి. ఎందుకంటే వృత్తంలోని 360^0 డిగ్రీలను 100 % అనుకొంటే ఒక్కొక్క అంశం విలువ శాతం రూపంలో వున్నపుడు ఆ అంశానికి కేటాయించవలసిన డిగ్రీలకోణాన్ని కనుక్కోవడానికి అంశాలశాతం విలువను 3.6చే గుణించితే సరిపోతుంది. లేదా వివిధ అంశాలకు వాటి విలువలను బట్టి వృత్తంలో కేటాయించవలసిన కోణాలను లెక్కించడానికి క్రింది సూత్రాన్ని కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

$$\text{అంశం కోణం} = \frac{\text{అంశం విలువ}}{\text{అంశాల మొత్తం విలువ}} \times 360$$

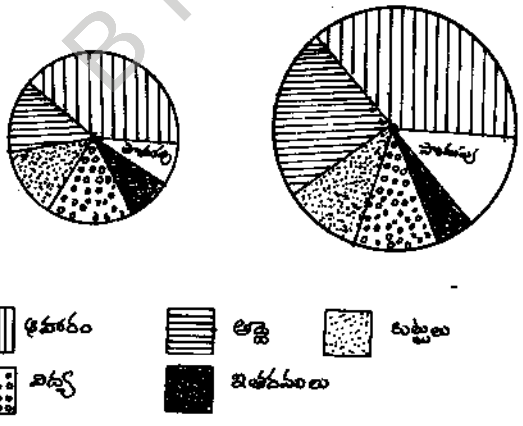
ఉదా : క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు కుటుంబాల బడ్జెటు వివరాలను వృత్త పటాల రూపంలో ప్రదర్శించండి.

పట్టిక 16.12

వస్తువు	కుటుంబం A		కుటుంబం B	
	వ్యయం (రూ॥)	డిగ్రీలు	వ్యయం(రూ॥)	డిగ్రీలు
ఆహారం	300	$\frac{300}{900} \times 360 = 120^0$	500	$\frac{500}{1600} \times 360 = 112.5$
అద్దె	200	$\frac{200}{900} \times 360 = 80^0$	350	$\frac{350}{1600} \times 360 = 78.75$
బట్టలు	125	$\frac{125}{900} \times 360 = 50^0$	250	$\frac{250}{1600} \times 360 = 56.75$
విద్య	110	$\frac{110}{900} \times 360 = 44^0$	225	$\frac{225}{1600} \times 360 = 50.63$
ఇతరములు	75	$\frac{75}{900} \times 360 = 30^0$	125	$\frac{125}{1600} \times 360 = 28.13$
పొదుపు	90	$\frac{90}{900} \times 360 = 36^0$	150	$\frac{150}{1600} \times 360 = 33.75$
మొత్తం	900	360	1600	360
Square-100f	30		40	
వృత్తవ్యాసార్థం	3.0సెం.మీ		4.0 సెం.మీ	

BRAOU

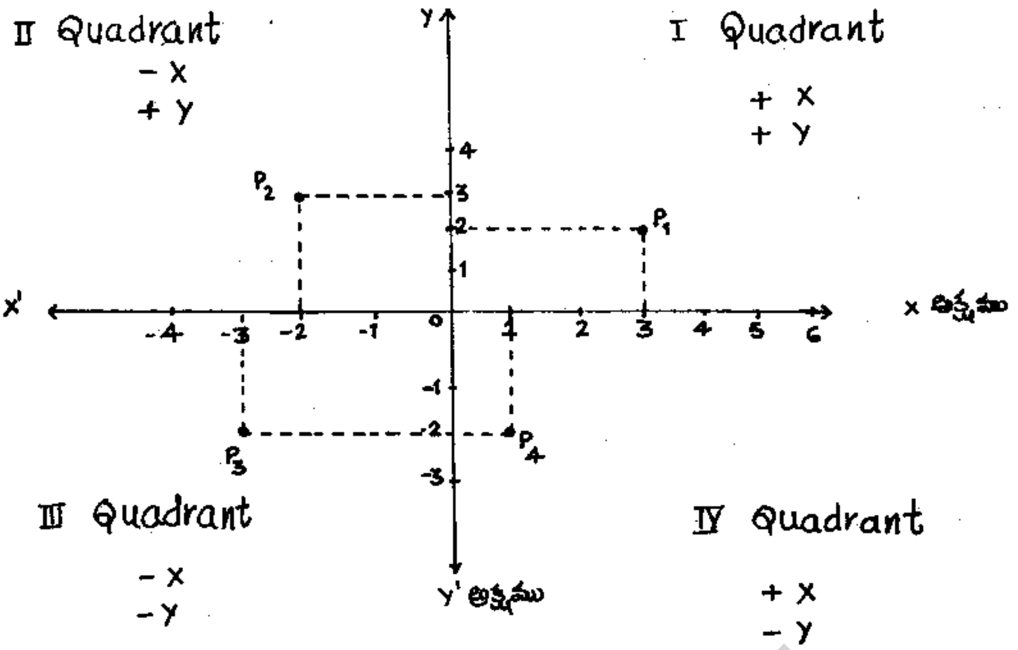
కుటుంబ వ్యయాలు



16.17.3 రేఖా చిత్ర పటాల ద్వారా దత్తాంశ సమర్పణ (Graphical Presentation of Statistical Data)

బిందువుల, రేఖల సహాయంతో x,y అనే రెండు అక్షాల పటం ద్వారా దత్తాంశాన్ని సమర్పించడమే

రేఖాచిత్ర పట ప్రదర్శన అని చెప్పవచ్చు. ఈ రేఖా చిత్రపటంలో అడ్డంగా ఉండేదాన్ని x అక్షం అని నిలువుగా వుండేదాన్ని y అక్షమని అంటాము. ఈ రెండు అక్షాలు '0' అనే కేంద్ర బిందువు వద్ద ఒకదానికొకటి ఖండించుకొంటాయి. ఈ రెండు అక్షాలు ఈ విధంగా ఖండించుకోవడం వల్ల పటంలో నాలుగు సమభాగాలు ఏర్పడతాయి.



పై పటంలో చూపినట్లుగా ఈ నాలుగు భాగములను I, II, III మరియు IV వ Quadrant గా పిలుస్తాము. సాధారణంగా ఒకటవ Quadrant ను మాత్రమే చాలా సందర్భాలలో ఉపయోగించడం జరుగుతుంది. అయితే చలాంకాలకు ఋణవిలువలున్నపుడు మిగతా Quadrant లను వుపయోగించే అవసరం వుంటుంది. పైన చూపినట్లుగా I Quadrant లోని P_1 అనే బిందువు x విలువ 3గాను y విలువ 2 గాను సూచిస్తుంది. అంటే ఒకటవ Quadrant లో X మరియు Y రెండూ ధనాత్మక విలువలనే కలిగి వుంటాయన్న మాట. III Quadrant లో X ఋణాత్మకము Y ధనాత్మక విలువలను కలిగి వుంటాయి. III Quadrant లో X మరియు Y లు రెండూ కూడా ఋణాత్మక విలువలనే కలిగి వుంటాయి. IV Quadrant లో X ధనాత్మక విలువలనూ Y ఋణాత్మక విలువలను కలిగి వుంటాయి.

BRAOU

గణాంక దత్తాంశాన్ని రేఖా చిత్రాల ద్వారా ప్రదర్శించేటపుడు ఈ క్రింద పేర్కొన్న సూత్రాలను పాటించడం మంచిది.

1. స్వతంత్ర చలాంకాన్ని (independent variable) x అక్షంపై, ఆశ్రిత చలాంకాన్ని y అక్షంపై చూపాలి. స్వతంత్ర చలాంకపు ప్రతి విలువకు దానికి సంబంధించిన ఆశ్రిత చలాంకపు విలువలను చూపాలి.

2. చిత్రపటం ద్వారా చూపదలచుకొన్న దత్తాంశానికి సంబంధించినట్లుగా చిత్రపటానికి పైభాగమున తగిన పేరు ఇవ్వాలి.

3. చలాంకములోని చాంచల్యాలను బట్టి తగిన స్కేలును ఎన్నుకోవాలి. శీర్షిక (vertical) స్కేలు అంతటా సమానంగా వుండవలసిన పనిలేదు. ఆశ్రిత చలాంకపు కనిష్ట విలువలకు కేంద్రబిందువుకు మధ్య

స్కేలును పెద్దదిగా తీసుకోవడం లేదా వదిలివేయడం గాని చేయవచ్చు. y అక్షంపై చలాంకపు చాంచల్యాలను స్పష్టంగా చూపేందుకు పై భాగంలో స్కేలును తగ్గించి చూపాలి.

4. నిష్పత్తి మార్పును గాని శాతం మార్పును గాని చూపేటపుడు సంవర్గమాన లేదా నైష్పత్తిక స్కేలును (logarithamic or ratio scale) ఉపయోగించాలి.

5. ఒకటి కంటె ఎక్కువ చలాంకాలను ఒకే పటంలోని y అక్షంపై చూపేటపుడు ఒకదానికొకటి భిన్నంగా ఉండే రేఖలను ఉపయోగించాలి.

6. X,Y అక్షాలపై కొలిచే చలాంకాల పేర్లను ఆయా అక్షాలపై ఇవ్వాలి.

7. పటం క్రింద భాగంలో ఆధార గమనిక (source) ఇవ్వడం కూడా అవసరం.

రేఖా చిత్రాలు ఎన్నో రకాలు ఉన్నప్పటికీ గణాంకశాస్త్రంలో ముఖ్యంగా రెండు రకాల చిత్రాలను ఎక్కువగా వాడుతుంటాము. అవి

(1) కాల శ్రేణుల రేఖా చిత్రాలు (Time Series Graphs)

(2) పౌన : పున్య రేఖా చిత్రాలు (Frequency Graphs)

(a) కాలశ్రేణుల రేఖా చిత్రాలు : ఒక చలాంకము విలువలు వివిధ కాలాలలో ఎట్లా మార్పు చెందిందీ కాల శ్రేణుల చిత్రాల ద్వారా చూపుతారు. ఈ చిత్రాలలో X కాలాన్ని అక్షంపై తీసుకొంటారు. చిత్రంలో గుర్తించిన విలువల బిందువులన్నిటినీ సరళరేఖల ద్వారా కలుపుతారు. రిజిష్టరు కాబడిన మరణాల ఆధారంగా క్షయ మరియు కాన్సరు రోగాల వల్ల సంభవించిన ప్రతి లక్ష జనాభాకు మరణాల రేట్లు ఈ క్రింది రేఖా చిత్రంలో చూపబడినవి.

BRAOU

క్షయ, కాన్సరు వల్ల కలిగే మరణాల రేట్లు (ప్రతి లక్ష జనాభాకు)

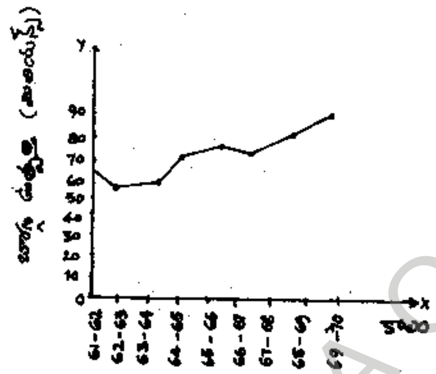
పటంలోని దళసరి రేఖ కాన్సరు మరణాల రేటును, పలుచని రేఖ క్షయ మరణాలను సూచిస్తుంది. ఈ రేఖల ధోరణిని పరిశీలిస్తే కాన్సరు వలన సంభవించే మరణాల రేటు క్రమంగా తగ్గుతున్నట్లు బోధపడుతుంది. 1920 సంవత్సరంలో క్షయ మరణాల రేటు దాదాపు ఒక లక్ష జనాభాకు 180 వుండగా 1980 లో అది సుమారు 20 కి పడింయిందని, అదే కాలానికి కాన్సర్ మరణాల రేటు దాదాపు 60 నుండి 170కి పెరిగిందని పటం పరిశీలన ద్వారా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

ఈ విధంగా ఒకదానికొకటి సంబంధం వున్న వివిధ చలాంకాల కాలశ్రేణుల విలువను వివిధ రకాల రేఖా చిత్రాల ద్వారా చూపించి అవి ఏ విధంగా మారుతున్నవో ఒకదానికొకటి పోల్చి చెప్పవచ్చు.

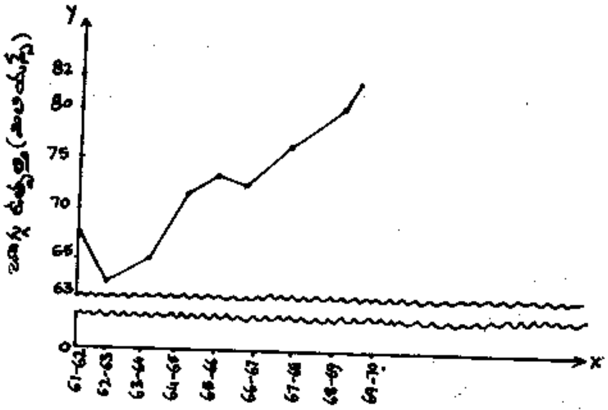
బాండ్ రేఖా చిత్రాలు (Band Graphs) : ఒక సమిష్టి చలాంకంలోని కొన్ని అంతర్భాగాలు ఏవిధంగా మార్పుచెందుచున్నవో తెలిపే అవసరమున్నపుడు బాండ్ రేఖా చిత్రములను ఉపయోగిస్తారు.

ఉదా : భారతదేశపు బొగ్గు ఉత్పత్తికి సంబంధించిన సమాచారాన్ని క్రింది రెండు పటాల్లో చూపించడం జరిగింది.

భారతదేశంలో బొగ్గు



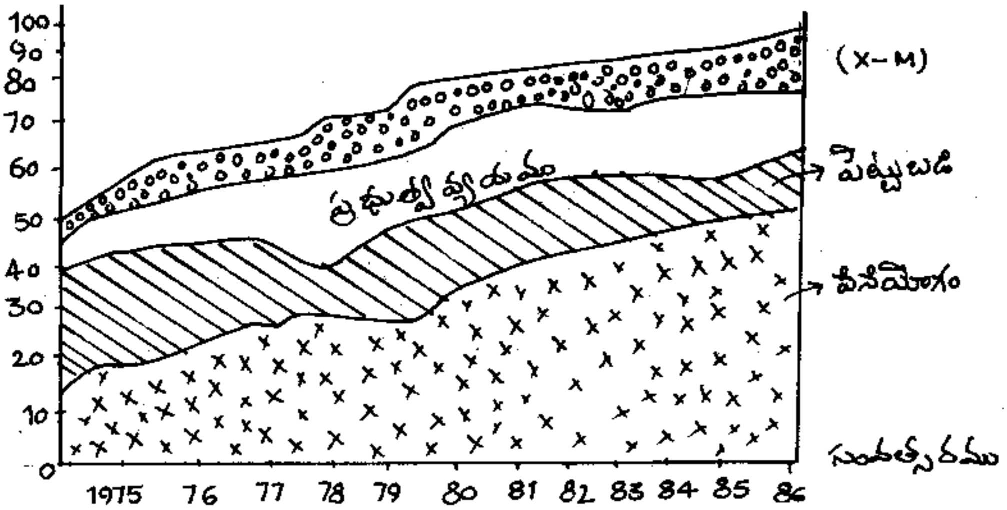
భారతదేశంలో బొగ్గు ఉత్పత్తి



BRAOU

ఉదాహరణకు ఒక దేశానికి సంబంధించిన జాతీయాదాయము మరియు దానిలోని నాలుగు అంతర్భాగాలయిన వినియోగము (C), పెట్టుబడి (I),ప్రభుత్వ వ్యయము (G) మరియు విదేశీ వ్యాపార మిగులు (X-M) కు సంబంధించిన ధోరణి క్రింద ఇవ్వబడిన బాండ్ రేఖాచిత్రంలో చూపబడింది.

'X' దేశ జాతీయాదాయ ధోరణి



రేఖా చిత్రాలలో మిథ్య ఆధార రేఖ (False Base line) : రేఖా చిత్రాలలో Y అక్షంపై స్కేలును సున్నాతో ప్రారంభించవలెననే సూత్రాన్ని ఇది వరకే తెలుసుకొన్నాము. అయితే చలాంకంలోని అతి తక్కువ విలువ చాలా పెద్దదిగా వున్నపుడు Yఅక్షాన్ని సున్నాతో ప్రారంభిస్తే చిత్రంలో క్రింది భాగమంతా ఖాళీగా వుండి రేఖా చిత్రము చాలా పై భాగాన వుంటుంది. అంతేకాక అతి తక్కువ విలువ చాలా పెద్దదిగా వున్నప్పటికీ చలాంకంలో చాంచల్యం చాలా స్వల్పంగా వుండవచ్చు. ఇటువంటి సందర్భాలలో మిథ్య ఆధార రేఖను ఉపయోగిస్తే చలాంకంలోని స్వల్పమైన మార్పులు కూడా స్పష్టంగా కనిపిస్తాయి. ఈ పద్ధతిలో సున్న నుంచి శ్రేణిలోని అతి తక్కువ విలువ వరకు ఉన్న స్కేలును వదిలి వేస్తారు. శీర్షాక్షాన్ని (vertical axis)రెండు భాగాలు చేసి వాటి మధ్య కొంత స్థలం వదులుతారు. Y అక్షంలోని క్రింది భాగాన్ని చాలా చిన్నదిగా వుంచి సున్న నుంచి ప్రారంభిస్తారు. పై భాగాన్ని చలాంకంలోని అతి తక్కువ విలువ నుంచి గాని లేదా దానికి కొంచెం తక్కువగా ఉన్న విలువ నుంచిగానీ ప్రారంభిస్తారు. రేఖా చిత్రాలలో పైన చెప్పినవే గాక అంతగా వాడుకలో లేని మిశ్రమ రేఖా చిత్రాలు (mixed graphs),మాండలిక రేఖా చిత్రాలు (zone graphs), జడ్ చార్టులు (Z-charts) అని ఇంకా అనేక రకాలుంటాయి. గణాంక శాస్త్రములో వాడే రెండు రకాల చిత్రాలలో మొదటి రకానికి చెందిన కాల శ్రేణుల రేఖా చిత్రాల గురించి తెలుసుకొన్నపుడు పౌన : పున్య రేఖా చిత్రాల గురించి తెలుసుకొందాం.

16.18 పౌన : పున్య రేఖా చిత్రాలు (Frequency Graphs)

పౌన : పున్య రేఖా చిత్రములలో చలాంకము విలువలు x అక్షంపైన , వాటి పౌన : పున్యాలను y అక్షంపైన గుర్తిస్తాము. కొలమాన స్కేలును (scale of measurement) రెండు అక్షములపై చూపించాలి. పౌన : పున్య రేఖా చిత్ర పటాలలో తరచుగా ఉపయోగించబడే వాటిని క్రింది విధంగా తెలుపవచ్చు.

BRAOU

(1) సరళ రేఖా చిత్రాలు (Vertical Line graphs)

(2) బార్ రేఖా చిత్రాలు లేదా హిస్టోగ్రామ్ (Histogram)

(3) బాహుభుజి (Freqnecy Polygon)

(4) సంచిత పౌన : పున్య రేఖా చిత్రాలు లేదా ఓజివ్ వక్రరేఖలు (Ogive or Cumulative Frequency curves)

(5) పౌన : పున్య వక్రరేఖ (Frequency curves)

(6) లారెంజ్ వక్రరేఖ (Lorenze curve)

(a) పౌన : పున్య సరళ రేఖా చిత్రాలు (Vertical Line Graphs)

ఈ రకమైన రేఖా చిత్రపటాల్లో x అక్షంపై చలాంకపు విలువలను తగిన స్కేలుతో గుర్తించి, x అక్షానికి నిలువుగా ప్రతి విలువ దగ్గర దానికి సంబంధించిన పౌన : పున్య విలువను బట్టి నిలువుగా సరళరేఖలు గీస్తారు. అంటే ఈ సరళరేఖ ఎత్తు అది x అక్షంపై ఉండే స్థానం దగ్గర ఉన్న చలాంకపు విలువ యొక్క పౌన : పున్యాన్ని సూచిస్తుందన్నమాట.

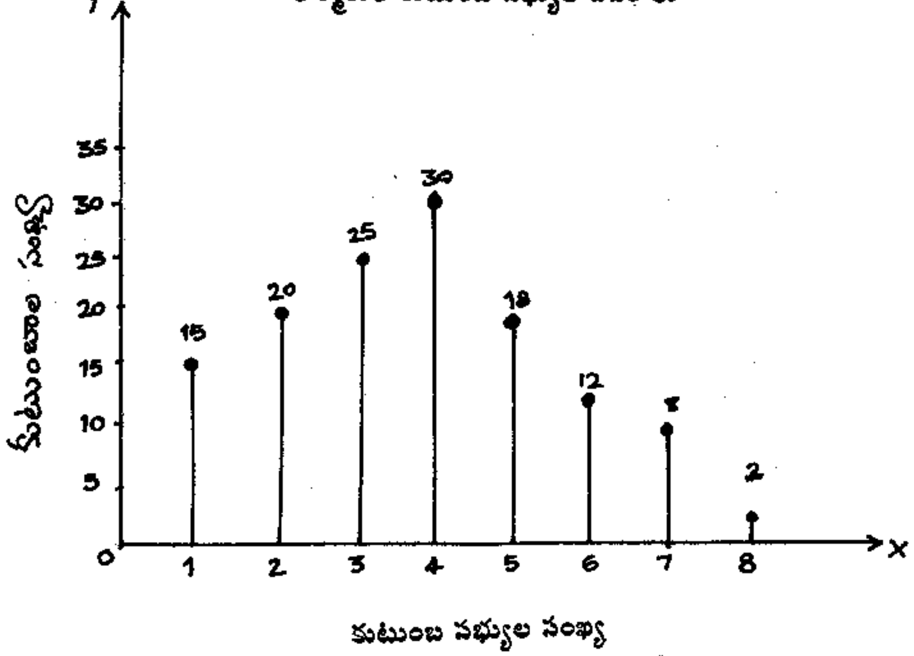
ఉదా : కార్మిక కుటుంబాల, కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్యకు సంబంధించిన వివరాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

పట్టిక 16. 13

కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య (X)	కుటుంబాల సంఖ్య (f)
1	15
2	20
3	25
4	30
5	18
6	12
7	8
8	2

BRAOU

కార్మికుల కుటుంబ సభ్యుల వివరాలు



శ్రేణిలోని అంశాలు ఏ విలువ చుట్టూ కేంద్రీకృతమైవున్నాయనే విషయాన్ని ఈ సరళ రేఖా చిత్ర పటం ద్వారా కొంతవరకు అవగాహన చేసుకోవచ్చు. పై ఉదాహరణలో ఎక్కువ కుటుంబాల్లోకుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య 3 నుండి 5 వున్నదని గమనించవచ్చు. అయితే ఈ సరళరేఖా చిత్రాలు దత్తాంశంపై ఉదాహరణలో మాదిరిగా విరళశ్రేణి (discrete series) రూపంలో వున్నప్పుడు మాత్రమే ఉపయోగించడం మంచిది.

b. సోపాన చిత్ర పటము లేదా బార్ చిత్రపటము (Histogram)

సోపాన చిత్రపటాన్ని అవిరళశ్రేణి (continuous series) దత్తాంశ విషయంలో వుపయోగిస్తారు. దీనిలో కూడా x అక్షంపై చలాంకము విలువలనూ, y అక్షంపై పౌన : పున్యాలను సూచిస్తాము. అయితే ఇక్కడ నిలువు రేఖలకు బదులుగా దీర్ఘచతురస్రము గీస్తారు. తరగతి అంతరాన్ని (class width) దీర్ఘ చతురస్రపు వెడల్పుగాను, ఆ తరగతి తాలూకు పౌన : పున్యాన్ని దీర్ఘ చతురస్రపు ఎత్తుగాను తీసుకొంటారు. అందువల్ల ఒక్కొక్క దీర్ఘ చతురస్రపు వైశాల్యము, ఆ తరగతి అంతరము మరియు దాని పౌన : పున్య లబ్దానికి సమానమన్న మాట. అయితే దీర్ఘ చతురస్రం వెడల్పు తరగతి అంతరాల్ని సూచిస్తుంది గాబట్టి తరగతి అంతరాలు సమానంగా వున్నపుడు, మరియు సమానంగా లేనపుడు సోపాన చిత్రపట నిర్మాణం వేరు వేరుగా వుంటుంది. అయితే ఇక్కడ బార్ చిత్రపటమూ, సోపాన చిత్రపటమూ ఒకే విధంగా అనిపించినప్పటికీ, ఆ రెండింటి మధ్య తేడాను గమనించాలి. బార్ పటంలో వరుసగా వుండే బార్‌ల మధ్య సమానం అయిన కొంత అంతరం ఉంటుంది. కాని సోపాన చిత్రపటంలోని ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రం తరువాత దానికి ఆసన్నంగా వుంటుంది (rectangles are adjacent to each other). అంటే వాటి మధ్య ఏమీ ఖాళీ ఉండదన్న మాట. బార్ పటంలోని దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పుకు ఎట్లాంటి ప్రాధాన్యము వుండదు. కాని సోపాన చిత్రపటంలో దీర్ఘ చతురస్రాల వెడల్పు తరగతి అంతరాన్ని బట్టి వుంటుంది. అంటే సోపాన చిత్రపటంలో X మరియు Y అక్షాలపై స్కేలు వుంటుంది. ఇప్పుడు సోపాన చిత్రాన్ని నిర్మించే పద్ధతుల గురించి వివరంగా తెలుసుకొందాము.

BRAOU

తరగతి అంతరాలు సమానంగా వున్నపుడు సోపాన చిత్రపటాన్ని నిర్మించడం (Histogram when class intervals are equal)

సోపాన చిత్రపట నిర్మాణంలో మనం ఒక ముఖ్యమైన ప్రమేయాన్ని చేస్తాము. అదేమంటే ఒక తరగతి అంతరములోవున్న పౌన:పున్యము ఆ తరగతి అంతరంలో వున్న విలువల మధ్య సమానంగా పంపిణీ అవుతుంది. ఉదాహరణకు 10 - 20 అనే తరగతి అంతరములో 50 అంశాలున్నపుడు చలాంకము 10, 11, ... 19 అనే 10 విలువలలో ప్రతి విలువ దగ్గరా ఐదేసి అంశాలు వుంటాయని గ్రహిస్తామన్నమాట. అన్ని తరగతి అంతరాలు సమానంగా వున్నపుడు దీర్ఘ చతురస్రాల ఎత్తులు తరగతి అంతరాలు పౌన : పున్యాల నిష్పత్తికి అనుగుణంగా వుంటాయి.

తరగతి అంతరాలు సమానంగా వున్నపుడు Y అక్షంపై పౌన : పున్యాన్ని X అక్షంపై చలాంకపు విలువనూ తీసుకొని ఒకదానికొకటి ఆసన్నంగా వున్న దీర్ఘచతురస్రాల ద్వారా పౌన : పున్య సోపాన చిత్రపటాన్ని గీయాలి. దీర్ఘ చతురస్రాల ఎత్తులు తరగతి అంతరాల పౌన : పున్య విలువల నిష్పత్తిలో వుండాలి.

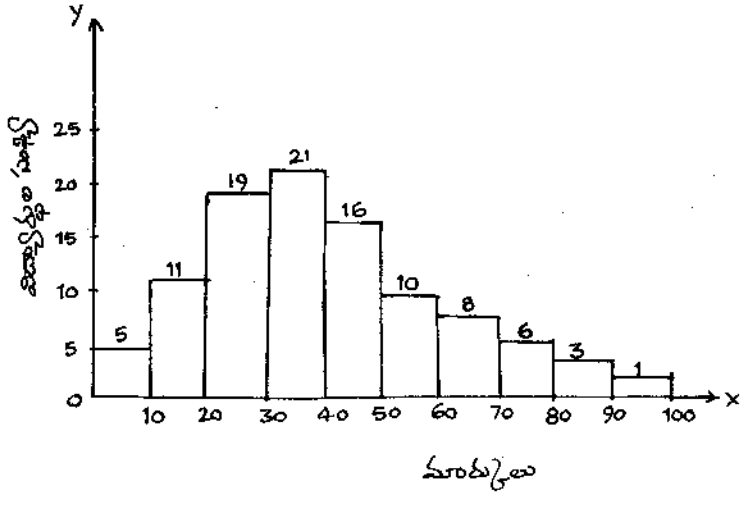
ఉదా : ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి సోపాన చిత్రపటాన్ని గీయండి.

పట్టిక 16.14

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 - 10	5	50 - 60	10
10 - 20	11	60 - 70	8
20 - 30	19	70 - 80	6
30 - 40	21	80 - 90	3
40 - 50	16	90 - 100	1

BRAOU

సోపాన చిత్రపటము (వంద విద్యార్థుల మార్కులు)



తరగతి అంతరాలు సమానంగా లేనపుడు సోపాన చిత్రపటాన్ని నిర్మించడం (Histogram when class intervals are not equal)

ఇవ్వబడిన దత్తాంశంలో తరగతి అంతరాలు సమానంగా లేనప్పుడు సోపాన చిత్ర పటాన్ని నిర్మించే ముందు తరగతి అంతరాలు సమానం చేస్తూ పౌన : పున్యాన్ని సవరించాలి. అనగా ప్రతి తరగతి అంతరంలో నున్న పౌన : పున్య సాంద్రతను కనుక్కోవడం ద్వారా దత్తాంశాన్ని సవరించాలి. అన్నింటి కంటె తక్కువగా ఉన్న తరగతి అంతరం ఆధారంగా మిగతా తరగతి అంతరాలను ఈ విధంగా సవరించాలి. కనిష్ఠ తరగతి అంతరానికి రెండు రెట్లు ఎక్కువ అంతరం ఉన్న తరగతి పౌన : పున్యాన్ని సూచించే దీర్ఘ చతురస్రం ఎత్తును సగానికి తగ్గించాలి. అదేవిధంగా కనిష్ఠ అంతరం ఉన్న తరగతి దీర్ఘ చతురస్రాన్ని మూడవ వంతుకు తగ్గించాలి. ఇదే విధంగా తరగతి అంతరాల పౌన : పున్య సాంద్రతను బట్టి వాటిని సవరించాలి.

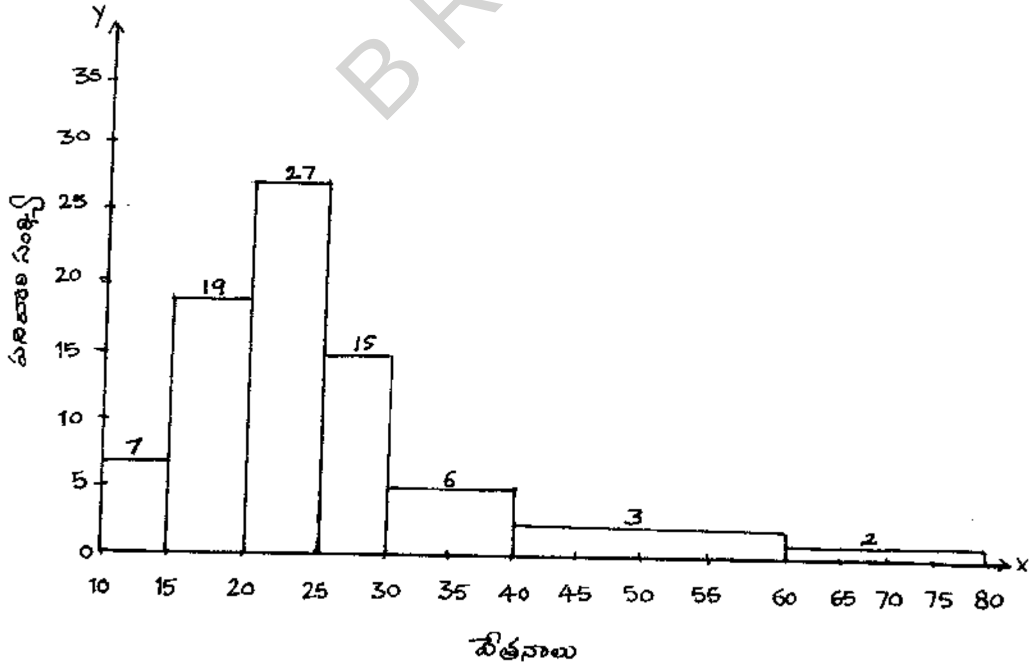
క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశంలో ఉన్న అసమాన తరగతి అంతరాలను సవరించి దానికి సంబంధించిన సోపాన చిత్ర పటం గీయబడినది.

పట్టిక 16. 15

వేతనములు (రూపాయలలో)	పనివారు	వేతనములు (రూ ॥ లలో)	పనివారు
10 - 15	7	30 - 40	12
15 - 20	19	40 - 60	12
20 - 25	27	60 - 80	8
25 - 30	15		

BRAOU

సోపాన చిత్ర పటము



పైన ఇవ్వబడిన సోపాన చిత్ర పటములో 30 - 40 తరగతి అంతరము యొక్క పౌన:పున్యము 12 అయినప్పటికి దానికి సంబంధించిన దీర్ఘ చతురస్రం ఎత్తు మాత్రం సగానికి అంటే 6కు తగ్గించబడినది. ఈ తరగతి అంతరము కనిష్ఠ తరగతి అంతరానికి రెండింతలుగా వున్నందువలన ఈ విధంగా తగ్గించబడినది. అదే విధంగా 40 - 60, 60 - 80 తరగతి అంతరాల దీర్ఘ చతురస్రాల ఎత్తు నాలుగవ భాగానికి తగ్గించబడినది. అంటే 30 - 40 అనే తరగతిని 30 - 35, 35 - 40 అనే రెండు భాగాలుగా ఊహించినట్లయితే 30 - 40 లోని 12 అంశాల్లో ఆరు అంశాలు 30 - 35 అనే తరగతిలోను మిగతా ఆరు అంశాలు 35 - 40 అనే తరగతిలో ఉన్నాయని ఊహిస్తున్నామన్నమాట.

తరగతి అంతరాల మధ్య విలువలు ఇవ్వబడినప్పుడు సోపాన చిత్రపటాన్ని నిర్మించడం :

ఇవ్వబడిన దత్తాంశం తరగతి అంతరాలు కాకుండా వాటి మధ్య విలువలు మాత్రమే ఇవ్వబడినప్పుడు తరగతి అంతరాల ఎగువ మరియు దిగువ అవధులను కనుక్కొని పౌన:పున్యాల ఆధారంగా సోపాన చిత్ర పటాన్ని గీయవలె.

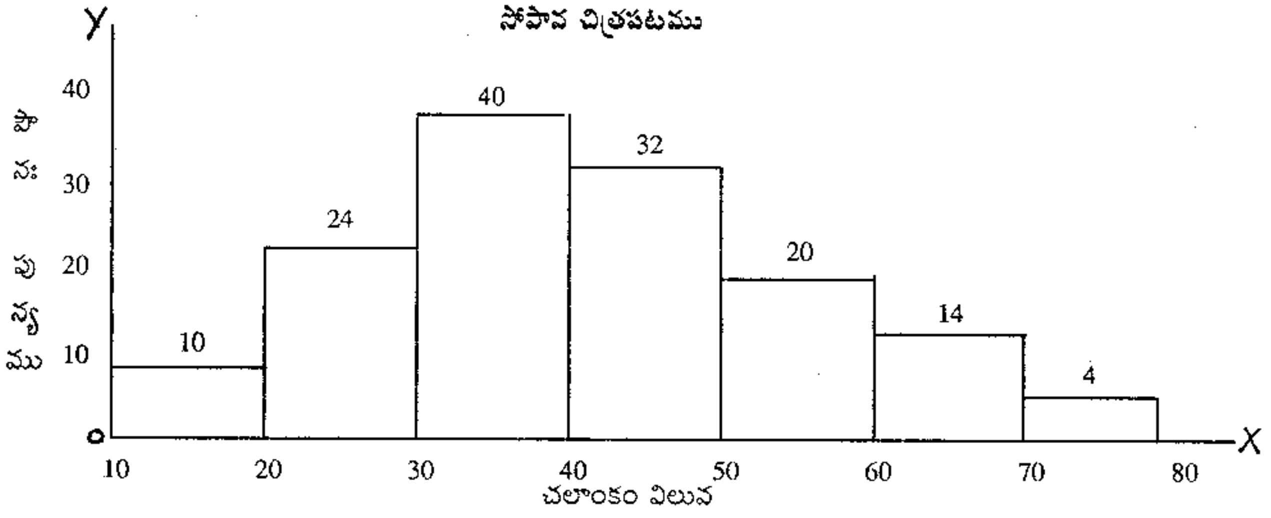
మధ్యవిలువ	15	25	35	45	55	65	75
పౌన : పున్యము	10	24	40	32	20	14	4

పైన ఇవ్వబడిన సమాచారానికి మధ్య విలువల ఆధారంగా తరగతి అంతరాల దిగువ, ఎగువ అవధులను కనుక్కోవాలి.

పట్టిక 16. 16

తరగతి అంతరాలు	f
10 - 20	10
20 - 30	24
30 - 40	40
40 - 50	32
50 - 60	20
60 - 70	14
70 - 80	4

సోపాన చిత్రపటము



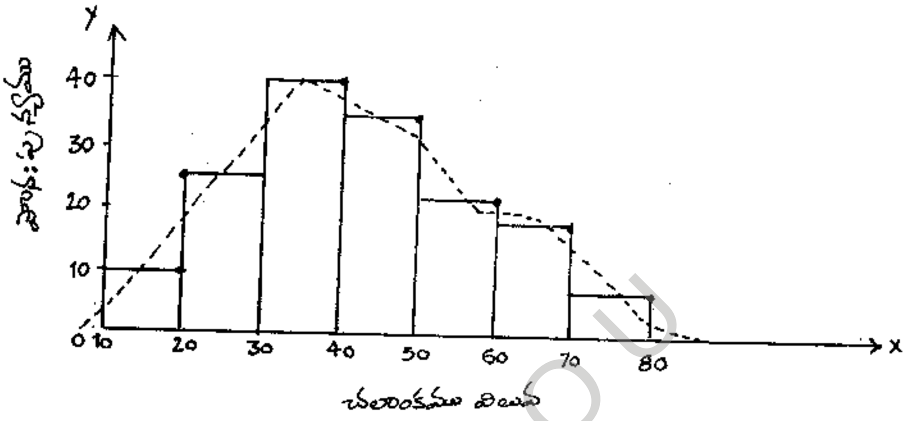
C. పౌన : పున్య బహుభుజి (Frequency Polygon)

పౌన : పున్య విభాజనాన్ని సూచించే రేఖా చిత్రపటాన్నే పౌన : పున్య బహుభుజి అంటారు. పౌన : పున్య బహుభుజిని నిర్మించడానికి రెండు పద్ధతులు అవలంబిస్తారు.

1. మొదటి పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని సోపాన చిత్రపటాన్ని గీసి ఆ చిత్రంలోని ప్రతి దీర్ఘచతురస్రపు శిఖరంలో మధ్య బిందువులను గుర్తిస్తారు. ఈ బిందువులను సరళ రేఖలతో కలిపితే పౌన : పున్య బహుభుజి ఏర్పడుతుంది. కాబట్టి పై సోపాన చిత్రంలోని ప్రతి చతురస్రం శిఖరంలోని మధ్య బిందువు గుండా సరళరేఖలు గీసి పౌన : పున్య బహుభుజి నిర్మించవచ్చు. ఐతే కొందరు గణాంక శాస్త్రజ్ఞులు సోపాన చిత్ర పటంలోని రెండు చివరలను ఆధార రేఖకు కలిపే సరళరేఖలను కూడా గీయవలెనని సూచించారు.

ఉదా : పైన గీసిన సోపాన చిత్ర పటానికి పౌన : పున్య బహుభుజిని గీయండి.

పౌన : పున్య బహుభుజి (Frequency Polygon)



రెండవ చిత్రంలో సోపాన చిత్రం గీయునవసరం లేకుండా బహుభుజిని నిర్మిస్తాము. ఈ పద్ధతిలో ఒక్కొక్క తరగతి అంతరము మధ్య విలువ గణించి ఆ తరగతి తాలూకు పౌన : పున్యాన్ని ఈ మధ్య విలువకు ఎదురుగా గుర్తించవలె. ఇట్లా గుర్తించిన బిందువులన్నింటిని సరళ రేఖలతో కలిపితే పౌన : పున్య బహుభుజి ఏర్పడుతుంది. పై రెండు పద్ధతులలో మొదటి పద్ధతినే ఎక్కువగా వాడుతారు.

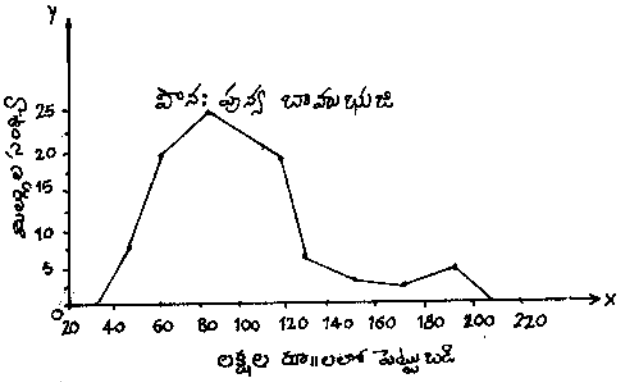
ఉదా : క్రింది విభాజనానికి మధ్య బిందువులను కలపడం ద్వారా పౌన : పున్య బాహుభుజికి నిర్మించండి.

పట్టిక 16. 17

పెట్టుబడి (లక్షలలో)	మిల్లుల సంఖ్య
40 - 60	7
60 - 80	19
80 - 100	23
100 - 120	19
120 - 140	7
140 - 160	4
160 - 180	2
180 - 200	3

తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులు మరియు ఇతర తరగతి అంతరాల పౌన : పున్యాల ఆధారంగా రెండవ పద్ధతిలో పౌన : పున్య బాహుభుజిని నిర్మించడం.

పౌన : బహుభుజి



పై పటంలో బాహుభుజిలోని మూలబిందువులు (corner points) ఆయా తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులకు సూటిగా వుండడాన్ని గమనించవచ్చు.

సోపాన చిత్రము, బాహుభుజి. ఒకే పౌన : పున్య విభాజనానికి సంబంధించినవి కనుక వాటి వైశాల్యములు సమానంగా వుండాలి. అందువల్ల దత్తాంశానికి మరి రెండు తరగతులు చేర్చి (20 - 40, 200 - 220) పౌన : పున్య బాహుభుజిని ఆధారరేఖ వద్ద - పొడిగించడమయినది.

d. పౌన : పున్య వక్రరేఖ (Frequency Curve)

పౌన : పున్య వక్రరేఖా చిత్రాన్ని బహుభుజిలోని వివిధ బిందువుల గుండా స్వేచ్ఛగా సరసవక్రరేఖ (smooth curve) గీయడం ద్వారా నిర్మిస్తారు. అయితే ముందు సోపాన చిత్రాన్ని, తరువాత బాహుభుజిని గీసి ఆ తరువాత సరస వక్రాన్ని గీయడం సులభంగా వుంటుంది. పౌన : పున్య వక్రరేఖను గీసేటప్పుడు ఆ వక్ర వైశాల్యం బాహుభుజి వైశాల్యానికి సమానంగా ఉండవలెననే విషయాన్ని దృష్టిలో వుంచుకోవాలి. పౌన : పున్య బాహుభుజిలో అన్నింటికన్న ఎత్తైన బిందువుకు పైగా ఉండేటట్లు వక్రశిఖరాన్ని గంటాకారంగా మలచాలి. ఆధారరేఖ వద్ద వక్రాన్ని బాహుభుజిని దాటే విధంగా ఇరువైపుల కొంచెం పొడిగించాలి.

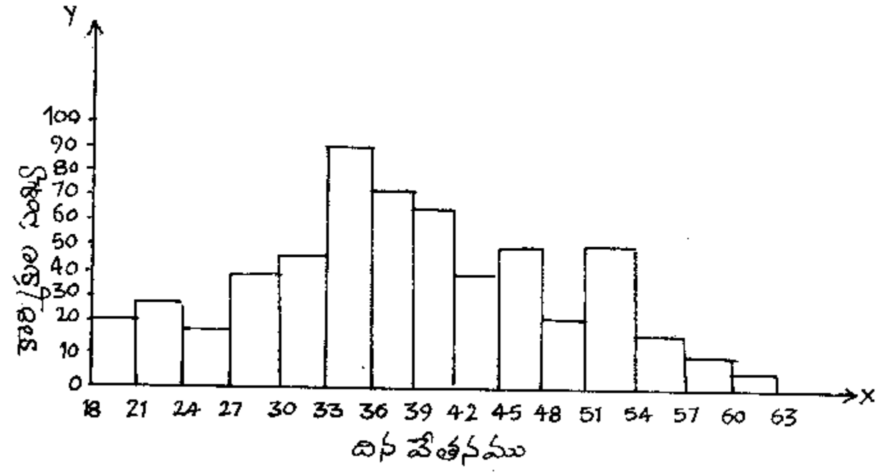
BRAOU

క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి ముందుగా సోపాన చిత్ర పటాన్ని వేరుగాను తరువాత బాహుభుజిని మరియు పౌన : పున్య వక్రరేఖా చిత్రాలను కలిపి గీయడమైనది.

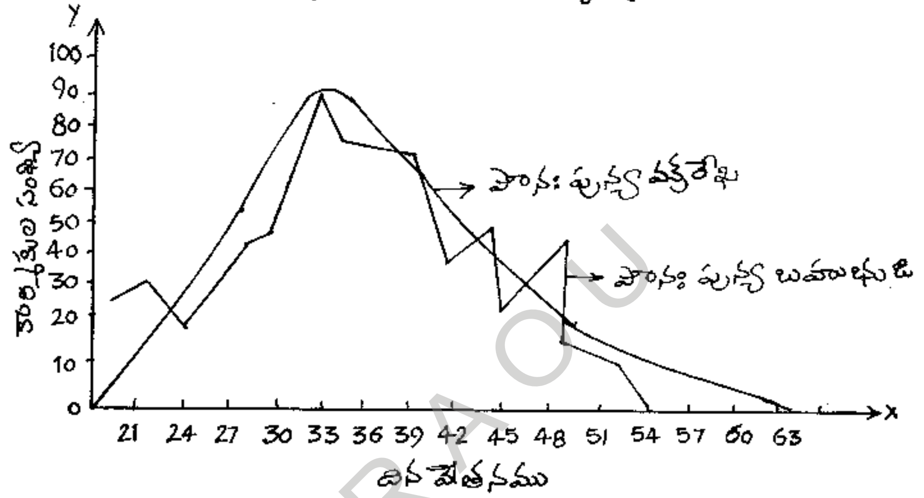
పట్టిక 16. 18: కార్మికుల వేతనాలు

దినవేతనము (రూ॥లలో)	కార్మికులసంఖ్య(f)	దినవేతనం	కార్మికులసంఖ్య(f)
18 - 21	21	42 - 45	36
21 - 24	29	45 - 48	45
24 - 27	19	48 - 51	27
27 - 30	39	51 - 54	48
30 - 33	43	54 - 57	21
33 - 36	94	57 - 60	12
36 - 39	73	60 - 63	5
39 - 42	68		

సోపాన చిత్రము



పౌన : పున్య బహుభుజి - పౌన : పున్య వక్రరేఖ



BRAOU

e. సంచిత పౌన : పున్య వక్రరేఖలు లేదా ఓజివ్ రేఖలు

కొన్ని సందర్భాలలో, ఒక ఫ్యాక్టరీలో రూ ॥ 700 కంటె తక్కువ నెలసరి వేతనం ఉన్న కార్మికులు ఎంతమంది ఉన్నారు ? లేదా రూ ॥ 4000 కంటె ఎక్కువ నెలసరి వేతనం ఉన్న కార్మికులు ఎందరున్నారు ? లేదా ఎంత శాతం విద్యార్థులు ఉత్తీర్ణులయినారు ? అనే అంశాలు మనం తెలుసుకోవాలన్నపుడు పౌన : పున్యాలను సంచితం చేయవలసి ఉంటుంది. ఇట్లాంటి వాటిని సంచిత పౌన : పున్య విభాజనాలు అంటారని ఇది వరకే తెలుసుకొన్నాము. అయితే సంచిత పౌన : పున్యాలను రేఖా చిత్రాల ద్వారా చూపినప్పుడు వాటిని సంచిత పౌన : పున్య రేఖా చిత్రం అంటారు. సంచిత పౌన : పున్య రేఖలను ఓజివ్ రేఖలు అని కూడా అందురు. సంచిత పౌన : పున్యాలు ఆరోహణ (Less than) మరియు అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యాలు (More than cumulative frequences) అని రెండు రకాలుంటాయని కూడా ముందు తెలుపడమైనది. అదే విధంగా సంచిత పౌన : పున్య వక్రరేఖలు కూడా ఆరోహణ పౌన : పున్య వక్రరేఖ (Less than ogive) మరియు అవరోహణ పౌన : పున్య వక్రరేఖ (More than ogive) అని రెండు రకాలుగా ఉంటుంది. వీటి నిర్మాణాన్ని గురించి ఇపుడు విపులంగా తెలుసుకొందాము.

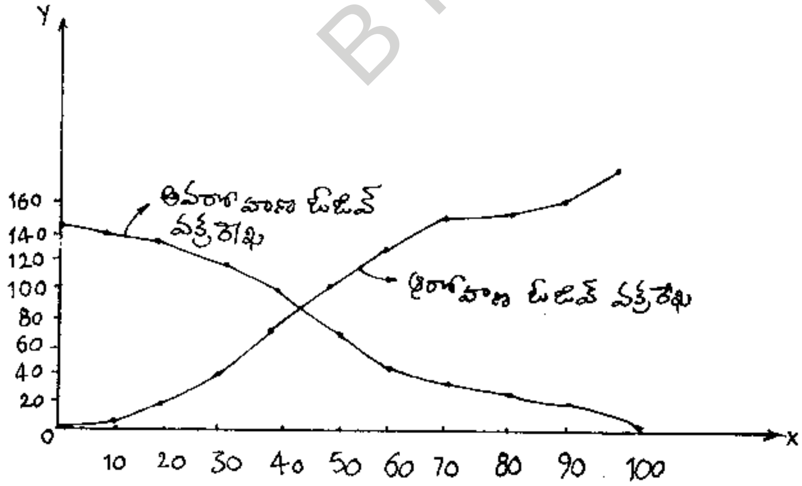
ఉదా : క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి సంచిత పౌన : పున్య వక్రరేఖా చిత్రపటాలను నిర్మించండి.

పట్టిక 16.19

తరగతి అంతరం	పౌన : పున్యము	ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్యము	అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యము
0 - 10	5	10 కంటె తక్కువ 5	0 కంటె ఎక్కువ 143
10 - 20	12	20 కంటె తక్కువ 17	10 కంటె ఎక్కువ 138
20 - 30	20	30 కంటె తక్కువ 37	20 కంటె ఎక్కువ 126
30 - 40	25	40 కంటె తక్కువ 62	30 కంటె ఎక్కువ 106
40 - 50	40	50 కంటె తక్కువ 102	40 కంటె ఎక్కువ 81
50 - 60	15	60 కంటె తక్కువ 117	50 కంటె ఎక్కువ 41
60 - 70	10	70 కంటె తక్కువ 127	60 కంటె ఎక్కువ 26
70 - 80	8	80 కంటె తక్కువ 135	70 కంటె ఎక్కువ 16
80 - 90	5	90 కంటె తక్కువ 140	80 కంటె ఎక్కువ 8
90 - 100	3	100 కంటె తక్కువ 143	90 కంటె ఎక్కువ 3

ఇపుడు పై దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ మరియు అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్య లేదా ఓజివ్ వక్రరేఖల చిత్రపటాలను క్రింది పటంలో చూపినట్లు గీద్దాం.

ఓజివ్ వక్రరేఖల చిత్రపటము



B R A O U

దత్తాంశంలోని ఎన్ని అంశాలు ఒక విలువ కంటె తక్కువ వున్నాయనే విషయాన్ని ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్య వక్రరేఖను పరిశీలించడం ద్వారా సులభంగా గ్రహించవచ్చు. ఉదా : 40 కంటె తక్కువ విలువ

వున్న అంశాలు ఎన్ని వున్నాయనే విషయాన్ని తెలుసుకొవాలన్నప్పుడు X అక్షంపై 40 విలువ వున్న స్థానం నుండి ఒక నిలువు రేఖను ఆరోహణ ఓజివ్ రేఖ వరకు గీయాలి. ఈ రేఖ ఓజివ్‌ను తాకే స్థానం నుండి Y అక్షాని ఒక అడ్డరేఖను గీయాలి. ఈ రేఖ Y అక్షాన్ని తాకే చోట వుండే విలువ 40 కంటె తక్కువ విలువ వున్న అంశాల సంఖ్య (ఉదా : పై పటంలో 62) ను చూపుతుంది. అదేవిధంగా పై పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక విలువ కంటె ఎక్కువ విలువ వున్న అంశాలు ఎన్నో అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్య వక్రరేఖ ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు.

16.19 గణాంక చిత్రపటాల పరిమితులు

గణాంక దత్తాంశ సమర్పణలో చిత్రపటాలు శక్తివంతమైన ప్రచార సాధనాలుగా గుర్తించబడినప్పటికీ వీటికి కొన్ని పరిమితులు లేకపోలేదు. అన్ని సందర్భాలలోను ఇవి గణాంక పట్టికలు మరియు ఇతర దత్తాంశ సమర్పణ పద్ధతులు ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతులు కాలేవు.

చిత్రపటాలకున్న ముఖ్యమైన పరిమితులను ఈ క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చును.

1. ఖచ్చితమైన విలువలను చిత్రపటాల ద్వారా చూపించడం అంత సులభం కాదు.
2. పరిమితమైన సమాచారాన్ని మాత్రమే చిత్రపటాల ద్వారా చూపించవచ్చు.
3. చిత్రపటాల ముఖ్యోద్దేశము సాధారణ జనానికి గణాంక సమాచారాన్ని తెలియజేయడం. కాని గణాంక సమాచార విశ్లేషణలో గణాంక శాస్త్రజ్ఞునికి వీటి ఉపయోగం తక్కువ.
4. వాణిజ్య వ్యాపార రంగాల్లోనూ మరియు ఎన్నికల ప్రచారాలలోనూ వీటిని దుర్వినియోగం చేసే అవకాశం ఎక్కువ.

16.20 సారాంశం

ఆర్థిక విశ్లేషణలలో గణాంక దత్తాంశం పాత్ర ప్రధానమైనది. గణాంక దత్తాంశాన్ని సేకరించి తగు విధంగా వర్గీకరించడం ద్వారా దానిలో ఇమిడివున్న కొన్ని సంక్లిష్ట అంశాలను అర్థం చేసుకోవచ్చు. అయితే అధ్యయన లక్ష్యాన్ని బట్టి , వున్న పరిమితులకు లోబడి తగిన దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతిని అనుసరించాలి.

ఒక దృగ్విషయానికి సంబంధించిన చలరాశి దత్తాంశానికి పౌన : పున్య విభాజనాన్ని నిర్మించి, దానిని పరిశీలించడం వల్ల ఆ విషయానికి సంబంధించిన ఎన్నో ప్రవృత్తులను తెలుసుకోవచ్చు. చలరాశి ప్రవర్తనలోని తీరు తెన్నులు, దత్తాంశంలోని అంతర్గతంగా ఉండే కొన్ని స్వభావాలు, వాటి పౌన : పున్య విభాజనంలో విశదంగా బహిర్గతమవుతుంది. అయినా కూడా ఆ దత్తాంశాన్ని రేఖా చిత్రాల రూపంలో ప్రదర్శించడం వల్ల దత్తాంశం లోని అరూపత (abstractness) ను పోగొట్టే దృగ్విషయ పరిశీలనకు సహాకారభావంతో నిర్వహించవచ్చు. సాంఖ్యక పరిజ్ఞానం ఉన్న వారికి కూడా కొన్ని దత్తాంశాలను, పట్టికలను, గ్రాఫ్స్ పై నిర్మించడం ద్వారానే విక్షేపాలు భవితవ్య విలువలూ మొదలైన విశ్లేషణలు చేయడానికి వీలవుతుంది.

16.21 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1.	తెలుగు అకాడమి	:	ఆర్థిక విశ్లేషణ పద్ధతులు
2.	R.G.D. Allen	:	Mathematics for Economists

3. A.L. Nagar & Das : Statistics
4. Frank Jr. : Mathematics & Statistics for Economists
5. S.P. Gupta : Statistical Methods
6. Macmillan Teach Yourself Series : Statistics
7. Taro Yamane : Statistics

16.22 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు 30 - 40 పంక్తులలో సమాధానాలు వ్రాయండి.

1. దత్తాంశమనగానేమి ? ఆర్థిక విశ్లేషణలో దత్తాంశము పాత్రను వివరింపుము.
2. దత్తాంశము ఎన్ని రకములు ? వాటిని వివరించుము.
3. దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను విమర్శనాత్మకముగా వివరించుము.
4. దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి అర్థం చేసుకోవడంలో చిత్రపటాలు ఏవిధంగా ఉపకరిస్తాయో తెలుపుము.
5. పౌన : పున్యమనగా నేమి ? దానిని గురించిన వివిధ భావనలను తెలుపుము.
6. సోపాన చిత్రపటము మరియు పౌన : పున్య వక్రరేఖల ఉపయోగాన్ని తెలుపుము.

II. క్రింది ప్రశ్నలకు 15 - 20 పంక్తులలో జవాబులు రాయండి.

1. ప్రతిరూపమనగా నేమి ?
2. ప్రతిరూప దోషాలను తెలుపుము ?
3. బార్ చిత్ర పటమనగానేమి ?
4. ఓజివ్ వక్ర రేఖలను వివరించుము.

16.23 పదకోశము

శాస్త్రీయ పరిశోధన	Scientific investigation
సాంఖ్యక దత్తాంశము	Statistical data
దత్తాంశ సేకరణ	Data collection
పరిశీలకుడు	Investigator)
ప్రాధమిక దత్తాంశము	Primary Data

B R A O U

17.1 పరిచయం

దత్తాంశాన్ని సూక్ష్మీకరించి, వర్గీకరించి, పట్టికలు మరియు పౌన: పున్య విభాజనాలుగా వ్రాసి రేఖా పటాల ద్వారా సూచించినప్పుడు పరిశీలించవలసిన విషయం కొంత వరకు గ్రాహ్యమవుతుంది. అయితే కొన్ని సందర్భాలలో ఒకే రకమైన రెండు దత్తాంశాలను పోల్చవలసినప్పుడు ఆ రెండు దత్తాంశ విలువలు ఏ ఏ విలువల వద్ద కేంద్రీకరించబడినవో తెలుసుకోవడం చాలా అవసరం. ఉదాహరణకు రెండు జిల్లాలలోని కుటుంబ సంవత్సరిక ఆదాయాన్ని పోల్చి ఏది దేనికంటే అభివృద్ధి చెందిన జిల్లాయో నిర్ణయించవలసినప్పుడు ఆయా జిల్లాలలోని కుటుంబాల ఆదాయాలు ఏ స్థాయిలో కేంద్రీకరించబడి వున్నవో తెలుసుకోవడం అవసరం. ఈ ఉదాహరణలోని జిల్లాలలోని కుటుంబ ఆర్థిక పరిస్థితిని తెలుసుకోవడానికి సగటు లేదా సరాసరి కుటుంబ ఆదాయాన్ని ప్రాతినిధ్య విలువగా పరిగణించవచ్చు. అయితే ఈ సగటు విలువ ఎంత మేరకు ప్రాతినిధ్య విలువ అనే విషయం కూడా అతి ముఖ్యమైనది. దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలు ఈ సగటు విలువకు ఎంత దగ్గరగా వున్నాయి లేదా ఎంత దూరంగా ఉన్నాయి అనే విషయాన్ని అంచనా వేయడం ద్వారా సగటు విలువ యొక్క ప్రాతినిధ్యాన్ని నిర్ణయించవచ్చు.

కాబట్టి దత్తాంశ విశ్లేషణలో సగటుల గణన మరియు అంశాల విస్తరణ కొలత ముఖ్యమైనది. గణాంక విశ్లేషణలో తరచుగా ఉపయోగించే వివిధ కేంద్ర స్థానపు కొలతల గురించి ఈ విభాగంలో వివరించడం జరిగింది. విస్తరణ కొలతల గురించి తరువాతి అధ్యాయంలో తెలుసుకుంటారు.

17.2 కేంద్ర స్థానపు కొలతలు - అర్థవివరణ

శ్రేణులకు ప్రాతినిధ్యం వహించే విలువను " సగటు లేదా సరాసరి " అంటారు. ఒక మొత్తం శ్రేణికి ఇట్లా ప్రాతినిధ్యం వహించే విలువ శ్రేణిలోని అత్యల్ప విలువగా గాని, అత్యధిక విలువగా గాని ఉండకుండా సాధారణంగా ఆ శ్రేణికి కేంద్ర స్థానంలో ఉంటుంది. అందువల్ల ఇటువంటి విలువలను కేంద్రీయ ప్రవృత్తి మానాలు అంటారు (measures of central tendency) . వీటినే గణాంక సగటులు అని, ప్రథమ వర్గ మాధ్యమాలు (averages of the first order) అని కూడా వ్యవహరిస్తారు.

BRAOU

సగటుమ గణవ చేయడంలో ఉండే ఉద్దేశాలు :

1. దత్తాంశ లక్షణాన్ని సంగ్రహంగా విశదీకరించడం.
2. వివిధ దత్తాంశాలను పోల్చడం

సగటును గురించి గుర్తుంచుకోవలసిన ముఖ్య విషయమేమంటే శ్రేణిలోని చలాంకం ఏ ప్రమాణంలో ఉంటే సగటు కూడా అదే ప్రమాణంలో ఉంటుంది. ఉదాహరణకు చలాంకం రూపాయలలో ఉంటే సగటు కూడా రూపాయలలో ఉంటుంది. చలాంకం సెంటీ మీటర్లు అయితే సగటు కూడా సెంటీమీటర్లు అవుతుంది.

డి.సి. జోన్స్ (D.C. Jones) సగటును ఇట్లా నిర్వచించాడు : "ఏక కుటుంబానికి చెందిన కొన్ని పరిమాణాలు లేదా ఫలితాలను కుదించి చెప్పే గణాంక సంఖ్యల తరగతికి చెందిని దానిని సగటు "గా చెప్పవచ్చు. వేరొక శాస్త్ర వేత్త " బహువర్గీకృతమై యున్న పెద్ద సంఖ్యల కేంద్రీకరణ తాలూకు నికర ఫలితాన్ని అతి సులువుగా ఒకే ఒక్క మాటలో చెప్పేదానిని సగటు " అంటారని నిర్వచించినాడు.

పై కారణం వల్లనే కాబోలు బౌలీ (Bowley) అనే గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడు గణాంక శాస్త్రాన్ని సగటుల శాస్త్రమని వివరించాడు.

1.7.3 ఆదర్శ సగటు లక్షణాలు (Characteristics of an Ideal Average)

1. సగటును నిర్దిష్టంగా నిర్వచించాలి. సగటు నిర్వచనాన్ని స్పష్టంగా ఒకే ఒక అర్థం ఇచ్చే విధంగా చెప్పాలి. సగటును స్పష్టంగా నిర్వచించకుండా విచారణ కర్త ఇష్టానికి వదిలివేస్తే అది అతని పాక్షికతకు గురి కావచ్చు. అట్లా అయితే సగటు ఒక ఖచ్చితమైన విలువగా (definite figure) కాకుండా ఒక్కొక్కరికి ఒక్కొక్క అర్థాన్ని ఇస్తుంది.
2. సమగ్ర పరిశీలనకు సగటు ప్రతినిధిగా ఉండాలి. అట్లా కాకుండా శ్రేణిలోని కొన్ని అంశాలను వదిలివేసి గణన చేసే సగటు శ్రేణికి సరైన ప్రాతినిధ్యం వహించదు. అందువల్ల అది ఆదర్శ సగటు కాజాలదు.
3. అర్థం చేసుకోవడానికి, గణన చేయడానికి తగినంత సులభంగా ఉండాలి.
4. ప్రతిరూపాల చాంచల్యాల (fluctations of sampling) కు అతి ఎక్కువ ప్రభావితం కారాదు. ఒకే సమిష్టి నుండి తీసుకొన్న వేరు వేరు ప్రతిరూపాల సగటులతో ఎంతో కొంత తేడా ఉండడం సహజం. ఈ తేడానే ప్రతి రూపాల చాంచల్యాలు అంటారు. సగటు మంచిదైతే ఈ చాంచల్యాలు స్వల్పంగా ఉంటాయి.
5. సగటు బీజగణిత పద్ధతులకు అనువైనదిగా ఉండాలి. ఇట్లా లేకుంటే వివిధ గణాంక శ్రేణుల విడివిడి సగటుల నుంచి ఉమ్మడి సగటు గణించడం సాధ్యం కాదు. ఉదాహరణకు ఒక కాలేజీలోని వివిధ తరగతుల విద్యార్థుల సగటు ఎత్తుల నుంచి కాలేజీ మొత్తం విద్యార్థుల సగటు ఎత్తు గణించవలెనంటే, సగటు బీజగణిత పద్ధతులకు అనువుగా ఉండాలి.

17.4 సగటుల రకాలు

కేంద్రీయ ప్రవృత్తిని వివిధ పద్ధతులలో గణన చేస్తారు. కనుక సగటులు వివిధ రకాలుగా ఉంటాయి.

1. గణిత సగటులు (Mathematical Averages)

   (a) అంక మధ్యమం (Arithmetic Mean)

   (b) గుణ మధ్యమం (Geometric Mean)

   (c) హార మధ్యమం (Harmonic Mean)

2. స్థాన నిర్ణయ సగటులు (Positional Averages)

   (a) మధ్యగతం (Median)

   (b) బాహుళకం (Mode)

3. ఇతర సగటులు లేదా వ్యాపార సగటులు (Business Averages)

(a) ద్విఘాత మధ్యమం (Quadratic Mean)

(b) చలిత మధ్యమం (Moving Average)

(c) పారంపరిక సగటు (Progressive Average)

17.4.1 అంక మధ్యమము (Arithmetic Mean)

జన సామాన్యం వాడుకలో ఉన్న సగటు లేదా సరాసరి అనే పదాన్ని గణాంక శాస్త్ర పరిభాషలో " అంక మధ్యమం " అంటారు. అంటే సగటులన్నింటిలో అంక మధ్యమమే ఎక్కువ ప్రచారంలో ఉందన్నమాట. ఇది అత్యధికంగా ఉపయోగపడి అతి ప్రాముఖ్యాన్ని వహించింది కాబట్టి సామాన్యంగా దానిని మధ్యమం (Mean) లేదా సగటు అని పిలుస్తారు. అందువల్ల మనం మాట్లాడేటప్పుడు తరచుగా ఉపయోగించే " సగటు రాబడి " " సగటు వేతనం " మొదలైన పదాలు అంక మధ్యమాన్ని గూర్చే ఉపయోగిస్తున్నట్లు గ్రహించాలి. అటువంటి విలువలను ఆధారంగా గణన చేసినదే గాని స్థానాన్ని బట్టి నిర్ణయించింది కాదని గుర్తించాలి. అంటే అంక మధ్యమం గణరూపమైన సగటని (calculated average) అర్థం. ఈ అంక మధ్యమంనే $\overline{X}$ (X బార్) అనే సంకేతాక్షరముతో వాడవచ్చు. ఈ అంక మధ్యమమును చాలా సులభముగా గణన చేయవచ్చు. వీనిని గణనచేయడానికి ప్రత్యక్ష పద్ధతిని (direct method) , సూక్ష్మ పద్ధతి (short cut method) అనే రెండు పద్ధతులు అవలంబిస్తారు.

ప్రత్యక్ష పద్ధతులు : వ్యక్తిగత శ్రేణుల నుంచి అంక మధ్యమాన్ని గణనచేయడం

స్మిత్, కాస్కా (Smith, Kaska) అనేవారు అంకమధ్యమాన్ని ఈ విధంగా నిర్వచించినారు. " శ్రేణులలో వున్న అంశాల మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే వచ్చే వుత్పన్నమే (Quotient) అంకమధ్యమం. ఉదాహరణకు, శ్రేణిలోంచి అంశాలు 5, 6, 11, 14 అనుకొందాము. వాటి అంకమధ్యమం $\frac{5+6+11+14}{4}$ కు సమాన మవుతుంది. అంటే శ్రేణిలోని అంశాల సంకలనము 36 (5+6+11+14), అంశాల సంఖ్య 4 కాబట్టి అంకమధ్యమం $\left(\frac{36}{4}\right) = 9$ అవుతుంది. ఈ పద్ధతినే (సాంకేతికంగా) క్రింది విధంగా చూపవచ్చు

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{N}$$

ఇక్కడ $\overline{X}$ = అంకమధ్యమము; X_1, X_2, X_3 = అంశాల విలువలు; N = అంశాలసంఖ్య.

పై సూత్రాన్ని ఇంకా క్లుప్తంగా చెప్పడానికి సిగ్మా (sigma) ' Σ ' అనే గ్రీకు పెద్ద అక్షరాన్ని ఉపయోగిస్తారు. సిగ్మా (Σ) అంటే సంకలనము (summation) అని అర్థం. కాబట్టి $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n$ అని వివిధ అంశాల సంకలనాన్ని చూపడానికి ΣX అని వ్రాస్తే చాలు. ΣX అంటే X అనే అంశాల సంకలనం అని అర్థం. అందువల్ల పై సూత్రాన్ని ఇట్లా వ్రాయవచ్చు.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

ఉదా 1 : 10 మంది వ్యక్తుల బరువులు 120, 109, 100, 173, 151, 154, 161, 130, 141, 153 కిలోగ్రాములు అయితే సగటు బరువు ఎంతో కనుక్కోండి.

క్రమసంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N = 10
బరువు కి.గ్రా	120	109	100	173	151	154	161	130	141	153	1392

అంకమధ్యము లేదా $\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{1392}{10} = 139.2$

కాబట్టి ఒక వ్యక్తి సగటు బరువు 139.2 కి॥గ్రా॥

సూక్ష్మపద్ధతి : శ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య తక్కువగానూ, వాటి విలువలు చిన్నవిగానూ ఉన్నపుడు ప్రత్యక్ష పద్ధతి నవలంబించవచ్చు. అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగానూ వాటి విలువలు పెద్ద పరిమాణంలోనూ ఉన్నపుడు ప్రత్యక్ష పద్ధతి నవలంబిస్తే గణన చేయడం కష్టమవుతుంది. కనుక సూక్ష్మ పద్ధతి నవలంబించడం సదుపాయంగా ఉంటుంది. ఈ సూక్ష్మ పద్ధతి అంక మధ్యమం ఒక ముఖ్య ధర్మంపై ఆధారపడి వుంది. ఈ ధర్మం ఏదంటే " అంక మధ్యమం " నుంచి వ్యక్తి శ్రేణుల విచలనాల బీజీయ సంకలనం సున్నాకు ఎపుడు సమానంగా వుంటుంది.

ఉదా : 4, 6, 10, 12 అనే అంశాల అంక మధ్యమం 8. ప్రతి అంశానికి అంక మధ్యమాన్నుంచి విచలనాన్ని గణన చేస్తే అవి. -4 (4 - 8), - 2 (6 - 8) , +2 (10 - 8), + 4 (12 - 8) అవుతాయి. ఈ విచలనాలు (-4, -2, +2 +4) సంకలనం సున్నాకు సమానం అవుతుంది.

సూక్ష్మ పద్ధతిలో ఏదైనా ఒక విలువను అంక మధ్యమంగా భావించుకొంటాము. భావిత అంకమధ్యమం (assumed means) నుంచి వివిధ అంశాల విచలనాలను తీసుకొని బీజీయ చిహ్నాలతో చూపిస్తాం.

ఈ విచలనాలు బీజీయ సంకలనాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే శ్రేణిలోని ఒక్కొక్క అంశానికి భావిత అంకమధ్యమం నుంచి వుండే సగటు తేడా వస్తుంది. ఈ సగటు తేడాను అంకమధ్యమానికి కలిపితే వచ్చేదే నిజమైన అంకమధ్యమం. కాబట్టి సాంకేతికంగా దీనిని కింది విధంగా చూపవచ్చు. శ్రేణిలోని ప్రతి అంశం నుండి ఏదైనా ఒక స్థిరాంశాన్ని తీసివేసినా లేదా కలిపినా వచ్చే సగటు కూడా ఆ మేరకు తగ్గడంగాని లేదా పెరగడంకాని జరుగుతుంది.

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\sum X^1}{N} \right)$$

ఇక్కడ, $\overline{X}$ = నిజమయిన అంకమధ్యమం

A = భావిత అంకమధ్యమం

$\sum X^1$ = భావిత అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకొన్న విచలనాల సంకలనం

N = అంశాల మొత్తం.

B R A O U

ఉదా 2 : సూక్ష్మ పద్ధతి నవలంభించి ఉదా.1లో ఇచ్చిన దత్తాంశానికి అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

క్రమసంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N = 10
బరువు కి॥ గ్రా॥ X	120	109	100	173	151	154	161	130	141	153	
భావిత అంక మధ్యమం నుంచి విచలనాలు X^1	-10	-21	-30	+43	+21	+24	+31	.0	+11	+23	$\sum X^1 = +91$

అంకమధ్యమం $\overline{X} = A + \left(\frac{\sum X^1}{N}\right)$

విచలనాలు గణన చేయడానికి భావిత అంకమధ్యమాన్ని అంశాల విలువల నుంచి తీసివేయాలి. అంటే

$X^1 = X - A$ అని గుర్తుంచుకోవాలి.

అంకమధ్యమం $= 130 + \left[\frac{92}{10}\right] = 130 + 9.2 = 139.2$

కాబట్టి ఒక వ్యక్తి సగటు బరువు 139.2 క్రి॥ గ్రా. $\sum X^1$ ఋణరాశి అయితే $\left(\frac{\sum X^1}{N}\right)$ విలువను భావిత అంక మధ్యమం నుంచి తీసివేయాలి.

సూక్ష్మ పద్ధతిని అవలంబించి గణన చేసిన అంకమధ్యమం కూడా ప్రత్యక్ష పద్ధతిని అవలంబించి చేసిన దానికి సమానంగా వుంది.

$\sum X^1$ ఋణరాశి అయితే $\left(\frac{\sum X^1}{N}\right)$ విలువలను భావిత అంకమధ్యమం నుంచి తీసివేయాలి.

శ్రేణిలోని ప్రతి అంశం నుండి ఏదైనా ఒక స్థిరాంకాన్ని తీసివేసినా లేదా కలిపినా వచ్చే సగటు కూడా ఆ మేరకు తగ్గడంగాని లేదా పెరగడం గాని జరుగుతుంది.

BRAOU

ఉదా : 2,3,4,5,6 అనే ఐదు అంశాల సగటు

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

ఇప్పుడు ప్రతి అంశం నుండి ఒకటిని తీసివేయండి. అప్పుడు అంశాలు 1,2,3,4,5 అవుతాయి. వాటి సగటు 3. అంటే సగటు కూడా స్థిరాంకం మేరకు తగ్గింది. అంటే

$$\overline{X} - A = \frac{\sum (X-A)}{n}$$ A ఏదయినా స్థిరాంకం

కాబట్టి $\overline{X} = A + \frac{\sum (X-A)}{n} = A + \frac{\sum X^1}{N}$

అంకమధ్యమం యొక్క ఈ గణిత లక్షణం ఆధారంగానే సూక్ష్మపద్ధతి సూత్రం ఉపయోగిస్తారు. అదేవిధంగా అంశాలన్నింటిని ఏదైనా ఒక స్థిరాంకంలో భాగించినప్పుడు వచ్చే సగటు కూడా ఆ మేరకు

భాగఫలంగా వస్తుంది. అంటే 2, 4, 6, 8 అనే నాలుగు అంశాల సగటు 5. ఇప్పుడు అంశాలన్నింటిని 2 చే భాగించగా సగటు వస్తుంది. 2.5 అంటే మొదటి సగటు 2 చే భాగించబడినప్పుడు భాగఫలము కాబట్టి

$$\frac{\overline{X}}{C} = \frac{\Sigma \frac{X}{C}}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X/C}{N} \times C$$

ఇప్పుడు అంశాలన్నింటి నుండి ఒక స్థిరాంకం A ను తీసివేసి ఫలితాలను ఇంకొక స్థిరాంకం "C"తో భాగిస్తే

$$\frac{\overline{X} - A}{C} = \frac{\Sigma\left(\frac{X - A}{C}\right)}{N} \qquad \frac{(X - A)}{C} = d^1 x$$ అనుకొందాం.

$$\frac{\overline{X} - A}{C} = \frac{\Sigma d^1 x}{N}$$

$$\overline{X} - A = \frac{\Sigma d^1 X}{n} \times C$$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma d^1 X}{n} \times C$$ ఇదే సోపాన విచలనాల సూత్రం.

విరళ శ్రేణుల నుంచి అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడం

ప్రత్యక్ష పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో శ్రేణిలోని ప్రతి అంశం విలువలను దాని అనురూప (corresponding) పౌన : పున్యంతో గుణించాలి. ఇట్లా గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని పౌన : పున్యాల మొత్తంతో భాగిస్తే అంకమధ్యమం వస్తుంది. దీనిని సాంకేతికంగా ఇట్లా చూపవచ్చు.

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots, X_N$ అనేవి N సంఖ్యల అంశాలు అనుకొందాం.

$f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_N$ అనేవి పై అంశాల అనురూప పౌన : పున్యాలను కొందాం.

అపుడు, అంకమధ్యమం లేదా = $\overline{X} = \dfrac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \ldots + f_N X_N}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_N}$ అవుతుంది.

దీనినే క్లుప్తంగా యిట్లా వ్రాయవచ్చు.

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

BRAOU

ఇక్కడ , X = అంక మధ్యమం

$\sum fX$ = అంశాలను వాటి అనురూప పౌనః పున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనం.

$\sum f$ = పౌనఃపున్యాల మొత్తం (ఇక్కడ పౌనః పున్యాల మొత్తమే అంశాల మొత్తం కనుక $\sum f = X$ అవుతుంది)

ఉదా 3 : 100 కుటుంబాలలో ఉన్న సభ్యుల సంఖ్య క్రింది విధంగా వుంది. కుటుంబానికి సగటున ఎంతమంది సభ్యులున్నారో కనుక్కోండి.

కుటుంబంలోని సభ్యుల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
కుటుంబాల సంఖ్య	2	3	13	22	36	10	7	4	1	2

కుటుంబంలోని సభ్యుల సంఖ్య(X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
కుటుంబాల సంఖ్య (f)	2	3	13	22	36	10	7	4	1	2	N = 100
fX	2	6	39	88	180	60	49	32	9	20	$\sum fX$ = 485

B R A O U

అంకమధ్యమం లేదా $\overline{X} = \frac{\sum fX}{B}$

ఇక్కడ, $\overline{X}$ = అంకమధ్యమం

$\sum fX$ = అంశాలను వాటి అనురూవ పౌన్య పుణ్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనం

N = అంశాల సంఖ్య (పౌనః పుణ్యాల మొత్తం)

పై విలువలన్నీ ప్రతిక్షేపిస్తే $\overline{X} = \frac{485}{100} = 4.85$

కాబట్టి కుటుంబానికి సగటున సుమారు 5 గురు సభ్యులున్నారు.

సూక్ష్మపద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని గణనచేయడానికి వ్యక్తిగత శ్రేణులలో అవలంబించిన పద్ధతినే అవలంబిస్తాం. కాని భావిత అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకొన్న విచలనాలను వాటి అనురూప పౌనః పున్యాలతో గుణిస్తాం. ఈ లబ్ధాల సంకలనాన్ని పౌనఃపున్యాల మొత్తంతో భాగిస్తే వచ్చే వ్యుత్పన్నాన్ని భావిత అంకమధ్యమానికి కలుపుతాం. ఇట్లా వచ్చే ఫలితమే అంకమధ్యమం అవుతుంది. దీనిని సాంకేతికంగా ఇట్లా చూపవచ్చు.

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\sum fX^1}{N}\right)$$

ఇక్కడ, A = భావిత అంకమధ్యమం

$\sum fX^1$ = విచలనాలను వాటి అనురూప పౌన : పున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనం

N = అంశాల సంఖ్య (పౌన : పున్యాల మొత్తం).

ఉదా 4 : ఉదా 3లో ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సూక్ష్మ పద్ధతి నవలంభించి అంకమధ్యమాన్ని కనుక్కోండి.

కుటుంబంలోని సభ్యుల సంఖ్య (X)	కుటుంబాల సంఖ్య (f)	భావిత అంకమధ్యమం (5) నుంచి విచలనాలు (X^1)	fX^1
1	2	- 4	- 8
2	3	- 3	- 9
3	13	- 2	- 26
4	22	- 1	- 22
5	36	0	0
6	10	1	+ 10
7	7	2	+ 14
8	4	3	+ 12
9	1	4	+ 4
10	2	5	+ 10
	N = 100		$\sum fX^1 = 15$

అంకమధ్యమం $= \overline{X} = A + \left(\frac{\sum fX^1}{N}\right)$

ఇక్కడ, A = భావిత అంకమధ్యమం, $\sum fX^1$ = విచలనాలను వాటి అనురూప పౌన : పున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనం.

N = పౌన్యపున్యాల మొత్తం.

పై విలువలను ప్రతిక్షేపించినచో

$\overline{X} = 5 + \left(- \frac{15}{100}\right)$ = 5 - 0. 15 = 4.85.

కాబట్టి కుటుంబానికి సగటున 5గురు సభ్యులున్నారు.

B R A O U

అవిరళశ్రేణుల నుంచి అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడం

అవిరళశ్రేణికి చెందిన దత్తాంశంలో అంశాల విలువలు తరగతి అంతరాలలో వుంటాయి కనుక ఒక్కొక్క అంశపు ఖచ్చితమైన విలువను తెలుసుకోలేము. ఉదాహరణకు 50 - 60 మధ్య 10 మంది విద్యార్థులకు మార్కులు వచ్చినాయి అంటే, ఈ 10 మందిలో ఒక్కొక్కరికి ఎన్నెన్ని మార్కులు వచ్చినాయో చెప్పడం కష్టం. అందువల్ల ఒక తరగతి అంతరంలో ఉన్న అంశాలు ఆ తరగతిలో సమానంగా విస్తృతి చెందినాయని, వాటి సగటు విలువ ఆ తరగతి మధ్య బిందువు (mid point) దగ్గర వుంటుందని వూహించడం జరుగుతుంది. పై వుదాహరణను తీసుకొంటే 10 మంది విద్యార్థులలో కొందరికి 51, 52, 53 మార్కులు వస్తే ఇంకా కొందరికి 57, 58, 59 మార్కులు వచ్చి ఉండవచ్చు. అందువల్ల ఈ 10 మంది విద్యార్థుల సగటు మార్కులు ఆ తరగతి మధ్య విలువ (mid value) అయితే 55 కు సమానంగా వుంటాయని వూహించడం అవుతుంది. కాబట్టి అవిరళ శ్రేణుల నుంచి అంకమధ్యమాన్ని గణనచేసేటపుడు ప్రతి తరగతి అంతరపు మధ్యవిలువను ఆ తరగతికి ప్రాతినిధ్యం వహించే విలువగా తీసుకొంటాం. తరగతి దిగువ, ఎగువ అవధులను కూడి ఆ మొత్తాన్ని రెండుతో భాగిస్తే ఆ తరగతి మధ్య విలువ వస్తుంది.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి

ఉదా 5 : ఒక కర్మాగారంలో పనిచేసే 100 మంది కార్మికుల వేతనాల వివరాలు క్రింది విధంగా వున్నాయి. వాటి సగటు వేతనాన్ని కనుగొనండి.

వేతనం (రూ॥లలో)	120 కంటె తక్కువ	140 కంటె తక్కువ	160 కంటె తక్కువ	180 కంటె తక్కువ	200 కంటె తక్కువ	220 కంటె తక్కువ	240 కంటె తక్కువ
కార్మికుల సంఖ్య	12	29	48	75	86	94	100

పై దత్తాంశం సంచిత పౌన:పున్యంలో వుంది. కాబట్టి అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడానికి ముందు దీనిని సామాన్య పౌన:పున్యంలోనికి మార్చుకోవలసి వుంటుంది. తరగతుల అంతరాలన్నీ సమానంగా వున్నాయి కనుక మొదటి తరగతిని 100 - 120గా తీసుకోవచ్చు.

వేతనాలు (రూ॥లలో)	కార్మికుల సంఖ్య	మధ్యవిలువ (M.V.) (X)	(f X)
100 - 120	12	110	1320
120 - 140	16	130	2080
140 - 160	20	150	3000
160 - 180	27	170	4590
180 - 200	11	190	2090
200 - 220	8	210	1680
220 - 240	6	230	1380
	N = 100		$\sum fX = 16140$

BRAOU

అంకమధ్యమం $= \overline{X} = \frac{\sum fX}{N}$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

అంకమధ్యమం $= \frac{16140}{100} = 161.4$

కాబట్టి కార్మికుల సగటు వేతనం రూ. 161.40 పైసలు.

సూక్ష్మ పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో తరగతి అంతరాల మధ్య విలువలలో ఒక దానిని భావిత అంకమధ్యమంగా తీసుకోవాలి. భావిత అంకమధ్యమం నుంచి వివిధ తరగతుల మధ్య విలువలు విచలనాలను వాటి అనురూప పౌన:పున్యాలతో గుణించాలి. గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల సంకలనాన్ని పౌన : పున్యాల మొత్తంతో భాగించాలి. ఇట్లా వచ్చిన వ్యుత్పన్నాన్ని భావిత అంకమధ్యమానికి కలిపితే నిజమైన అంక మధ్యమం వస్తుంది.

ఉదా 6 : ఉదా 5 లో ఇచ్చిన దత్తాంశం నుపయోగించి అంకమధ్యమాన్ని సూక్ష్మపద్ధతిలో గణన చేయండి.

వేతనాలు (రూ॥లలో)	కార్మికులసంఖ్య (f)	మధ్యవిలువ (M.V)	భావిత అంకమధ్యం (170) నుంచి విచలనాలు (X)	(fX^1)
100 - 120	12	110	- 60	- 720
120 - 140	16	130	- 40	- 640
140 - 160	20	150	- 20	- 400
160 - 180	27	170	0	0
180 - 200	11	190	+ 20	+ 220
200 - 220	8	210	+ 40	+ 320
220 - 240	6	230	+ 60	+ 360

BRAOU

అంకమధ్యమం $= \overline{X} = A + \left(\frac{\sum fX^1}{N}\right)$

ఇక్కడ, A = భావిత అంకమధ్యమం

$\sum fX^1 =$ విచలనాలను వాటి అనురూప పౌన : పున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనం

N = పౌన : పున్యాల మొత్తం $(\sum f)$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$\overline{X} = 170 + \left(\frac{-43}{100} + 20\right) = 170 - 8.6 = 161.4$

కాబట్టి కార్మికుల సగటు వేతనం రూ. 161.40 పైసలు.

విచలనాలన్నింటిని ఒక సామాన్య గుణకంచే భాగించడానికి వీలున్నపుడు అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడం ఇంకా సులభమవుతుంది. విచలనాలను సామాన్య గుణకం (common factor) తో భాగిస్తే వచ్చిన విలువలను సోపాన విచలనాలు (step deviation) గా తీసుకొంటాం. అంకమధ్యమ గణనకు ఉపయోగించే సూత్రంలో తదనుగుణంగా కొంచెం మార్పు చేసి క్రింది విధంగా చూపుతాం.

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\Sigma fX^1}{N} x\ i\right)$$

ఇక్కడ, A = భావిత అంకమధ్యమం

ΣfX^1 = సోపాన విచలనాలను వాటి అనురూప పౌన : పున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనం

N = పౌన : పున్యాల మొత్తం.

i = విచలనాలను భాగించడానికి ఉపయోగించిన సామాన్య గుణకం.

ఉదా 7 : ఉదా 5 లోని దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి సోపాన విచలన పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

వేతనాలు రూ ॥ లలో	కార్మికుల సంఖ్య (f)	మధ్యవిలువలు (M.V.)	భావిత అంకమధ్యమం (170) నుంచి విలచలనాలు	సోపాన విచలనాలు ($\hat{J}$ = 20) X^1	(fX^1)
100 - 120	12	110	- 60	- 3	- 36
120 - 140	16	130	- 40	- 2	- 32
140 - 160	20	150	- 20	- 1	- 20
160 - 180	27	170	0	0	0
180 - 200	11	190	+ 20	+ 1	+ 11
200 - 220	8	210	+ 40	+ 2	+ 16
220 - 240	6	230	+ 60	+ 3	+ 18
	N = 100				ΣfX^1 = - 43

అంకమధ్యమం = $\overline{X} = A + \frac{\Sigma f X^1}{N} x\ i$

పై విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\overline{X} = 170 + \ - \left(\frac{43}{100} + 20\right) \ = 170 - 8.6$$

B R A O U

= 161. 4.

కాబట్టి కార్మికుల సగటు వేతనం రూ. 161.40 పైసలు.

సోపాన విచలనాలు తీసుకొన్నందువల్ల అంకమధ్యమాన్ని సులభంగా గణన చేయవచ్చు. కాబట్టి, సోపాన విచలనాలు తీసుకొవడానికి అవకాశమునప్పుడు పై పద్ధతి నవలంబించడం సదుపాయంగా వుంటుంది.

అంకమధ్యమం : సుగుణాలు, లోపాలు (Merits and Demerits of Arithmetic Mean)

అంకమధ్యమాన్ని గణన చేసే పద్ధతులు తెలుసుకొన్నాం. ఇపుడు దాని సుగుణాలు, లోపాలు మరియు ఆదర్శ సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలు దానిలో ఎంతవరకున్నాయో తెలుసుకొందాం.

సుగుణాలు :

1. అంకమధ్యమం నిర్దిష్టంగా, స్పష్టంగా నిర్వచించిన సగటు కనక ఆదర్శమైన సగటుకు వుండవలసిన మొదటి లక్షణం దీనికి వుంది.
2. శ్రేణిలోని ఏ ఒక్క అంశం తెలియక పోయినా అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయలేం. అంటే ఆదర్శ సగటుకుండవలసిన రెండవ లక్షణం కూడా దీనికి ఉందని చెప్పవచ్చు.
3. అంకమధ్యమాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు, సులభంగానే గణన చేయవచ్చు.
4. ఇది బీజగణిత పద్ధతులకు అనువైనది.

లోపాలు :

ఆదర్శ సగటుకు వుండవలసిన లక్షణాలు చాలావరకు అంకమధ్యమానికి వున్నాయని తెలుసుకొన్నాం. అయినా దీనికి కొన్ని లోపాలు కూడా వున్నాయని గమనించాలి.

1. కొన్ని సందర్భాలలో ముఖ్యంగా (అంశాల సంఖ్య తక్కువగా వున్నపుడు) ఇది అల్పతమ, అధికతమ అంశాల (extreme items)కు ఎక్కువ ప్రాధాన్యత ఇస్తుంది. ఉదాహరణకు ఐదుగురు వ్యక్తుల నెలసరి ఆదాయం 100, 110, 140, 150, 2000 రూపాయలు అయితే వారి సగటు ఆదాయం 500 రూపాయలు అవుతుంది.
2. శ్రేణిలోని అంశాలన్నీ తెలిస్తేనేగాని దీనిని గణన చేయలేం. అంకమధ్యమానికి ఉన్న ఈ లక్షణం సుగుణమే ఆయినా మరొక విధంగా లోపమే అవుతుంది. ఉదా : శ్రేణిలో ఉండే 100 అంశాలలో 99 అంశాలు తెలిసి 1 అంశం తెలియకపోయినా మధ్యగతాన్ని బాహుళకాన్ని గణన చేయవచ్చు.
3. అంశాలను కేవలం పరిశీలించడం వల్లనే మధ్యగతాన్ని గాని, బాహుళకాన్ని కాని కనుగొన్నట్లు అంక మధ్యమాన్ని కనుక్కోలేము.

17.4.2 మధ్యగతం (Median)

మధ్యగతం అనగా స్థాన నిర్ణయ సగటు (position average). అంకమధ్యమంలో శ్రేణిలోని అంశాలన్నింటినీ పరిగణనలోకి తీసుకొంటారు. కాని, మధ్యగతంలో శ్రేణిలోని అంశాలన్నీ పరిగణనకు రావు. ఒక

BRAOU

దత్తాంశ శ్రేణిని ఆరోహణ క్రమంలోగాని లేదా అవరోహణ క్రమంలోగాని వ్రాస్తే మధ్యవున్న అంశం విలువ మధ్యగతం అవుతుంది. అంటే మధ్యగతం శ్రేణిలోని అంశాలను రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. ఒక భాగంలోని అంశాల విలువలు మధ్యగతం కంటె తక్కువగానూ, రెండో భాగంలోని అంశాల విలువలు మధ్యగతం కంటె ఎక్కువగానూ వుంటాయి. ఉదా: 5, 3, 10, 7, 6 అంశాలు విలువలనుకొందాం. వీటిని ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాస్తే 3, 5, 6, 7, 10 అవుతాయి. మధ్యనున్న మూడో అంశం విలువ 6 కాబట్టి మధ్యగతం విలువ 6 అవుతుంది. మొదటి భాగంలోని అంశాలు, 3, 5, దీనికన్నా తక్కువగానూ, రెండవ భాగం లోని అంశాలు 7, 10 ఎక్కువగానూ ఉన్నాయి.

వ్యక్తి గత శ్రేణుల మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడం : వ్యక్తిగత శ్రేణులు ఉండే అంశాలను మొదట వాటి పరిమాణాలనుబట్టి ఆరోహణ క్రమంలోగానీ, అవరోహణ క్రమంలోగానీ అమర్చుకోవాలి. తరువాత శ్రేణిలోనున్న అంశాలసంఖ్య (N) కు ఒకటి కలిపి (N+1) దానిని రెండుతో భాగించాలి. అంటే మధ్యగతం విలువ $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం విలువ అవుతుంది.

ఉదా 8 : 9 మంది వ్యక్తుల ఎత్తులు 161, 158, 170, 155, 164, 169, 171, 157, 160 సెంటీమీటర్లు అయితే వారి మధ్యగత ఎత్తు ఎంత ?

మధ్యగతాన్ని తెలుసుకోవడానికి ముందు శ్రేణిలోని అంశాలను వాటి విలువలననుసరించి ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయాలి. తరువాత $\frac{N+1}{2}$ అనే సూత్రం ద్వారా మధ్యగత విలువను తెలుసు కోవచ్చు. పై ఉదాహరణలోని అంశాలను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి మధ్యగతాన్ని కనుక్కొందాం.

క్రమసంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ఎత్తు(సెం.మీలో)	155	157	158	160	161	164	169	170	171

BRAOU

మధ్యగతము Median = $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం విలువ. ఇక్కడ

N (అంశాల సంఖ్య) = 9

కాబట్టి మధ్యగతం = $\frac{9+1}{2} = 5$ వ అంశం విలువ.

పై శ్రేణిలో 5వ అంశం విలువ 161. కాబట్టి మధ్యగత ఎత్తు 161 సెం.మీ. పై ఉదాహరణలోని అంశాల సంఖ్య బేసి సంఖ్య (odd number) కనుక మధ్యనున్న అంశాన్ని సులభంగా కనుక్కొన్నాం. అంశాల సంఖ్య సరిసంఖ్య (even number) అయితే శ్రేణిలో మధ్య అంశం అనేది వుండదు. ఇటువంటి సందర్భాలలో ఏ రెండు అంశాల విలువల మధ్య స్థానం గుర్తించడమైందో ఆ రెండు విలువల సగటును మధ్యగత విలువగా పరిగణించడం జరుగుతుంది.

ఉదా 9 : కుటుంబాల నెలసరి ఖర్చు 155, 275, 510, 470, 365, 170, 380, 200, 400, 325 రూపాయలు. ఈ కుటుంబాల మధ్యగత ఖర్చు కనుక్కోండి.

క్రమసంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ఖర్చు రూ॥ (ఆరోహణ క్రమంలో)	155	170	200	275	325	365	380	400	470	510

మధ్యగతం = Median = $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం విలువ

ఇక్కడ N (అంశాల మొత్తం) = 10

కాబట్టి మధ్యగతము = $\frac{10+1}{2}$ వ అంశం విలువ

= 5.5వ అంశం విలువ.

5.5 అంశం విలువను 5వ, 6వ అంశాల విలువల సగటుగా తీసుకొంటాం.

అందువల్ల మధ్యగతం = $\frac{\text{5వ అంశం విలువ} + \text{6వ అంశం విలువ}}{2}$

$= \frac{325+365}{2} = \frac{690}{2} = 345$

కాబట్టి మధ్యగత ఖర్చు 345 రూపాయలు.

విరళ శ్రేణుల నుంచి మధ్యగతం : దత్తాంశం విరళ శ్రేణిలో ఉంటే మొదట శ్రేణిలోని అంశాలను పరిమాణాన్ని బట్టి ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చుకొని అంశం తాలూకు పౌన : పున్యాన్ని ఆ అంశానికి ఎదురుగా వ్రాయాలి. ఆ తరువాత పౌన : పున్యాలను సంచితం చేసి మధ్య గతాన్ని కనుక్కోవాలి.

ఉదా 10 : 50 మంది విద్యార్థులకు ఒక తరగతి పరీక్ష (class test) లో వచ్చిన మార్కులు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వడమైంది. వారి మధ్యగత మార్కులు కనుక్కొండి.

మార్కులు : 5, 4, 8, 2, 6, 3, 7.

విద్యార్థుల సంఖ్య : 21, 16, 1, 1, 5, 4, 2.

అంశాలను ఆరోహణ క్రమంలో క్రింద విధంగా అమర్చుకొని మధ్యగతాన్ని కనుక్కొందాం.

మార్కులు	2	3	4	5	6	7	8
విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	1	4	16	21	5	2	1
సంచిత పౌన్యపున్యం (c.f)	1	5	21	42	47	49	50

మధ్యగతం లేదా Median = $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం విలువ

Dr. BRAOU LIBRARY
Acc. No: CM-0215
Class No: 330 అర్థశా

BRAOU

$= \frac{50 + 1}{2}$ వ అంశం విలువ = 25.5వ అంశం విలువ.

25.5వ అంశము 42వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరినది (22వ అంశం నుండి 42వ అంశం వరకు 42వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి వున్నాయని గమనించాలి).

ఈ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న విలువ 5, కాబట్టి మధ్యగత మార్కులు 5.

అవిరళ శ్రేణుల నుండి మధ్యగతం : దత్తాంశం అవిరళశ్రేణిలో వుంటే మధ్యగతం విలువ ఒక తరగతి అంతరంలో వుంటుంది. కనుక మొదటి మధ్యగత తరగతి (median class) ని తెలుసుకోవలసి వుంటుంది. వ్యక్తిగత శ్రేణులలోను, విరళశ్రేణులలోను మధ్యగతాన్ని $\frac{N+1}{2}$ అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సులభంగా కనుక్కొన్నాం. ఐతే అవిరళ శ్రేణికి చెందిన పౌన : పున్య విభాజనాన్ని రేఖా చిత్రంలో పౌన : పున్య వక్రాన్ని రెండు సమభాగాలుగా చేసే విలువను మధ్యగతంగా తీసుకోవడమవుతుంది. అందువలన ఇక్కడ $\frac{N+1}{2}$ అనే సూత్రానికి బదులు $\frac{N}{2}$ అనే సూత్రాన్ని వాడతారు. అంటే పౌన : పున్యాల మొత్తం N అయితే వాటి మధ్య బిందువు $\frac{N}{2}$ అవుతుంది. కనుక వక్రరేఖను ఈ బిందువు రెండు సమభాగాలుగా చేస్తుందని భావించాలి.

$\frac{N}{2}$ అనే సూత్రాన్ని వుపయోగించి మధ్యగతాన్ని మాత్రమే తెలుసుకొంటాం. కాని మధ్యగతం విలువను తెలుసుకోలేం. మధ్యగత తరగతిలో మధ్యగతం విలువ ఎంతో తెలుసుకోవడానికి అంతర్వేశనం (Inerpolation) అవసరమవుతుంది. అంటే అంతర్వేశనం ద్వారా ఒక ప్రత్యేక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి మధ్యగత తరగతిలో మధ్యగతం విలువ ఎంతో కనుక్కోవలసి వుంటుంది. ఐతే మధ్యగత తరగతిలో ఉన్న పౌన : పున్యాలన్నీ ఆ తరగతి అంతరంలో సమానంగా విస్తృతి చెంది వున్నవనే ప్రమేయం (assumption) ఆధారంగా అంతర్వేశనానికి ఉపయోగించే సూత్రాన్ని రూపొందించడం జరుగుతుంది. కాబట్టి అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కొన్న మధ్యగతం విలువ ఉజ్జాయింపు విలువ (Approximate value) మాత్రమే అని గ్రహించాలి. అంతర్వేశనకై ఉపయోగించే సూత్రం క్రింది విధంగా వుంటుంది.

మధ్యగతం లేదా Median $= l_1 + \left(\frac{N/2 - C.F.}{f}\right) x\ i$

ఇక్కడ , l_1 = మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి

$\frac{N}{2}$ = మొత్తం సంచిత పౌన : పున్యంలో సగభాగం

C.F. = (అంటే $\frac{N}{2}$ కు) మధ్యగత తరగతికి వెనుక వున్న తరగతి సంచిత పౌన : పున్యం

i = మధ్యగత తరగతి అంతరం

f = మధ్యగత తరగతి పౌన : పున్యం

ఉదా 11 : 325 కార్మిక కుటుంబాలలో నెలసరి ఆదాయము క్రింది విధంగా వుంది. ఈ దత్తాంశం నుంచి మధ్యగత ఆదాయాన్ని కనుక్కోండి.

BRAOU

ఆదాయం రూ॥లలో	50 - 100	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400 - 450	450 - 500	500- 550	550 - 600	600 - 650
కుటుంబాల సంఖ్య	1	20	42	55	62	45	30	25	15	18	10	2

పైన ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని పౌన : పున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి క్రింది పట్టికలో చూపడం జరిగింది.

ఆదాయం రూ॥లలో	50 - 100	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400 - 450	450 - 500	500- 550	550 - 600	600 - 650
కుటుంబాల సంఖ్య	1	20	42	55	62	45	30	25	15	18	10	2
సంచిత పౌనఃపున్యం	1	21	63	118	180	225	255	280	295	313	323	N = 325

మధ్యగతం $\text{Median} = \frac{N}{2}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{325}{2}$ వ అంశం విలువ = 162.5 వ అంశం విలువ.

162.5 వ అంశము 300వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి వుంది. కనుక ఆ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా ఉన్న 300 - 350 తరగతి మధ్యగతి తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 162.5వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కోవాలి. అంతర్వేశనకై ఉపయోగించే సూత్రం ప్రకారం

మధ్యగతం $\text{Median} = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.}{f}\right) x\ i$

$l_1 = 250$ (మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి)

$i = 50$ (మధ్యగత తరగతి అంతరం)

C.F. = 118 (మధ్యగత తరగతికి వెనుక వున్న తరగతి సంచిత పౌన : పున్యం)

$\frac{N}{2} = 162.5$ (మధ్యగత తరగతిలో మధ్యగతం విలువ)

కాబట్టి, $\text{Median} = 250 + \left(\frac{162.5 - 118}{62}\right) x\ 50 = 250 + 35.89 = 285.89$

∴ కాబట్టి కార్మికుల కుటుంబాల మధ్యగత ఆదాయం రూ ॥ 285.89 పై.

B R A O U

రేఖా చిత్ర పద్ధతి ద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడం

మధ్య గతాన్ని రేఖాచిత్రపటం ద్వారా కూడా కనుక్కోవడానికి సంచిత పౌన : పున్య వక్రం (cumulative frequency curve) గీయవలసి వుంటుంది. ఈ వక్రాన్ని ఓజీవ్ వక్రం అని లేదా ఓజీవ్ వక్రరేఖ అని కూడా అంటారు. రేఖా చిత్రాన్ని నిర్మించడానికి ముందు దత్తాంశంలోని పౌన : పున్యాలను సంచితం చేయాలి. ఐతే పౌన : పున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలోగాని లేదా అవరోహణ క్రమంలోగాని సంచితం చేయాలి. ఈ రెండు పద్ధతులలో ఏ పద్ధతినైనా అవలంబించవచ్చు. సామాన్య పౌన : పున్య వక్రాలలో వలనే సంచిత పౌన : పున్య వక్రాలు గీసేటందుకు కూడా చలాంకాల విలువలను X అక్షం పైన, పౌన : పున్యాలను Y అక్షంపైన తీసుకొంటారు. ఐతే సామాన్య పౌన : పున్య వక్రాలలో పౌన్య : పున్యాలను తరగతి అంతరాల మధ్య విలువలపై గుర్తిస్తారు. కాని, సంచిత పౌన : పున్య వక్రాలలో పౌన్య : పున్యాలను సంచితం చేసిన క్రమాన్ని అనుసరించి తరగతి అంతరాల ఎగువ అవధులపై గాని దిగువ అవధులపైగాని గుర్తిస్తారు. పౌన : పున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో (అంటే తక్కువ పద్ధతిలో) సంచితం చేస్తే వాటిని తరగతి అవధులపై గుర్తిస్తారు. అట్లా కాకుండా అవరోహణ క్రమంలో (ఎక్కువ పద్ధతిలో) సంచితం చేస్తే వాటిని తరగతి దిగువ అవధులపై గుర్తిస్తారు.

ఈ రెండు పద్ధతులలో ఏదో ఒక పద్ధతి నవలంబించి సంచిత పౌన : పున్య వక్రాన్ని గీయాలి. ఆ తరువాత దాని మధ్య బిందువును $\frac{N}{2}$ అనే సూత్రం ద్వారా తెలుసుకోవాలి. ఈ బిందువును Y అక్షం మీద గుర్తించి దాని నుంచి X అక్షానికి సమాంతరం (parallel) గా ఒక రేఖ గీయాలి. ఈ రేఖ ఓజీవ్ వక్రాన్ని ఏదో ఒక బిందువు వద్ద తాకుతుంది. ఇట్లా తాకిన బిందువు వద్ద నుండి X అక్షానికి లంబ (perpendicular) రేఖ గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X అక్షంమీద ఏ బిందువునైతే తాకుతుందో ఆ బిందువు విలువే మధ్యగతమవుతుంది.

ఉదా 12 : ఈ క్రింద ఇచ్చిన దత్తాంశం నుండి మధ్యగతాన్ని రేఖా చిత్రపటం ద్వారా కనుక్కోండి.

ఈ దత్తాంశంలోని పౌన : పున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి క్రింది చూపడమైనది.

ఆదాయము రూ॥లలో	కుటుంబాల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌన : పున్యం (C.F.)
125 - 150	7	7
150 - 175	12	19
175 - 200	21	40 - Median
200 - 225	14	54
225 - 250	10	64
250 - 275	3	67
275 - 300	3	N = 70

B R A O U

మధ్యగతం లేదా Median $= \frac{N}{2}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{70}{2}$ వ అంశం విలువ = 35వ అంశం విలువ.

35వ అంశం 40వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి ఉంది. కనుక ఆ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 175 - 200 తరగతి మధ్యగతి తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 35వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కోవాలి. ఈ సూత్రం ప్రకారం

మధ్యగతం లేదా Median $= l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.}{f}\right) x\ i$

ఇక్కడ, $l_1 = 175$ (మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి)

$i = 25$ (మధ్యగతి తరగతి అంతరం)

C.F. = 19 (మధ్యగత తరగతికి వెనకవున్న తరగతి సంచిత పౌన : పున్యం)

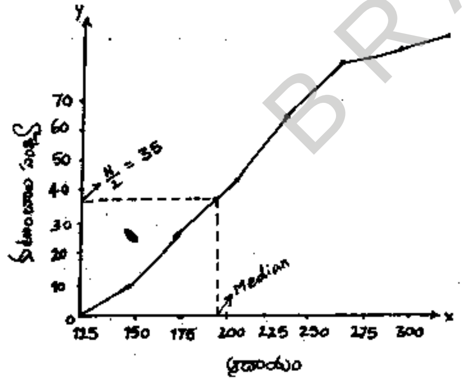
f = 21 (మధ్యగత తరగతి పౌనః పున్యం)

$\frac{N}{2} = 35$ (మొత్తం పౌన్య : పున్యంలో సగభాగం) కాబట్టి

Median $= 175 + \left(\frac{35 - 19}{21}\right) x\ 25$

$= 175 + \frac{16 \times 25}{21} = 175 + 19.05 = 194.05$

∴ కార్మిక కుటుంబాల మధ్యగత ఆదాయం రూ. 194.05



B R A O U

పైన ఇచ్చిన దత్తాంశంలో మధ్యగత స్థానాన్ని $\frac{N}{2}$ సూత్రంద్వారా నిర్ణయించడం జరిగింది. ఇది 35 $\left(\frac{70}{2}\right)$ కనుక పటంలో y అక్షం మీద 35 చూపే బిందువు నుంచి x అక్షానికి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీసాం. ఈ రేఖ ఓజీవ్ వక్రాన్ని తాకిన బిందువు నుంచి x అక్షానికి లంబరేఖ గీయడమైంది. ఈ లంబరేఖ x అక్షం మీద తాకిన బిందువు వద్ద విలువ 194.05 కనుక మధ్యగతం కూడా 194.05 అవుతుంది. అంటే మధ్యగతం రూ. 194.05.

ఈ ఓజివ్ వక్రాన్ని పైన ఇచ్చిన దత్తాంశం ఆధారంగా గీసాం. ఈ ఉదాహరణలో మధ్యగతం విలువ రూ. 194.05. కాబట్టి రేఖా చిత్రం ద్వారా కనుక్కొన్న మధ్యగతం, సూత్రాన్ని ఉపయోగించి గణన చేసిన మధ్య గతానికి సమానంగా వుందని చెప్పవచ్చు.

పై దత్తాంశంలోని పౌన : పున్యాలను ఆరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి ఓజివ్ వక్రాన్ని గీసి తద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కొన్నాం. ఈ పద్ధతిలో సంచిత పౌన : పున్యాలను తరగతుల ఎగువ అవధులపై గుర్తించడం జరిగింది. ఇలా గీసిన ఓజివ్ వక్రాన్ని ' కంటె తక్కువ వక్రం ' (less than curve) అని అంటారు. ఐతే ఇవే పౌన : పున్యాలను అవరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి, వాటిని తరగతుల దిగువ అవధులపై గుర్తించి ఓజివ్ వక్రాన్ని గీయవచ్చు. ఇట్లా గీసిన ఓజివ్ వక్రాన్ని ' కంటె ఎక్కువ వక్రము ' (more than curve) అని అంటారు. ఈ ఎక్కువ వక్రం నుంచి మధ్యగతాన్ని కనుక్కొంటే దాని విలువ కూడా 194.05 వస్తుంది.

మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడానికి ఇంకొ పద్ధతి కూడా వుంది. ఒకే రేఖా చిత్రపటంలో ఓజివ్ వక్రరేఖ కంటే తక్కువ, ఎక్కువ అయిన వక్రరేఖలా గీసి ఆ రెండు వక్రరేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనే బిందువు నుంచి X అక్షానికి లంబరేఖ గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X అక్షం మీద ఏ బిందువునైతే తాకుతుందో ఆ బిందువు విలువే మధ్యగత మవుతుంది.

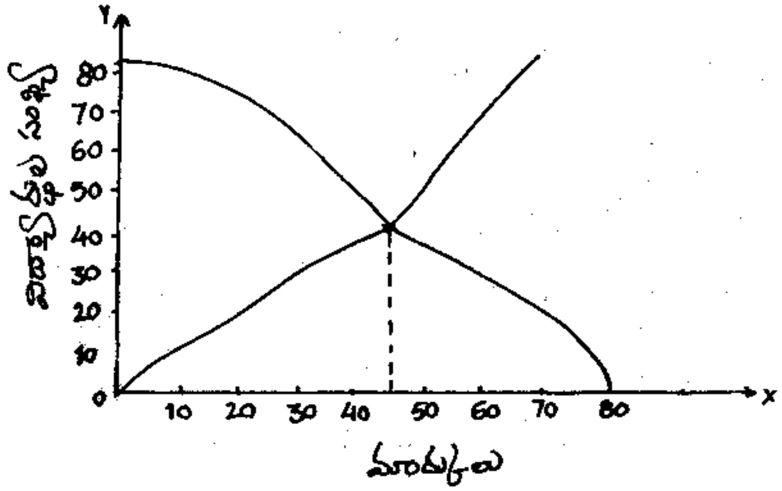
ఉదా : క్రింద ఇచ్చిన దత్తాంశంలో " కంటె తక్కువ ", " కంటె ఎక్కువ " సంచిత పౌన : పున్య వక్రరేఖలను గీసి వాటి నుంచి మధ్యగతాన్ని కనుక్కొండి. ఆ తరువాత సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఫలితాన్ని సరిచూడండి.

మార్కులు	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70 - 80
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	7	19	30	12	6	4

తక్కువ , ఎక్కువ ఓజివ్ వక్రరేఖలను గీయడానికి ముందు దత్తాంశంలోని పౌన : పున్యాలను ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసి క్రింది విధంగా అమర్చుకోవాలి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌన : పున్యం	
		ఆరోహణ క్రమంలో (కంటె తక్కువ)	అవరోహణ క్రమంలో (కంటె ఎక్కువ)
10 - 20	2	2	80
20 - 30	7	9	78
30 - 40	19	28	71
40 - 50	30	58	52
50 - 60	12	70	22
60 - 70	6	76	10
70 - 80	4	80	4

BRAOU



పై పటం నుంచి మధ్యగత మార్కులు 44 అని తెలిసింది. ఇప్పుడు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఈ ఫలితాన్ని పరిచూద్దాం.

మధ్యగతం లేదా Median = $\frac{N}{2}$వ అంశం విలువ

$= \frac{80}{2} = 40$వ అంశం విలువ పౌన : పున్యంలో చేరి ఉంది కనుక ఆ పౌన్య : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 40 - 50 తరగతి మధ్యగత తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 40వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కొందాం.

$$\text{Median} = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F.}{f}\right) X\ i$$

ఇక్కడ, $l_1 = 40, C.F = 25, I = 10, f = 30, \frac{N}{2} = 40$

కాబట్టి మధ్యగతము = $40 + \left(\frac{40 - 28}{30}\right) X\ 10$

$= 40 + \frac{12\ X\ 10}{30} = 40 + 4 = 44$ మార్కులు

B R A O U

కాబట్టి రేఖా చిత్ర పద్ధతి ద్వారా కనుక్కొన్న మధ్యగతము, సూత్రం ద్వారా గణన చేసిన దానికి సమానంగా వుందని చెప్పవచ్చు.

ఇంతవరకు మనము పౌన : పున్యాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో మాత్రమే సంచితం చేసి మధ్యగతాన్ని కనుక్కొన్నాము. అయితే అవరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసిన పౌన : పున్యాన్ని వుపయోగించి కూడా మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవచ్చు. పైన ఇచ్చిన వుదాహరణలోనే అవరోహణ క్రమంలో సంచితం చేసిన పౌన : పున్యాన్ని తీసుకొని మధ్యగతాన్ని కనుక్కొందాం. ఈ వుదాహరణలో మధ్యగతము 40వ అంశం. 40వ అంశం 52వ అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి వుంది కనుక ఆ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 40 - 50 తరగతి మధ్యగత తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 40వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్వేశనం ద్వారా కనుక్కోవాలి. అయితే ఇక్కడ అంతర్వేశనంకై ఉపయోగించే సూత్రము, ఇదివరలో ఉపయోగించడానికి కొంచెం భిన్నంగా వుందని గమనించాలి. ఈ సూత్రం ప్రకారం

మధ్యగతం లేదా Median = $l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F}{f}\right) x\ i$

l_2 = మధ్య తరగతి ఎగువ అవధి = 50

i = ఆ తరగతి అంతరము = 10

C.F. = మధ్యగత తరగతికి ముందు వున్న తరగతి సంచిత పౌన : పున్యము = 22

f = మధ్యగత తరగతి పౌన్య : పున్యము = 30

$\frac{N}{2}$ = మొత్తం సంచిత పౌన : పున్యములో సగభాగము = 40

కాబట్టి , Median = $50 - \left(\frac{40 - 22}{30}\right) X\ 10$

= $50 - \frac{18\ X\ 10}{30}$ = 50 - 6 = 44 మార్కులు

కాబట్టి మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడానికి ఆరోహణ సంచిత పౌన : పున్యాన్ని ఉపయోగించినా, అవరోహణ సంచిత పౌన : పున్యాన్ని ఉపయోగించినా ఫలితము ఒకటిగానే ఉంటుందని గమనించాలి.

మధ్యగతము : సగుణాలు, లోపాలు (Merits and Demerits of Median)

సగుణాలు

1. మధ్యగతాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

2. చాలా సందర్భాలలో శ్రేణిలోని అంశాలను కేవలం పరిశీలించడం వల్ల దీనిని కనుక్కోవచ్చు.

3. ఇది శ్రేణిలోని అల్పతమ, అధికతమ విలువలపై ఎక్కువగా ఆధారపడి ఉండదు.

4. శ్రేణిలోని అంశాలన్నీ తెలియక పోయినా దీనిని గణన చేయవచ్చు.

5. ఒక విషయాన్ని పరిమాణాత్మకంగా చెప్పడానికి వీలులేనప్పుడు, అంటే దానిని కొలవడానికి సాధ్యం కానప్పుడు, మధ్యగతం చాలా ఉపయోగపడుతుంది. ఉదాహరణకు, ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల తెలివి తేటలను కొలవడం సాధ్యం కాదు. కాని వారిని వారి తెలివితేటలననుసరించి ఒక క్రమంలో అమర్చితే మధ్యగత తెలివితేటలు ఉన్న విద్యార్థిని కనుక్కోవచ్చు.

లోపాలు

1. శ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య తక్కువగా ఉంది. వాటి విభాజనం నియమ రహితంగా ఉండేటప్పుడు మధ్యగతం దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే సగటుగా ఉండదు. ఉదాహరణకు 9 మంది విద్యార్థులకు 15, 18, 20, 22, 24 52, 64, 78, 85 మార్కులు వచ్చినాయని అనుకొందాము. ఈ శ్రేణి మధ్యగత మార్కులు 24 కనుక, ఇక్కడ మధ్యగతం శ్రేణికి ప్రాతినిధ్యం వహించే సగటుగా లేదని చెప్పనవసరం లేదు.

B R A O U

2. ఇది బీజగణిత పద్ధతులకు అనువైనది కాదు.

3. దీనిని గణన చేయడానికి ముందు దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమంలోగాని అవరోహణ క్రమంలోగాని అమర్చుకోవలసి ఉంటుంది. అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉంటే ఇట్లా అమర్చుకోవడం కష్టమవుతుంది.

4. అవిరళశ్రేణుల నుంచి మధ్యగతం గణన చేయడానికి అంతర్వేశన సూత్రాన్ని ఉపయోగించవలసి ఉంటుంది. మధ్యగత తరగతిలో ఉన్న పౌన : పున్యాలన్నీ ఆ తరగతి అంతరంలో సమానంగా విస్తృతి చెంది ఉన్నవనే ప్రమేయము ఆధారంగా ఈ సూత్రాన్ని రూపొందించడం జరిగింది. ఐతే ఈ ప్రమేయం నిజం కాకపోవచ్చు. చాలా సందర్భాలలో ఇది నిజం కాదు కూడా.

17.4.3 చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు

మధ్యగతము ఒక క్రమంలో అమర్చిన శ్రేణులను రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుందని తెలుసు కొన్నాము. అయితే, శ్రేణులను వివిధ సమభాగాలుగా విభజించే ఇతర మానాలు కూడా కొన్ని వున్నాయి. వాటిలో చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు అనేవి ముఖ్యమైనవి. ఇవిగాక పంచాంశకాలు (Quintiles), సప్తాంశకాలు(Septiles), అష్టాంశకాలు (Octiles) అనే మానాలు కూడా వున్నాయి. కాని ఇవి చాలా వరకు వాడుకలో కనిపించవు.

మధ్యగతం వల్ల విభక్తమైన దిగువ సగభాగము, ఎగువ సగభాగము అనే రెండు సమభాగాలను చతుర్థాంశకాలు తిరిగి ఒక్కొక్క దాన్ని రెండేసి సమభాగాలుగా విభజిస్తాయి. దిగువ సమభాగాన్ని విభజించే విలువను ప్రథమ చతుర్థాంశకము (First Quartile) అనిగాని లేదా దిగువ చతుర్థాంశకము (Lower Quartile) అని గాని అంటారు. దీనిని Q_1 గా సూచించడం ఆచారము. ఎగువ సగభాగాన్ని విభజించే అంశం విలువను తృతీయ చతుర్థాంశకము (Third Quarltile) అనిగాని లేదా ఎగువ చతుర్థాంశకము (Upper Quartile) అనిగాని అంటారు. దీనిని Q_3 గా సూచిస్తారు. అంటే మొదటి నుంచి మధ్యగతం వరకు ఉన్న అంశాలను తృతీయ చతుర్థాంశకము రెండు సమాన భాగములుగా చేస్తుంది. మధ్యగతం ద్వితీయ చతుర్థాంశకం అవుతుందని చెప్పనవసరం లేదు. శ్రేణిలోని అంశాలను నాలుగు సమభాగాలుగా చేస్తే మూడు విభజన స్థానాలు (dividing positions) ఏర్పడతాయి. కాబట్టి శ్రేణులలో చతుర్థాంశకము మధ్యగతమే కనుక ప్రథమ, తృతీయ చతుర్థాంశకాలు మాత్రమే వాడుకలో వస్తాయి. ఇట్లాగే శ్రేణిలోని అంశాలను పది సమభాగాలుగా చేస్తే తొమ్మిది విభజన స్థానాలు ఏర్పడతాయి. కాబట్టి దశాంశకాలు $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_9$, తొమ్మిది ఉంటాయి. అంశాలను వంద సమభాగాలుగా చేస్తే తొంభై తొమ్మిది విభజన స్థానాలు వస్తాయి. కనుక శతాంశకాలు $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$. P_{99} తొంభై తొమ్మిది ఉంటాయి. 50వ శతాంశకము మధ్యగతమే అవుతుందని గుర్తుంచుకోవాలి.

మధ్యగతాన్ని నిర్ణయించినట్లే పైన పేర్కొన్న మానాలను కూడా వాటి స్థానాల ననుసరించి నిర్ణయిస్తారు. అందువల్ల వాటిని గణన చేయడంలో కూడా మధ్యగతాన్ని గణన చేయడానికి ఉపయోగించినటువంటి సూత్రాలే వుపయోగిస్తారు. ఐనా ఈ సూత్రాలను గురించి కొన్ని విషయాలు ప్రత్యేకంగా తెలుసుకొనవలసి వుంటుంది. కాబట్టి కొన్ని సూత్రాలను ఉదాహరణలుగా క్రింద ఇవ్వడం జరిగింది.

వ్యక్తిగత శ్రేణులలోను, విరళశ్రేణులలోను ఈ మానాలను గణన చేయడానికి ఉపయోగించే సూత్రాలు క్రింది విధంగా వుంటాయి.

BRAOU

ప్రథమ చతుర్థాంశకం లేదా $Q_1 = \frac{N + 1}{4}$ వ అంశం విలువ

తృతీయ చతుర్థాంశకం లేదా $Q_3 = \frac{3\,(N+1)}{4}$ వ అంశం విలువ

ప్రథమదశాంశకము లేదా $D_1 = \frac{N+1}{10}$ వ అంశం విలువ

సప్తమ దశాంశకము లేదా $D_7 = \frac{7\,(N+1)}{10}$ వ అంశం విలువ

ప్రథమ శతాంశకం లేదా $P_1 = \frac{N+1}{100}$ వ అంశం విలువ

36వ లేదా $P_{36} = \frac{36\,(N+1)}{100}$ వ అంశం విలువ

పై సూత్రాలనుంచి గమనించవలసిన విషయమేమంటే 3వ చతుర్థాంశకాన్ని కనుక్కొనేటందుకు అంశాలకు ఒకటి కలిపివున్న సంఖ్యను (అంటే N+1 అనేదానిని) 3తో గుణించాలి. అలాగే 7వ దశాంశకాన్ని కనుక్కోవాలంటే సంఖ్యను 7తో గుణించాలి. శతాంశకములలో కుడా ఇదే పద్ధతి నవలంబించాలి.

అవిరళ శ్రేణులలో ఉపయోగించే సూత్రాలు క్రింది విధంగా వుంటాయి.

ప్రథమ చతుర్థాంశకం లేదా $Q_1 = \frac{N}{4}$ వ అంశం విలువ

తృతీయ చతుర్థాంశకం లేదా $Q_3 = \frac{3N}{4}$ వ అంశం విలువ

ప్రథమ దశాంశకము లేదా $D_1 = \frac{N}{10}$ వ అంశం విలువ

ఆరవ దశాంశకము లేదా $D_6 = \frac{6N}{10}$ వ అంశం విలువ

ప్రథమ దశాంశకము లేదా $P_1 = \frac{N}{10}$ వ అంశం విలువ

98వ శతాంశకము లేదా $P_{98} = \frac{98\,N}{100}$ వ అంశం విలువ. అంతర్వేశనానికి కూడా మధ్యగతంలో ఉపయోగించిన సూత్రాన్నే వాడతాము. ఐతే ఈ సూత్రంలోని సంకేతాల అర్థము మనం గణన చేసే మానాలననుసరించి మారుతూ ఉంటుంది. ఉదాహరణకు

ప్రథమ చతుర్థాంశకము లేదా

$$Q_4 = l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - C.F}{f}\right) x\, i$$

ఇక్కడ, l_1 = ప్రథమ చతుర్థాంశకము తరగతి దిగువ అవధి.

BRAOU

i = ఆ తరగతి అంతరము

C.F. = ప్రథమ చతుర్థాంశక తరగతికి వెనుక వున్న తరగతి సంచిత పౌనః పున్యం.

f = ప్రథమ చతుర్థాంశక తరగతి పౌనః పున్యం.

ఒక్కొక్కపుడు చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు మొదలైన మొదటి తరగతి అంతరంలోనే ఉండవచ్చు. అటువంటప్పుడు మొదటి తరగతికి వెనక ఇంకో తరగతి వుండదు. కనక వెనక తరగతి సంచిత పౌనః పున్యము సున్నాగా తీసుకోవాలి.

వ్యక్తిగత శ్రేణులనుండి చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు, శతాంశకాలు గణన చేయడం

ఉదా 14 : 20 మంది విద్యార్థులకు గణాంక శాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వడమైంది.

48, 52, 71, 26, 38, 40, 73, 60, 51, 46, 60, 30, 42, 70, 52, 36, 78, 45, 50, 30.

పై దత్తాంశం నుండి రెండు చతుర్థాంశకాలను, 7వ దశాంశకాన్ని, 82వ శతాంశకాన్ని కనుక్కోండి.

పై విలువలను కనుక్కోవడానికి ముందు దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో గాని, అవరోహణ క్రమంలోగాని అమవర్చుకోవలసి ఉంటుంది. కాబట్టి దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో దిగువ వ్రాయడమైంది.

క్రమ సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
మార్కులు	26	30	30	36	38	40	42	45	46	48	50	51	52	52	60	60	70	71	73	78

ప్రథమ చతుర్థాంశకము లేదా $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{2+1}{4} = 5.25 =$ వ అంశం విలువ

5.25వ అంశం విలువ తెలుసుకోవడానికి 5వ అంశం విలువను తీసుకొని దానికి 5వ, 6వ అంశాల విలువల తేడాలో **25** అంటే $^1/_4$ వ భాగాన్ని కలపాలి.

కాబట్టి =5వ అంశం విలువ $+ ^1/_4$ (6వ అంశం విలువ - 5వ అంశం విలువ)

= 38 + $^1/_4$ **(40-38) = 38+.5 = 38.5**

కాబట్టి , ప్రథమ చతుర్థాంశకము**. 38.5** మార్కులు

తృతీయ చతుర్థాంశకము లేదా $\frac{3\ (N+1)}{4}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{3\ (20+1)}{4}$ వ అంశం విలువ = 15.75వ అంశం విలువ.

BRAOU

15.75 వ అంశం విలువ తెలుసుకోవడానికి 15వ అంశం విలువను తీసుకొని దానికి 15వ, 16వ అంశాల విలువల తేడాలో 75 ($^3/_4$) భాగాన్ని కలపాలి.

కాబట్టి $Q_3 = 60 + ^3/_4 (60 - 60)$

$= 60$

కాబట్టి తృతీయ చతుర్థాంశకము 60 మార్కులు.

7వ దశాంశకము లేదా $D_7 = \frac{7(N+1)}{10}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{7(20+1)}{10}$ వ అంశం విలువ = 14.7వ అంశం విలువ

14.7వ అంశం విలువ అంటే 14వ అంశం విలువ + $\frac{7}{10}$ (15వ అంశం విలువ - 14వ అంశం విలువ)

కాబట్టి $D_7 = 52 + \frac{7}{10}(60 - 52) = 52 + 5.6$

కాబట్టి 7వ దశాంశకము 57.6 మార్కులు

82వ దశాంశకము లేదా $P_{82} = \frac{82(N+1)}{100}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{82(20+1)}{100}$ వ అంశం విలువ = 17.22వ అంశం విలువ.

అంటే - 17 వ అంశం విలువ + $\frac{11}{50}$ (18వ అంశం విలువ - 17 వ అంశం విలువ)

$= 70 + \frac{11}{50}(71 - 70) = 70 + .22 = 70.22$

కాబట్టి 82వ శతాంశకము 70.22 మార్కులు.

విరళ శ్రేణుల నుంచి చతుర్థాంశకాలు మొదలైన వాటిని గణన చేయడం

ఉదా : 90 మంది పనివారి దినసరి వేతనాలు క్రింద ఇవ్వడమైంది. ఈ దత్తాంశం నుంచి రెండు చతుర్థాంశకాలను, 3వ దశాంశకాన్ని మరియు 2వ శతాంశకాన్ని కనుక్కోండి.

దినసరివేతనం రూ॥లలో	5	7	3	10	8	6	11	4	9
పనివారల సంఖ్య	20	10	7	4	4	25	2	12	6

దత్తాంశాన్ని మొదట ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చి పౌన : పున్యాలను సంచితం చేద్దాము.

దినసరి వేతనం రూ ॥లలో	3	4	5	6	7	8	9	10	11
పనివారలసంఖ్య (f)	7	12	20	25	10	4	6	4	2
సంచిత పౌనః పున్యం(C.F.)	7	19	39	64	74	78	84	88	90

B R A O U

తృతీయ చతుర్థాంశకము లేదా $Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{3(90+1)}{4}$ వ అంశం విలువ = 68.25వ అంశం విలువ.

68.25వ అంశం 74వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి వున్నది. ఈ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న విలువ 7. కాబట్టి తృతీయ చతుర్థాంశకము విలువ 7 రూపాయలు.

ప్రథమ చతుర్థాంశకము లేదా $Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ వ అంశం విలువ

$= \frac{90+1}{4}$ వ అంశం విలువ = 22.75వ అంశం విలువ.

22.75 వ అంశము 39వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరివున్నది. ఈ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న విలువ 5. కాబట్టి ప్రథమ చతుర్థాంశకము Q_1 విలువ 5 రూపాయలు.

3వ దశాంశకము లేదా $D_3 = \frac{3\ (N+1)}{10}$ అంశం విలువ

$= \frac{3\ (90+1)}{10}$ వ అంశం విలువ = 27.3 వ అంశం విలువ

27.3 వ అంశం 39వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి వున్నది. ఈ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగావున్న విలువ 5. కాబట్టి 3వ దశాంశకము D_3 విలువ 5 రూపాయలు.

20వ శతాంశకము లేదా $P_{20} = \frac{20\ (N+1)}{100}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{20\ (90+1)}{100}$ వ అంశం విలువ = 18.2 వ అంశం విలువ.

18.2 వ అంశము 19వ సంచిత పౌన : పున్యంలో చేరి వున్నది. ఈ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న విలువ 4. కాబట్టి 20వ శతాంశకం విలువ 4 రూపాయలు.

BRAOU

అవిరళ శ్రేణుల నుంచి చతుర్థాంశకాలు మొదలైన వాటిని గణన చేయడం

ఉదా : ఒక తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థులకు సాంఖ్యకశాస్త్ర శాస్త్ర పరీక్షలో వచ్చిన మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	9	20	24	16	13	5	6	1

పై విభాజనం నుంచి రెండు చతుర్థాంశకాలను, 6వ దశాంశకాన్ని, 95వ శతాంశకాన్ని కనుక్కోండి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	6	9	20	24	16	13	5	6	1
సంచిత పౌన్యపున్యం (C.F)	6	15	35	59	75	88	83	99	100

ప్రథమ చతుర్థాంశకము లేదా $Q_1 = \frac{N}{4}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{100}{4} = 25$వ అంశం విలువ

25వ అంశం 35 వ పౌన : పున్యంలో చేరివున్నది కనుక ఆ పౌన్య : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 20 - 30 తరగతి ప్రథమ చతుర్థాంశక తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 25వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్నివేశన సూత్రం ద్వారా తెలుసుకోవాలి.

$$Q_1 = l_1 + \left(\frac{N/4 - C.F.}{8}\right) x\ i$$

ఇక్కడ l_1= ప్రథమ చతుర్థాంశక తరగతి దిగువ అవధి

i = ఆ తరగతి అంతరము

C.F. = ప్రథమ చతుర్థాంశక తరగతికి పైన వున్న తరగతికి ఎదురుగా వున్న సంచిత పౌన :పున్యం.

f = ప్రథమ చతుర్థాంశక తరగతి పౌన : పున్యము

అంటే $l_1 = 20, i = 10, \frac{N}{4} = 25, f = 20$ మరియు C.F = 15

కాబట్టి $Q_1 = 20 + \left(\frac{25 - 15}{20}\right) x\ 10$

$= 20 + \left(\frac{10}{20}\right) x\ 10$

$= 20 + 5 = 25$

$\therefore$ ప్రథమ చతుర్థాంశకము Q_1 = 25 మార్కులు

తృతీయ చతుర్థాంశకము $Q_3 = \frac{3N}{4}$ వ అంశం విలువ

$= \frac{3 x 100}{4} = 75$వ అంశం విలువ.

75వ అంశము 75వ సంచిత పౌన : పున్యమే కనుక ఆ పౌన : పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 40 - 50 తరగతి తృతీయ చతుర్థాంశక తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 75వ అంశమే చివరి పౌన : పున్యం కనక ఆ తరగతి ఎగువ విలువే తృతీయ చతుర్థాంశకము విలువకావలె. అయినా అంతర్నివేశం ద్వారా గణన చేసి చూద్దాము.

BRAOU

$$Q_3 = l_1 + \frac{3\frac{N}{4} - C.F}{f} \times i$$

$$= 40 + \left(\frac{\frac{3 \times 100}{4} - 59}{16}\right) \times 10 = 40 + \left(\frac{75 - 59}{16}\right) \times 10$$

$$Q_3 = 40 + \frac{16}{16} \times 10 = 40+10 = 50$$

తృతీయ చతుర్థాంశకము విలువ 50 మార్కులు.

6వ దశాంశకము లేదా $D_6 = \frac{6N}{10}$ వ అంశం విలువ

$$= \frac{6 \times 100}{10} = 60 \text{ వ అంశం విలువ}$$

60వ అంశము 75వ సంచిత పౌన:పున్యములో చేరివున్నది. కనుక ఆ పౌన:పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 40 - 50 వ తరగతి 6వ దశాంశక తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 60వ అంశము విలువ ఎంతో అంతర్నివేశన సూత్రం ద్వారా గణించవలె.

$$D_6 = l_1 + \left(\frac{\frac{6N}{10} - C.F}{f}\right) \times i$$

$$= 40 + \left(\frac{\frac{6 \times 100}{10} - 59}{16}\right) \times 10$$

$$= 40 + \left(\frac{60 - 59}{16}\right) \times 10 = 40 + \left(\frac{1 \times 10}{16}\right) = 40 + .62$$

B R A O U

$\therefore D_6 = 40.62$ మార్కులు

95వ శతాంశకము లేదా $P_{95} = \frac{95N}{100}$ వ అంశం విలువ $= \frac{95 \times 100}{100} = 95$ వ అంశం విలువ.

95వ అంశం 99వ సంచిత పౌన:పున్యంలో చేరి వున్నది కనుక ఆ పౌన పున్యానికి ఎదురుగా వున్న 70-80 తరగతి 95వ శతాంశక తరగతి అవుతుంది. ఈ తరగతిలో 95వ అంశం విలువ ఎంతో అంతర్నివేశనం ద్వారా తెలుసుకోవాలి.

$$P_{95} = l_1 + \left(\frac{\frac{95\,N}{100} - C.F.}{f}\right) \times i$$

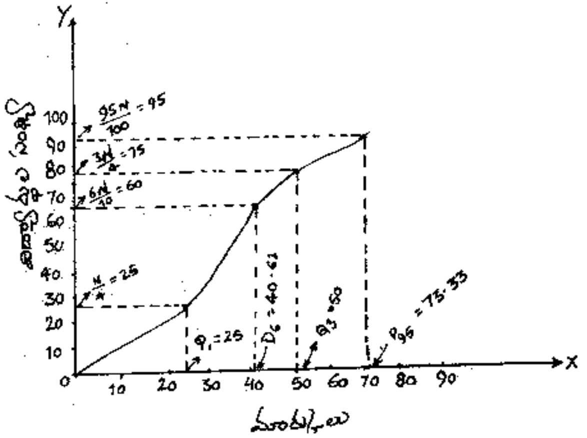
కాబట్టి $P_{95} = 70 + \left(\frac{95 - 93}{6}\right) \times 10 = 70 + \frac{2 \times 10}{6} = 73.33$

∴ 95వ శతాంశకము P_{95} విలువ 73.33 మార్కులు.

రేఖా చిత్ర పద్ధతి ద్వారా చతుర్థాంశకాలు దశాంశకాలు మొదలైన వాటిని కనుక్కోవడం

రేఖా చిత్ర పద్ధతి ద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కోవడాన్ని పైన తెలుసుకొన్నాము. ఇదే పద్ధతి నవలంబించి చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు మొదలైన వాటిని ఓజివ్ వక్రరేఖలు గీసి కనుక్కోవచ్చు.

ఉదా : 16 లో ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సంచిత పౌన : పున్య రేఖను (Less than Ogive) గీసి వివిధమానాల స్థానాలను క్రింది విధంగా గుర్తించడం జరిగింది.



$Q_1 = \frac{N}{4} = \frac{100}{4} = 25$వ అంశం విలువ. కాబట్టి పై పటంలో y అక్షంమీద 25 చూపే బిందువు నుంచి x అక్షానికి సమాంతరంగా ఒక రేఖను గీయడం జరిగింది. ఈ రేఖ ఓజివ్ వక్రరేఖను తాకిన బిందువు నుంచి x అక్షానికి లంబరేఖ గీయడమైంది. ఈ లంబరేఖ x అక్షం మీద తాకిన బిందువు వద్ద విలువ 25 కనుక ప్రథమ చతుర్థాంశకం 25 మార్కులు అవుతుంది.

$Q_3 = \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 100}{4} = 75$ వ అంశం విలువ. పైన చెప్పిన పద్ధతినే అవలంబిస్తే తృతీయ చతుర్థాంశకము విలువ 50 మార్కులు వస్తుంది.

$D_6 = \frac{6N}{10} = \frac{6 \times 100}{10} = 60$వ అంశం విలువ. ఇది 40.62 మార్కులు అట్లాగే

$P_{95} = \frac{95N}{100} = \frac{95 \times 100}{100} = 95$ వ అంశం విలువ 73.33 మార్కులు

చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు మొ॥ వాటి ఉపయోగాలు

చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు, మొదలైన మానాలు మధ్యగతం వలెనే అంకమధ్యమము లాగా అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహించవు. ఇదివరలో చెప్పినట్లు శ్రేణిలోని కొన్ని భాగాలకు మాత్రమే ఇవి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయి. ఉదా : ప్రథమ చతుర్థాంశకము శ్రేణిలోని మొదటి సగభాగానికి మాత్రమే ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. తృతీయ చతుర్థాంశకం శ్రేణిలోని రెండవ సగభాగానికి మాత్రమే ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. ఇట్లాగే ప్రథమ దశాంశకము శ్రేణిలో మొదటి పదవ భాగానికి, ప్రథమ శతాంశకము శ్రేణిలో మొదటి 100వ భాగానికి మాత్రమే ప్రాధాన్యతనిస్తాయని గమనించవలె. ఈ మానాలకు అంకమధ్యమానికి లేదా మధ్యగతానికి

BRAOU

వున్నంత ప్రాధాన్యత లేకపోయినా వీటి వల్ల కొన్ని ప్రయోజనాలు లేకపోలేదు. శ్రేణులు ఎట్లా రూపొందించి ఉన్నాయో, శ్రేణులలోని వివిధ అంశాలు మధ్యగతం చుట్టు ఎట్లా విస్తృతి చెంది వున్నాయో తెలుసుకోవడానికి ఇవి చాలా వుపయోగపడతాయి.

17.4.4 బాహుళకము (Mode)

ఏ అంశం అయితే గణాంక శ్రేణిలో ఎక్కువసార్లు సంభవిస్తుందో ఆ అంశం విలువనే బాహుళకంగా నిర్వచించవచ్చు. శ్రేణిలోని ఏ స్థానం చుట్టూ అంశాలు ఎక్కువగా కేంద్రీకృత మవుతాయో ఆ స్థానపు విలువను బాహుళకంగా (కాక్స్టన్ మరియు కౌడెన్) అనే శాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించినారు. వారి అభిప్రాయం ప్రకారం శ్రేణిలోని ప్రాతినిధ్య విలువను బాహుళకంగా పరిగణిస్తారు. బాహుళకము శ్రేణిలో అత్యధిక సాంద్రత వున్న స్థానంలో ఉంటుంది. కనుక మధ్యగతం వలెనే ఇది కూడా స్థానాన్ని అనుసరించి నిర్ణయించే సగటు అని గమనించాలి. మనము సగటు వేతనము (average wage), సగటు విద్యార్థి (average student), ప్రాతినిధ్య పొలము (typical farm) మొదలైన మాటలు వింటుంటాము. ఇవన్నీ బాహుళకాన్ని గురించి చెప్పే మాటలని గుర్తుంచుకోవాలి. అంటే సాధారణంగా పై మాటలను బాహుళక విద్యార్థి, బాహుళక వేతనము, బాహుళక కమతము (modal student, modal wage and modal farm) అనే అర్థంలో వాడతారు. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులకు వచ్చిన బాహుళక మార్కులు 50 అని చెప్పితే ఆ తరగతిలో చాలా మందికి 50 మార్కులు వచ్చినాయని అర్థం. 70 మార్కులు 20 మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు కూడా ఆ తరగతిలో ఉండవచ్చు. కాని ఈ మార్కులను బాహుళకము కాని మార్కులు అంటారు. కారణమేమంటే ఈ మార్కులు తెచ్చుకొన్న విద్యార్థుల సంఖ్య తక్కువగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు బాహుళకము గురించి తెలుసుకోవలసిన ముఖ్యమైన అంశం ఏమిటంటే, ఇది శ్రేణిలోని ఎక్కువ అంశాలు కేంద్రీకృతమైన స్థానాన్ని తెలుపుతుంది కనుక ఎక్కువ అంశాలు కేంద్రీకృతమైన స్థానపు విలువను తెలుసుకోవడమే పరిశోధకుడి లక్ష్యమైనపుడు బాహుళకము అభిలషణీయమైన మానంగా పరిగణించవచ్చు. కాని, అంక మధ్యమం వలె ఇది శ్రేణిలోని అన్ని అంశాలపై ఆధారపడి ఉండదని గమనించాలి. మార్కెట్ సర్వే అధ్యయనాలలో బాహుళక ప్రయోజనం చాలా ఎక్కువ. ఉదాహరణకు రెడీమేడ్ వస్త్రాలు, లేదా బూట్ల గిరాకీ తెలుసుకోవడంలో బాహుళక పరిమాణం (modal size) ఉపయోగం చాలా ఎక్కువ. ఇలాంటి పరిశోధనలో అంకమధ్యమాన్ని ఉపయోగించినట్లయితే వచ్చే సగటు పరిమాణం (average size) ఊహాజనితంగా ఉంటుంది. ఏ (imaginary) వ్యక్తికీ తగని పరిమాణం ఫలితంగా రావచ్చు. ఇంకా, బాహుళకం చుట్టు ప్రక్కల కేంద్రీకృతమైన అంశాలపైనే ఆధారపడి ఉండదు. కాబట్టి మార్కెట్‌లో ఎక్కువ గిరాకీ ఉన్న పరిమాణ వస్త్రాలు గాని బూట్లు గాని తెలుసుకోవడానికి బాహుళకము చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

బాహుళకాన్ని గణించే పద్ధతులు

వైయక్తిక శ్రేణుల నుండి బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడం

వైయక్తిక శ్రేణుల్లో బాహుళకాన్ని కేవలం పరిశీలన ద్వారా గుర్తించవచ్చు. ఉదాహరణకు "అంశాలన్నింటిని ఒక క్రమంలో అమర్చి ఏ విలువైతే ఎక్కువ సార్లు సంభవిస్తుందో దానినే బాహుళకంగా గుర్తించవచ్చు.

2, 4, 13, 6, 8, 10, 12, 10, 17, 10, 21, 10, 18, 27 $M_o = 10$ గా గుర్తించవచ్చు.

M_o = Mode (బాహుళకం సంకేతం)

శ్రేణుల్లోని ఏదయినా ఒక విలువ ఒకటి కంటె ఎక్కువ సార్లు లేకుంటే బాహుళకాన్ని నిర్ణయించడం సాధ్యం కాదు. ఉదాహరణకు 10 మంది విద్యార్థుల మార్కులు 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 అయినప్పుడు

బాహుళక మార్కుల్ని నిర్ణయించలేము. అంతేకాక కొన్ని సందర్భాలలో శ్రేణిలో ఎక్కువసార్లు వచ్చే విలువలు ఒకటి కంటే ఎక్కువగా వున్నపుడు కూడా బాహుళకాన్ని నిర్ణయించలేము. ఉదాహరణకు, 7, 8, 10, 15, 22, 20, 10, 26, 20, 34, 20, 6, 10 అనే దత్తాంశంలో 10 మరియు 20 విలువలు రెండు కూడా మూడు సార్లు వస్తున్నాయి. కాబట్టి ఏది బాహుళకమో నిర్ణయించలేము. ఇటువంటి శ్రేణులను ద్విబాహుళక శ్రేణులు (Bi - mode series) అంటారు. శ్రేణులలో ఎక్కువసార్లు వచ్చే విలువలు మూడు వుంటే వాటిని త్రిబాహుళకం (Tri- mode series)అని, మూడు కంటే ఎక్కువగా వుంటే బహు బాహుళక (multi - mode) శ్రేణులని అంటారు. వ్యక్తిగత శ్రేణుల నుంచి బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడానికి శ్రేణిలోని ఒక్కొక్క అంశం ఎన్నిసార్లు వచ్చిందో లెక్కిస్తాము. అయితే, ఇట్లా అంశాలను లెక్కిస్తున్నామంటే ఆ అంశాల పౌన : పున్యాలను తీసుకొంటున్నామన్నమాట. వ్యక్తిగత శ్రేణులను వాటి పౌన : పున్యాన్ని అనుసరించి అమర్చితే అవి విరళ శ్రేణులు (grouped data) గాను, అవిరళశ్రేణులు (continuous series) గాను రూపొందుతాయని మనకు తెలుసు. కాబట్టి వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో బాహుళకాన్ని గణించడానికి అంత ప్రాధాన్యత లేదు.

విరళ శ్రేణుల నుంచి బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడం

కేవలం పరిశీలనల వల్ల, విరళ శ్రేణులలో అన్నింటికన్న ఎక్కువసార్లు అంటే అన్నింటి కన్న ఎక్కువ పౌన : పున్యమున్న విలువను బాహుళకంగా నిర్ణయించవచ్చు. ఈ నిర్ణయాన్ని తీసుకొనే ముందు గాని పరిసర అంశాల కేంద్రీకృతం ఎట్లా ఉన్నదో గమనించటం ఎంతైనా అవసరం. ఒక్కొక్కప్పుడు అంశాల సాంద్రతననుసరించి అన్నింటికన్న ఎక్కువ పౌన : పున్యమున్న విలువ కూడా బాహుళకం కావచ్చు. కాబట్టి అన్ని సందర్భాలలో అన్నింటికంటే ఎక్కువ పౌన : పున్యమున్న విలువ బాహుళకమవుతుందని చెప్పలేము. ఇట్లా ఖచ్చితంగా చెప్పలేని పరిస్థితులలో అంశాల కేంద్రీకృతాన్ని తెలుసుకోవడానికి దత్తాంశాన్ని వర్గీకృతం చేయడం (grouping) ద్వారా బాహుళకాన్ని నిర్ణయించవచ్చు.

ఉదా : ఒక ఫ్యాక్టరీలోని వందమంది కార్మికుల దినసరి వేతనాలు యీ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. బాహుళక వేతనాన్ని కనుక్కోండి.

వేతనాలు (దినసరి) (x)	5	6	7	8	9	10	11	12	15
కార్మికుల సంఖ్య (f)	8	12	20	32	12	10	31	2	1

ఈ దత్తాంశాన్ని పరిశీలించిన బాహుళక వేతనం రూ॥ 8 అని చెప్పవచ్చు. ఎందుకంటే 8 రూ ॥ దినసరి వేతనం పొందే కార్మికుల సంఖ్య ఎక్కువగా అంటే 32 మంది ఉన్నారు. అంతే కాకుండా బాహుళకానికి పరిసరాలలో ఉన్న అంశాల విభాజనం కూడా బాహుళకం వైపే కేంద్రీకృతం అయిఉన్నది. పోతే ఒక్కొక్కప్పుడు బాహుళకాన్ని ఇంత సులభంగా నిర్ణయించడం కష్టం. శ్రేణిలోని అంశాలు ఖచ్చితంగా ఒకే విలువ చుట్టూ కేంద్రీకృతం కానప్పుడు బాహుళకాన్ని నిర్ణయించడం సులభమైన పనిగాదు. ఉదాహరణకు క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశాన్ని పరిశీలించండి.

B R A O U

ఒక పట్టణంలోని ఉద్యోగుల నెలసరి వేతనాలు

నెలసరి వేతనము	ఉద్యోగుల సంఖ్య
300	20
350	40
400	80
450	130
500	90
600	20
700	15
800	150
1000	20
1500	20
2000	10
3000	5
మొత్తం	600

ఈ వివరాలను పరిశీలించినప్పుడు నెలసరి వేతనం 800 రూ ॥ ఉన్న ఉద్యోగుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నది. కాబట్టి 800 రూపాయల నెలసరి వేతనాన్ని బాహుళక వేతనంగా అనుకోవడానికి అవకాశం ఉన్నది. కాని అంశాల విభాజనాన్ని క్షుణ్ణంగా పరిశీలిస్తే అవి 800 వైపు గాకుండా దానికి పైన వున్న విలువల వైపు కేంద్రీకృతమై ఉన్నట్లు గమనించవచ్చు. ఈ పరిస్థితులలో 800 రూ ॥ నెలసరి వేతనాన్ని బాహుళకంగా చెప్పలేము. కాబట్టి దత్తాంశాన్ని వర్గీకరణ చేసే పద్ధతి ద్వారా బాహుళకాన్ని గణన చేయడం జరుగుతుంది. నిజానికి బాహుళకాన్ని గణించడంలో ఎప్పుడూ రెండు పట్టికలను తయారు చేసుకోవాలి. ఒకటి వర్గీకరణ పట్టిక (grouping table) రెండవది మార్కుల పట్టిక (marking table) లేదా విశ్లేషణ పట్టిక (analysis table) .

BRAOU

వర్గీకరణ మరియు విశ్లేషణ పట్టికలను తయారు చేయడం

వర్గీకరణ పట్టికలలో చలాంకము విలువల (values of variable) మరియు వాటి పౌన : పున్యాల (frequency) దొంతిలుగాక మరి ఐదు దొంతిలు గణించాలి. చలాంకము విలువలను మొదటరాసి తరువాత పౌన : పున్య దొంతి రాసి దానిని మొదటి దొంతిగా పరిగణించాలి. ఇపుడు మొదటి దొంతిలోని రెండేసి పౌన : పున్యాల చొప్పున సంచితం చేసి వాటిని రెండవ దొంతిలో ఆయా అంశాలకు ఎదురుగా వ్రాయాలి. తరువాత మొదటి పౌన : పున్యాలను వదిలిపెట్టి తరువాత ఉన్న పౌన : పున్యాలను రెండేసి చొప్పున తీసుకొని వాటిని సంచితం చేసి మూడవదొంతిలో చూపినట్లు వ్రాయాలి. చివరగా మొదటి రెండు పౌన : పున్యాలను మళ్ళీ మూడేసి పౌన : పున్యాలను సంచితం చేసి వాటి మొత్తాలను ఆరవ దొంతిలో వ్రాయాలి. అప్పటికీ బాహుళక స్థానం ఇంకా నిర్ణయించలేక పోతే పౌన : పున్యాలను 4, 5 చొప్పున తీసుకొని సంచితం చేయవలసి రావచ్చు. చాలా అరుదుగా ఇట్లాంటి సందర్భం రావచ్చు.

దత్తాంశాన్ని పైన చెప్పిన పద్ధతిలో వర్గీకృతం చేసిన తరువాత విశ్లేషణ పట్టిక నొకదానిని తయారు చేసి తద్వారా ఎక్కువసార్లు వచ్చిన విలువ ఏదో నిర్ణయించవచ్చు.

$$= L_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_o - f_2)}\right) i$$

అయితే అంతర్వేశనం ద్వారా బాహుళకాన్ని గణించేటపుడు ఈ క్రింది విషయాలను గమనించాలి.

1) ఒకవేళ ($2f_1$- fo-f_2) విలువ శూన్యమైనట్లయితే బాహుళకాన్ని ఈ క్రింది సూత్రం ద్వారా గుణించాలి.

$$M_0 = L_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{|f_1 - f_o| + |f_1 - f_2|}\right) i$$

ఇక్కడ (f_1-f_0) విలువగాని (f_1-f_2)విలువగాని ఋణాత్మకమైనపుడు వాటిని ధనాత్మక విలువగానే పరిగణించాలి (Absolute differences should be taken).

2) బాహుళక తరగతికి ముందు ఉన్న తరగతి పౌన : పున్యము బాహుళక తరగతి పౌన : పున్యం కంటే ఎక్కువగా ఉన్నట్లైతే, బాహుళకాన్ని గణించడానికి ఈ క్రింది అంతర్వేశన సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తారు.

$$M_o = L_1 + \left(\frac{f_2}{f_1 + f_2)}\right) i$$

3) బాహుళక తరగతి ఎగువ అవధిని ఉపయోగించి కూడా బాహుళకాన్ని గుణించవచ్చు. అప్పుడు సూత్రం

$$M_0 = L_2 + \left(\frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_o) + (f_1 - f_2)}\right) i$$

L_2 అనగా బాహుళక తరగతి ఎగువ అవధి

4) ఒక వేళ ప్రథమ తరగతి బాహుళక తరగతి అయినప్పుడు $f_0 = 0$ అనుకోవాలి.

5) పైన పేర్కొన్న అంతర్వేశన సూత్రాలను అన్ని తరగతుల అంతరాలు సమానంగా ఉన్నపుడు మాత్రమే ఉపయోగించాలి. తరగతి అంతరాలు సమానంగా లేనపుడు తరగతి అంతరాల్లో పౌన : పున్య విభాజనం ఏకరూపంగా (uniform frequency distribution within classes) ఉన్నదనుకొని తరగతి అంతరాలను **సమానం చేసిన తరువాతనే బాహుళకాన్ని గణించాలి.**

ఉదా : ఒక నగరంలోని ఒక ప్రాంతంలోని 500 కుటుంబాలు చెల్లించే నెలసరి ఇంటి అద్దె గురించిన సమాచారం ఈ క్రింద ఇవ్వబడింది. బాహుళక ఇంటి అద్దెను గణించండి.

నెలసరి (ఇంటి అద్దె (రూ ॥లలో)	0 - 50	50 - 100	100- 150	150- 200	200- 250	250- 300	300- 350	350- 400	400 కంటే ఎక్కువ
కుటుంబాల సంఖ్య	5	14	40	91	150	87	60	38	150
									500

B R A O U

రూపాయలు 200 - 250 ఇంటి అద్దె చెల్లించే కుటుంబాల సంఖ్య అన్నింటికంటే ఎక్కువగా, అంటే 150, ఉంది కాబట్టి అదే బాహుళక తరగతి అని స్పష్టంగా గ్రహించవచ్చు. వర్గీకరణ పద్ధతి ద్వారా కూడా దానిని నిర్ణయించవచ్చు.

ఇప్పుడు బాహుళకాన్ని గుణించడానికి అంతర్వేశన సూత్రాన్ని ఉపయోగిద్దాము.

$$M_0 = L_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_o) + (f_1 - f_2)} \right) i$$

ఇక్కడ L_1 = బాహుళక తరగతి దిగువ అవధి

f_0 = బాహుళక తరగతికి ముందువున్న తరగతి పౌన : పున్యము

f_1 = బాహుళక తరగతి పౌన : పున్యము

f_2 = బాహుళక తరగతి తరువాత తరగతి పౌన : పున్యము

$L_1 = 200, f_0 = 91, f_1 = 150, f_2 = 87, i = 250 - 200 = 50$

దినసరి వేతనం (రూపాయలు)	50 కంటే తక్కువ	45 క.త	40 క.త	35 క.త	30 క.త	25 క.త	20 క.త	15 కంటె తక్కువ
ఉద్యోగుల సంఖ్య	97	95	90	80	60	30	12	4

ఇవ్వబడిన దత్తాంశం సంచిత పౌన : పున్య రూపంలో వుంది కాబట్టి దాని ముందు సాధారణ పౌన : పున్య రూపంలో మార్చవలె.

తరగతి అంతరం	వర్గీకరణ పట్టిక						విశ్లేషణ పట్టిక	
	f = I	II	III	IV	V	VI		
45-50	97-95 = 2 }	7						
40-45	95-90=5		15	}17				
35-40	90-80=10 }	20			}35		|	1
30-35	80-60=20f_2 }		} 50				|||	3
25-30	60-30=30f_1					60	卌|	6
20-25	30-12=18f_0	48		}68				
15-20	12-4 = 8 }		} 26		}56	30	|||	3
10-15	4	12					|	1

పై పట్టికల ఆధారంగా అన్నింటికంటే ఎక్కువసార్లు వచ్చే తరగతి 25 - 30 అని తెలుస్తుంది. కాబట్టి, ఇదే బాహుళక తరగతి. ఇప్పుడు అంతర్వేశనం సూత్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని తెలుసుకోవలె.

$$M_0 = L_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_0) + f_1 - f_2} \right) . \ i$$

BRAOU

కాబట్టి $M_0 = 200 + \left(\frac{150 - 91}{(150-91) + (150-87)}\right) x\ 50$

$= 200 + \left(\frac{59}{59 + 63}\right) x\ 50 \quad = 200 + \frac{59}{122} x\ 50$

$\therefore M_0 = 200 + \frac{2950}{122} = 200+24.18 = 224.18$

బాహుళక తరగతి ఎగువ అవధిని వుపయోగిస్తు కూడా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవచ్చుని ఇదివరకు తెలుసుకున్నాము.

$$M_0 = L_2 - \left(\frac{f_1 - f_2}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)}\right) x\ i$$

$L_2 = 250$

$\therefore M_0 = 250 - \left(\frac{150-87}{(150-91) + (150-87)}\right) x\ 50$

$= 250 - \frac{63}{59+63} x\ 50 = 250 - \frac{3150}{122} = 250 - 24.82$

$\therefore M_0 = 224.18$

ఉదా 11 : ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన 97 మంది ఉద్యోగుల దినసరి వేతనాలు దత్తాంశ ఆధారంగా బాహుళక వేతనాన్ని కనుక్కోండి.

$L_1 = 25, f_0 = 18, f_1 = 30, f_2 = 20$

తరగతి అంతరాల విలువలను మనం అవరోహణక్రమంలో రాసినాము కాబట్టి f_2, f_1 పైన, f_0, f_1 క్రింద వుంటాయని గమనించాలి.

$$M_0 = 25 + \frac{30 - 18}{(30-18) + (30-20)} x\ 5$$

$\therefore M_0 = 25 + \frac{12}{12+10} x\ 5 = 25 + \frac{60}{22} = 25 + 2.72 = 27.72$

ఉదా 11 ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని గణించండి.

తరగతి అంతరాలు	వర్గీకరణ పట్టిక						విశ్లేషణ పట్టిక
	I	II	III	IV	V	VI	
10 – 20	4	10					0
20 – 30	6		11	15			0
30 – 40	5	15			21		0
40 – 50	10		30	52		35	0
50 – 60	20	(42)					111 = 3
60 – 70	22		46		(66)		~~1111~~ = 5
70 – 80	(24)	30				52	1111 = 4
80 – 90	6		8	32	9		1 = 1
90 – 100	2	3					0
100 – 110	1						0

పైన తయారు చేసిన వర్గీకరణ పట్టిక మరియు విశ్లేషణ పట్టికలోని మార్కుల ద్వారా 60 - 70ని బాహుళక తరగతిగా నిర్ణయించవచ్చు.

$L_1 = 60, f_0 = 20, f_1 = 22, f_2 = 24, i = 10$

$$M_0 = L_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)}\right) x\ i$$

సూత్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని లెక్కించినప్పుడు

$$M_0 = 60 + \left(\frac{22 - 20}{(22 - 20) + (22 - 24)}\right) x\ 10$$

$$= 60 + \frac{2}{2 - 2} x 10 = 60 + \frac{2}{0} x\ 10$$

కాని గణితశాస్త్ర సూత్రాల ప్రకారం ఏదైనా ఒక సంఖ్య సున్నాతో భాగించబడడానికి నిర్వచనం లేదు. (undefined) కాబట్టి ఈ సూత్రాన్ని వుపయోగించి బాహుళకాన్ని గణించలేము.

ఇట్లాంటి సందర్భాలలో బాహుళకాన్ని గణించడానికి వేరే సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తారని ముందే చెప్పడమైనది.

$$M_0 = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{|f_1 - f_0||f_1 - f_2|}\ x\ i$$

సూత్రంలోని హారంలో వున్న నిలువు గీతలమధ్య వచ్చే విలువలు ధనాత్మకమైనా ఋణాత్మకమైనా వాటిని ధనాత్మకంగానే అనగా నిరపేక్ష విలువలగా (absolute values) పరిగణించాలి.

BRAOU

కాబట్టి $M_0 = 60 + \frac{22 - 20}{|22 - 20|\,|22 - 24|} \times 1$

$$M_0 = 60 + \frac{2}{2+2} \times 10 = 60 + \frac{2}{4} \times 10$$

$$\therefore M_0 = 60 + 5 = 65$$

తరగతి అంతరాలు అసమానంగా వున్నపుడు దత్తాంశాన్ని వాటిని సమానం చేస్తూ తిరిగి రాసిన తరువాతనే బాహుళకాన్ని గణించవలెనని ఇది వరకే తెలుసుకొన్నాము.

ఉదా ॥ ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన కొన్ని కంపెనీలకు సంబంధించిన డివిడెండ్ల సమాచారం ఆధారంగా బాహుళకాన్ని గణించండి.

చెల్లించిన డివిడెండు శాతం విలువ	కంపెనీల సంఖ్య
0 - 1.0	10
1.0 - 2.5	15
2.5 - 3.5	20
3.5 - 4.0	23
4.0 - 5.0	30
5.0 - 7.5	172
7.5 - 9.0	60
9.0 - 10.0	39
10.0 - 12.5	104
12.5 - 14.0	250
14.0 - 15.0	164
15.0 - 17.5	278
17.5 - 19.0	100
19.0 - 20.0	72
20.0 - 22.5	331
22.5 - 25.0	150

BRAOU

పై దత్తాంశంలో తరగతి అంతరాలు అసమానంగా వున్నాయి. కాబట్టి బాహుళకాన్ని గణించే ముందు పౌన : పున్య పట్టికను తరగతి అంతరాలను సమానం చేస్తూ తిరిగీ తయారు చేయాలి.

డివిడెంటు విలువ	కంపెనీల సంఖ్య
0 - 2.5	25
2.5 - 5.0	73
5.0 - 7.5	172
7.5 - 10.0	99
10.0 - 12.5	104 - f_0
12.5 - 15.0	414 - f_1
15.0 - 17.5	278 - f_2
17.5 - 20.0	172
20.0 - 22.5	331
22.5 - 25.0	150

B R A O U

ఇప్పుడు దత్తాంశ పౌన : పున్య విభాజనాన్ని పరిశీలిస్తే 12.5 - 15.0 అనేది బాహుళక తరగతిగా గమనించవచ్చు. వర్గీకరణ పట్టిక ద్వారా కూడా దీనిని నిర్ధారించవచ్చు.

$$M_0 = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} x\, i$$

$$= 12.5 + \frac{310}{310 + 136} x\, 2.5$$

$$\therefore M_0 = 12.5 + \frac{775}{446} = 12.5 + 1.77 = 14.23$$

ఉదా : తరగతిలోని 94 విద్యార్థుల బాహుళ మార్కులు 54. దీనిలో 10 మంది విద్యార్థులకు 0 - 20 మధ్య, 30 మంది విద్యార్థుల 40 - 60 మధ్య వున్నవి. పరీక్షలోని గరిష్ఠ మార్కులు 100. 80 మార్కుల కంటె ఎక్కువ వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్య 14. 20 - 40 మధ్య మరియు 60 - 80 మధ్య మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

తరగతి అంతరము	పౌన : పున్యము
0 - 20	10
20-40	x f_0
40-60	30 f_1
60-80	y f_2
80-100	14
	94

$$M_0 = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} X\, i$$

$$54 = 40 + \frac{(30-x)}{(30-x) + (30-y)} x\ 20$$

లేక $54 - 40 = \frac{30 - x}{(30 - x) + (30-y)} x\ 20$

$$14 = \frac{600 - 20x}{60 - x - y}$$

$14 (60 - x - y) = 600 - 20 x$

$840 - 14x - 14y = 600 - 20x$

$20x - 14x - 14y = 600 - 840$

$6x - 14y = - 240$

$3x - 7y = - 120$ ______________ (1)

తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య 94 కాబట్టి

$10+x+30+y+14=94$

లేదా $x + y = 40$ ______________(2)

ఇపుడు రెండవ సమీకరణాన్ని 3 తో గుణిస్తే

$3x + 3y = 120$ ________________ (3)

ఇప్పుడు మూడవ సమీకరణం నుండి మొదటి సమీకరణాన్ని తీసివేస్తే

$3x + 3y - (3x - 7y) = 120 - (-120)$

$3x + 3y - 3x + 7y = 120 + 120$

$10y = 240$

$y = 24$

y విలువను రెండవ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$x + 24 = 40$

$x = 40 - 24 = 16$

కాబట్టి $f_0 = 16, f_2 = 24$

అంటే 20 - 40 మధ్య మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 16 మంది 60 - 80 మధ్య మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 24 మంది వున్నారని తెలుసుకొన్నామన్నమాట.

రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడం

అవిరళ శ్రేణిలోనున్న దత్తాంశానికి, అన్నింటికంటె పెద్దదైన పౌన : పున్యము ఒకే ఒకటిగా [illegible] సోపాన చిత్రం ద్వారాగాని, పౌన : పున్య బహుభుజి లేదా పౌన : పున్య వక్రం ద్వారా గానీ, [illegible] వక్రం ద్వారాగానీ బహుళకాన్ని కనుక్కోవచ్చు. సోపాన చిత్ర నిర్మాణాన్ని గురించి [illegible] ఈ చిత్రపటంలో ఉండే దీర్ఘ చతురస్రాలలో అన్నింటికన్నా ఉన్నతంగా ఉన్నదానిని బా[illegible] దీర్ఘచతురస్రంగా గుర్తించాలి. ఆ తరువాత క్రింది పటంలో చూపినట్లు బాహుళక తరగతి దీర్ఘచతురస్రపు [illegible] అవధిని చూపించే మూల వరకు ఒక సరళ రేఖను గీయాలి. ఇట్లాగే బాహుళక తరగతి దీర్ఘ చతురస్రానికి కుడివైపున ఉన్న దీర్ఘ చతురస్రపు దిగువ అవధిని చూపించే మూల నుంచి బాహుళక తరగతి దీర్ఘచతురస్రపు దిగువ అవధిని చూపించే మూల వరకు. ఇంకొక సరళరేఖను గీయాలి.

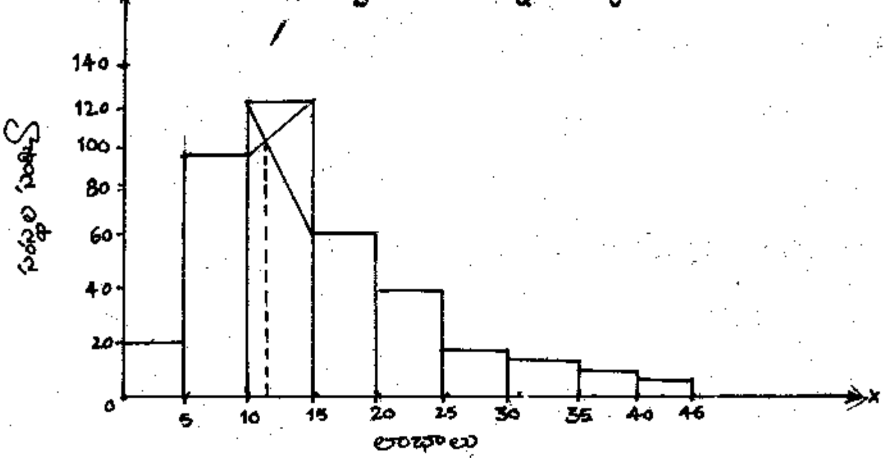
ఈ రెండు సరళరేఖలు ఒకదానిని ఒకటి ఖండించుకొనే బిందువు నుంచి X అక్షానికి ఒక లంబరేఖను గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X అక్షాన్ని తాకిన బిందువు వద్ద వున్న విలువ బాహుళకము అవుతుంది.

ఉదా : ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.

లాభాలు (రూ॥లలో)	0 - 5	5 -10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
సంస్థల సంఖ్య	15	100	120	58	26	5	3	2	1

BRAOU

రేఖా చిత్రపద్ధతి ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడం.



పౌన : పున్య బహుభుజి లేదా పౌన : పున్య వక్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవలెనంటే ఇచ్చిన దత్తాంశానికి పౌన : పున్య బహుభుజిని లేదా పౌన : పున్య వక్రాన్ని గీయాలి. ఆ తరువాత బహుభుజి లేదా వక్రం శిఖరము (Highest Point) నుండి X అక్షానికి ఒక లంబరేఖ గీయాలి. ఈ లంబరేఖ X అక్షాన్ని తాకిన బిందువు వద్ద ఉన్న విలువ ఇంచుమించు బహుళకానికి సమానం అవుతుంది.

సంచిత పౌన : పున్య వక్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడానికి ఆ వక్రము ఎక్కడ ఎక్కువ నిలువుగా (steepest slope) ఉన్నదో ఒక బిందువు గుర్తించాలి. ఈ బిందువు నుంచి X అక్షానికి లంబరేఖ గీస్తే [illegible] తాకిన బిందువు వద్ద వున్న విలువ బాహుళకానికి ఇంచుమించు సమానమవుతుందని [illegible]

[illegible]ళకము - సుగుణాలు

1) బాహుళకాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. దీన్ని గణించే పద్ధతి కూడా సులభమైనదనే చెప్పవచ్చు. మధ్య గతం వలెనే బాహుళకాన్ని కూడా, కొన్ని సందర్భాలలో కేవలం దత్తాంశ పరిశీలన ద్వారా గుర్తించవచ్చు.

2) దత్తాంశంలోని అల్పతమ, అధికతమ (extreme values) విలువల ప్రాబల్యానికి లోనుకాదు.

3) తరగతి అంతరాలు సమానంగా లేనపుడు కూడా బాహుళకాన్ని గణించవచ్చు. అయితే బాహుళక తరగతికి ముందు ఉన్న మరియు తరువాత ఉన్న తరగతి అంతరాలు బాహుళక తరగతి అంతరానికి సమానంగా ఉండవలెనని గమనించవచ్చు.

4) శ్రేణిలోని ప్రథమ తరగతి దిగువ అవధి మరియు అంతిమ తరగతి ఎగువ అవధి అనిశ్చితంగా ఉన్నప్పటికి (open - end class intervals) కూడా బాహుళకాన్ని గణించవచ్చు.

5) బాహుళకాన్ని కనుక్కోవడానికి శ్రేణిలోని అంశాలన్నీ తెలియవలసిన పనిలేదు. అత్యధిక సాంద్రత వున్న స్థానం తెలిస్తే చాలు.

6) కొన్ని సందర్భాలలో దత్తాంశాన్ని ప్రతిబింబించే ఉత్తమమైన సగటు బాహుళకమేనని చెప్పవచ్చు.

BRAOU

లోపాలు

1. దత్తాంశంలోని అన్ని అంశాలపై ఇది ఆధారపడదు.

2. ఇది ఇతర బీజగణిత పద్ధతులలో ఉపయోగించ వీలులేని సగటు.

3. బాహుళకము నిర్దిష్టంగా నిర్వచించిన సగటు (not clearly defined) కాదు. ఎందుకంటే శ్రేణులలో ఒక్కొక్కపుడు ఒకటి కంటె ఎక్కువ బాహుళకాలు ఉండడానికి అవకాశం వుంది. అందువల్ల ఆదర్శ సగటుకు కావలసిన ఒక ముఖ్యమైన లక్షణమే దీనిలో లోపించింది.

4. అంశాల సాపేక్ష ప్రాధాన్యతను గుర్తించవలసిన సందర్భాలలో బాహుళకము తగిన సగటు కాదు.

5. ఉపయోగించే వర్గీకరణ పద్ధతిపై బాహుళకము విలువ ఆధారపడి వుండవచ్చు.

17.4.5 అంకమధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకం మరియు ఇతర సగటుల మధ్య సంబంధం (Empirical Relationship Between Averages)

మనం ఇంతవరకూ చూసిన మూడురకాల సగటులు వివిధ రకాలయిన లక్షణాలను కలిగి వున్నాయి. ఇవ్వబడిన ఒక దత్తాంశానికి ఈ మూడు సగటులను గుణించినప్పుడు వచ్చే ఫలితాలు ఒకేవిధంగా వుండకపోవచ్చుననే విషయాన్ని గమనించాలి. చాలా అరుదయిన సందర్భాలలో మాత్రమే మధ్యగతము, అంకమధ్యమము మరియు బాహుళకం సమానంగా వుంటాయి. ఈ మూడు సగటులు సమానంగా వున్నటువంటి విభాజనాలను సౌష్ఠవ విభాజనాలు (symmetrical disributions) అంటారు. విభాజనాలు అసౌష్ఠవంగా (assymmetrical) లేదా వైషమ్యంగా వున్నప్పుడు అంకమధ్యమము మధ్యగతము మరియు బాహుళకాల మధ్య ఒక నిర్ణీత సంబంధము ఉండదు. కాని మితమైన అసౌష్ఠవ విభాజనాలలో (moderatly skewed disributions) వీటి మధ్య ఒకవిధమైన సంబంధము వుంటుంది. కార్ల్ పియర్సన్ వీటి మధ్య సంబంధాన్ని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించినాడు.

Mode = Mean - 3 (Mean - Median) అంటే

Mode = 3 Median - 2 Mean లేదా

Mean - Mode = 3 (Mean - Median)

పియర్సన్ నిర్వచించిన ఈ సూత్రం ప్రకారం

Median = Mode + 2 / 3 (Mean - Mode)

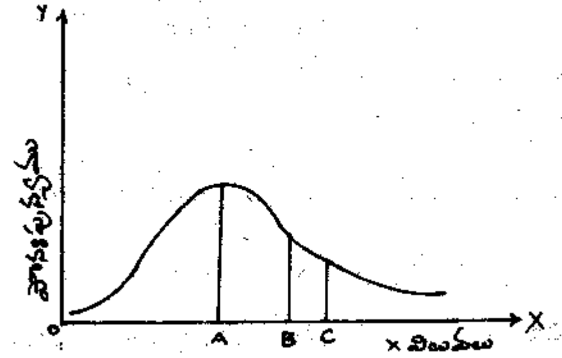
Mean = Mode + 3/2 (Median - Mode)

= 1/2 (3 Median - Mode)

ఈ సూత్రాల ద్వారా తెలిసేదేమంటే మితమైన అసౌష్ఠవ విభాజనాలలో సాధారణంగా అంకమధ్యమము ఒక చివర, బాహుళకం ఇంకో చివర వాటి మధ్య మధ్యగతం వుంటాయి. అంకమధ్యమం నుంచి బాహుళకానికి వున్న దూరంలోని 1/3 వ వంతు దూరంలో, అంకమధ్యమం నుంచి బాహుళకం వైపు, మధ్యగతం వుంటుంది. కాబట్టి మధ్యగతం బాహుళకాని కంటె అంకమధ్యమానికి దగ్గరగా వుంటుంది.

B R A O U

పౌన : పున్య విభాజన వక్రరేఖ సౌష్టవంగా లేక ఎక్కువ అంశాలు చలాంకపు తక్కువ విలువల చుట్టూ కేంద్రీకృతమైనప్పుడు విభాజన వక్రరేఖ కుడివైపుకు పొడవైన తోకవలె వుంటుంది. ఇట్లాంటి సందర్భాలలో అంకమధ్యమ విలువ గరిష్టంగాను బాహుళక విలువ కనిష్టంగాను మధ్యగతం అంకమధ్యమం నుండి బాహుళకానికి వున్న దూరంలో 1/3 వ వంతు దూరంలో వుంటుంది.



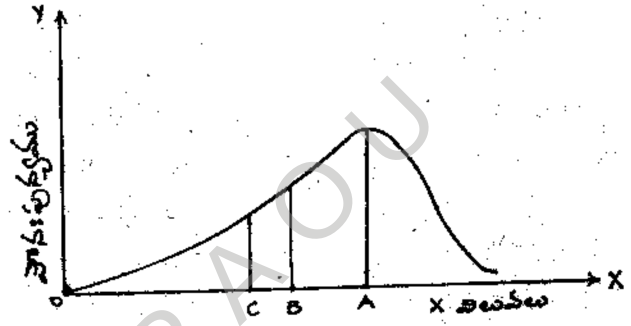
A : Mode

B : Mediam

C : Mean

BC = 1/3 (AC)

పైన పేర్కొన్న విధంగా కాక పౌన : పున్య విభాజనం ఎడమవైపు పొడవైన తోక కలిగి వుంటే - అంటే ఎక్కువ అంశాలు చలాంకపు ఎక్కువ విలువల చుట్టూ కేంద్రీకృతమయినప్పుడు అంకమధ్యమం కనిష్టంగాను, బాహుళకం గరిష్టంగాను, ఈ రెండింటి మధ్యదూరంలో 1/3 వ వంతు దూరంలో అంకమధ్యమం నుండి బాహుళకం వైపు, మధ్య గతం వుంటుంది.



BRAOU

విభాజనాల్లోని అన్ని అంశాల విలువలు సమానంగా వున్నప్పుడు తప్ప అంకమధ్యమము, హార మధ్యమము (harmonic mean) మరియు గుణ మధ్యమాల (geometric mean) మధ్య సంబంధం ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

$$AM \geq GM \geq HM$$

అంటే అంకమధ్యమము గరిష్టంగాను, గుణమధ్యమము దానికంటే తక్కువగాను మరియు హారమధ్యమము ఈ రెండింటి కంటే తక్కువగాను వుంటాయి.

ఉదా ॥ ఒక పౌన : పున్య విభాజనానికి లెక్కించిన మధ్యగతము 25, అంకమధ్యమము 30 అయినప్పుడు బాహుళకపు విలువను కనుక్కోండి.

పియర్సన్ ప్రతిపాదించిన సూత్రం ప్రకారం

$$M_0 = 3\ Md - 2\ Mean$$

$$M_0 = 3 \times 25 - 2 \times 30 = 75 - 60 = 15$$

17.5 ఇతర ప్రత్యేక సగటులు

అంకమధ్యమము, మధ్యగతము మరియు బాహుళకము వివిధ శాస్త్ర రంగాలలో విరివిగా వుపయోగింపబడే సగటు లైనప్పటికీ పరిశోధనలలో ఇంకా కొన్ని ప్రత్యేక సగటులు కూడా వాడుకలో వున్నాయి. పోతే ఇవన్నీ బీజగణిత సూత్రాలపై ఆధారపడి అంకమధ్యమానికి చాలా దగ్గర సంబంధాన్ని కలిగి వున్నాయి. ఈ రకమైన ప్రత్యేక సగటులలో ముఖ్యమైనవి.

1.	భారిత అంకమధ్యమము	(Weighted Arithmetic Mean)
2.	గుణ మధ్యమము	(Geomeric Mean)
3.	హార మధ్యమము	(Harmonic Mean)
4.	చలిత మధ్యమము	(Moving Average)
5.	పురోగామి మ ధ్యమం	(Progressive Average)
6.	వర్గమూల మ ధ్యమం	(Quadratic Mean)

ముందుగా మనం భారిత అంకమధ్యమం, గుణ మరియు హార మధ్యమాల గురించి తెలుసుకొందాం.

17.5.1 భారిత అంకమధ్యమం

ఒక శ్రేణిలోని అంశాలకు సాధారణ అంకమధ్యమాన్ని గణించేటప్పుడు ఆ అంశాలన్ని సమాన ప్రాధాన్యాన్ని కలిగి వున్నాయనే ప్రమేయం ఆధారంగా అంశాల మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగించి అంకమధ్యమాన్ని గణించడం జరుగుతుంది. కాని వాస్తవ ప్రపంచంలో ఇట్లా అంశాలన్నీ ఒకే ప్రాధాన్యాన్ని కలిగి వుండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక సమూహానికి చెందిన ప్రజల జీవన వ్యయంలో మార్పును అధ్యయనం చేసేటప్పుడు వారు వినియోగించే వస్తువుల సాధారణ యూనిట్ ధరల సగటును గణిస్తే అది వాస్తవ పరిస్థితిని ప్రతిబింబించదు. ఎందుకంటే ప్రజలు వినియోగించే వివిధ వస్తువుల్లో కన్ని చాలా ప్రాధాన్యమయినవి (బియ్యం మొ ॥) మరికొన్ని అంత ప్రాధాన్యమైనవి కాకపోవచ్చు. కాబట్టి వస్తువుల ప్రాధాన్యాన్ని అనుసరించి వాటికి భారాలనిచ్చి తద్వారా సగటు లెక్కించినప్పుడు అట్లాంటి సగటు చాలావరకు వాస్తవ పరిస్థితిని తెలియచేస్తుంది.

ఇట్లా శ్రేణిలోని వివిధ అంశాలకు వాటి ప్రాధాన్యాన్ని బట్టి భారితాలిచ్చి ఈ భారితాలతో అంశాలను గుణించి వాటి లబ్ధాల మొత్తాన్ని భారితాల మొత్తంతో భాగించి రాబట్టే సగటునే భారిత అంకమధ్యమంగా నిర్వచించవచ్చు. ఉదాహరణకు శ్రేణిలో $X_1, X_2 \ldots X_n$ అనే 'n' అంశాలు ఉన్నప్పుడు ప్రతి అంశం విలువను దానికి ఇవ్వబడిన భారితంతో గుణించి $(X_1 W_1, X_2 W_2, \ldots, X_n W_n)$ ఈ లబ్ధాల మొత్తాన్ని $(\Sigma W_i X_i)$ భారితాల మొత్తం (ΣW_i) తో భాగిస్తే భారిత అంకమధ్యమం వస్తుంది.

$$\overline{X}_W = \frac{\Sigma W_i X_i}{\Sigma W_i}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

$\overline{X}_W$ భారిత అంక మధ్యమము. అంటే

$$\overline{X}_W = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots\dots + W_n X_n}{W_1 + W_2 \dots\dots + W_n} = \frac{\Sigma W_i X_i}{\Sigma W_i}$$

అంకమధ్యమం లాగా భారిత అంకమధ్యమాన్ని కూడా విచలనాల ఆధారంగా సూక్ష్మ పద్ధతిలో గణించవచ్చు.

$$\overline{X}w = A_W + \frac{\Sigma W_i \, d X i}{\Sigma W_i}$$

A_W : భారిత అంకమధ్యమము

ΣWdX : భారిత అంకమధ్యమము నుండి ప్రతి అంశం విచలనాన్ని ఆ అంశం భారితంతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము.

భారిత అంకమధ్యమాన్ని ప్రధానంగా సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో విరివిగా వుపయోగిస్తారు. ప్రామాణిక జనన మరణాల రేట్ల లెక్కింపులో కూడా భారిత అంకమధ్యమం ఎక్కువగా ఉపయోగపడుతుంది.

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి భారిత అంకమధ్యమాన్ని గణించండి.

వస్తువు	ధర రూ ॥	భారితము కొనుగోలు పరిమాణం	WX	dX	WdX
A	10	3	30	- 5	- 15
B	20	1	20	5	5
C	15	2	30	0	0
D	5	3	15	-10	- 30
E	30	1	30	15	15
N = 5	ΣX=80	ΣW=10	125	5	- 25

సాధారణ అంకమధ్యమము $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{80}{5} = 16$

భారిత సగటు 15 అనుకొన్నపుడు $\overline{X} = A + \frac{\Sigma dn}{n}$

$$\overline{X} = 15 + \left(\frac{5}{5}\right) = 15 + 1 = 16$$

భారిత సగటు : ప్రత్యక్ష పద్ధతి

$$\overline{X}_W = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = 12.5$$

భారిత సగటు : సూక్ష్మ పద్ధతి : $\overline{X}_W = A_W + \frac{\Sigma WdX}{\Sigma W} = 15 + \left(\frac{-25}{10}\right)$

$$\overline{X}_W = 15 - 2.5 = 12.5$$

సమగ్ర అంకమధ్యమము (Combined Arithmetic Mean)

రెండు సమూహాలకు చెందిన అంశాల సంఖ్య మరియు వాటి సగటుల ఆధారంగా ఆ రెండు సమూహాలకు కలిపి సగటును లెక్కించినప్పుడు అది సమగ్ర అంకమధ్యమము అవుతుంది.

ఉదా : $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ అనేవి రెండు సమూహాల సగటులు మరియు N_1, N_2 అనేవి ఆ సమూహాల్లోని అంశాల సంఖ్య అయినప్పుడు సమగ్ర అంకమధ్యమం $\overline{X}_{12}$

$$\overline{X}_{12} = \frac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2}{N_1 + N_2}$$

రెండు కంటే ఎక్కువ సమూహాలు అంటే " n " సమూహాలు వున్నపుడు

$$\overline{X}_{12..n} = \frac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + \ldots + N_n\overline{X}_n}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n} = \frac{\Sigma N i \overline{X} i}{\Sigma Ni} \qquad i = 1, \ldots n$$

ఉదా : ప్రథమ, ద్వితీయ మరియు తృతీయ సంవత్సరాల్లోని విద్యార్థులకు అర్థశాస్త్రంలో వచ్చిన సగటు మార్కులు ఈ క్రింది విధంగా వున్నాయి. మూడు సంవత్సరాల విద్యార్థులకు సమగ్ర అంక మధ్యమాన్ని గణించండి.

సంవత్సరము	సగటు మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
ప్రథమ	57	30
ద్వితీయ	60	45
తృతీయ	63	25

$$\overline{X}_{123} = \frac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + N_3\overline{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

$$= \frac{30 \text{ X } 57 + 45 \text{ X } 60 + 25 \text{ X } 63}{30+45+25}$$

$$\overline{X}_{123} = \frac{1710 + 2700 + 1575}{100} = \frac{5985}{100} = 59.85$$

B R A O U

మూడు సమూహాల సగటు = $\dfrac{\text{మూడు సమూహాల్లోని అంశాల విలువల మొత్తం}}{\text{మూడు సమూహాల్లోని అంశాల సంఖ్య}}$

$$\overline{X}_{123} = \frac{\Sigma X_1 + \Sigma X_2 + \Sigma X_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$ కాని $\Sigma X_1 = N_1 \overline{X}_1$ కాబట్టి

$$\overline{X}_{123} = \frac{N_1 \overline{X}_1 + N_2 \overline{X}_2 + N_3 \overline{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

17.5.2 గుణ మధ్యమం (Geometric Mean)

ఒక శ్రేణిలోని N అంశాల లబ్దానికి N వ మూలకాన్ని గుణమధ్యమము అంటారు. కాబట్టి రెండు అంశాలున్న శ్రేణికి ఆ రెండు అంశాల లబ్ధం యొక్క వర్గమూలము దాని గుణమధ్యమం అవుతుంది. మూడు అంశాలున్న శ్రేణి యొక్క గుణమధ్యమం ఆ మూడు అంశాల లబ్ధం యొక్క ఘనమూలం అవుతుంది.

The geometric mean of a series containing N observations is the N th root of the product of those N values. If there are two items the square root of the product of two values is the geometric mean, if three values the cubic root in the geometric mean and so on.

సూత్ర రూపంలో గుణ మధ్యమాన్ని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

$$G.M. = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_n}$$

గుణమధ్యమము (G.M.) $X_1 X_2 \ldots X_n$ అనేవి శ్రేణిలోమన్న "n" అంశాలు. ఉదాహరణకు 9, 16 అనే రెండు అంశాల గుణ మధ్యమము $GM = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$

ఉదా : 4, 8, 16 అనే మూడు అంశాల గుణమధ్యమం

$GM = \sqrt[3]{4 \times 8 \times 16} = \sqrt[3]{512} = 8$ అవుతుంది.

అయితే శ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగానూ వాటి విలువలు పెద్దవిగానూ వుంటే పై పద్ధతివవలంబించి గుణమధ్యమాన్ని గణన చేయడం ఎంతో కష్టం. కాబట్టి దీనిని సులభంగా గణన చేయడానికి సంవర్గ మానాలు ఉపయోగించవలసి వుంటుంది. సంవర్గమానాలు వుపయోగిస్తే పైన పేర్కొన్న సూత్రం ఈవిధంగా రూపొందుతుంది.

$$\log (GM) = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots + \log x_n}{n} = \frac{\Sigma \log x_i}{n}$$

లేదా $\text{Anti log} (\log (GM)) = \text{Anti log} \left(\frac{\Sigma \log x_i}{n}\right)$

కాని $\text{Anti log} (\log GM) = GM$

కాబట్టి $GM = \text{Anti log} \left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right)$

BRAOU

వైయక్తిక శ్రేణులలో గుణమధ్యమం

క్రింది ఇవ్వబడిన 14 కుటుంబాల నెలసరి ఆదాయాల దత్తాంశానికి గుణమధ్యమం ద్వారా సగటు కుటుంబ ఆదాయాన్ని కనుక్కోండి ?

180, 250, 490, 120, 1400, 7000, 1050, 150, 360, 100, 80, 200, 500, 240

ఆదాయం (X) (రూ.లలో)	180	250	490	120	1400	7000	1050	150	360	100	80	200	500	240
log (x)	2.2553	2.3979	2.6902	2.0792	3.1461	3.8451	3.0212	2.1761	2.5563	2.0000	1.9131	2.3010	2.6990	2.3802

$$\text{G.M.} = \text{Anti log}\left\{\frac{\Sigma \log (x)}{n}\right\}$$

$$= \text{Anti log}\left\{\frac{35.4507}{14}\right\}$$

$$= \text{Anti log}\ (2.5322)$$

∴ గుణ మధ్యమం = **340.6**

విచ్ఛిన్న శ్రేణుల నుంచి గుణమధ్యమం

దత్తాంశం పౌన: పున్య విభాజన రూపంలో వుండి $f_1, f_2, \ldots, f_n$ అనేవి $X_1, X_2, \ldots, X_n$ అనే విలువల పౌన: పున్యాలయినపుడు G.M. ను గణించడానికి ఈ క్రింది సూత్రాన్ని వుపయోగించాలి.

$$\text{G.M.} = \sqrt[N]{(X_1 \ldots X_1 \ldots X_1)(X_2 \ldots X_2 \ldots X_2)(X_3 \ldots X_3 \ldots X_3) \ldots (X_n \ldots X_n \ldots X_n)}$$

$$= N\sqrt{f_1 \ldots f_2 \ldots f_n}$$

$$X_1, \ldots X_2, \ldots, X_n \qquad N = \Sigma f$$

B R A O U

అయితే ఆచరణలో గుణమధ్యమాన్ని గణించేటప్పుడు ఈ సూత్రాన్ని వుపయోగించటం కష్టం కావచ్చు. కాబట్టి సంవర్గమానాలు వుపయోగించినప్పుడు పై సూత్రం క్రింది విధంగా రూపాంతరం చెందుతుంది.

సూత్రం : $$\log (\text{G.M.}) = \frac{f_1 \log (x_1) + f_2 \log (x_2) + \ldots + f_n (\log (x_n)}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

$$= \frac{\Sigma f \log x}{N}$$

అంటే గుణమధ్యమం యొక్క సంవర్గమానం శ్రేణిలోని అంశాల సగటు సంవర్గమానం అని గమనించాలి. (Logarithm of Geometric Mean is the Arithmetic Mean of the logorithms of the given values of the series)

$$\text{Anti log (log GM)} = \text{Anti log}\left\{\Sigma \frac{f \log (x)}{N}\right\}$$

$$\therefore \text{GM} = \text{Anti log}\left\{\frac{\Sigma f \log (x)}{N}\right\}, \qquad N = \Sigma f$$

$\sum \log (x) W$ = అంశాల సంవర్గమానాలను వాటి అనురూప భారాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల సంకలనం.

$\sum w$ = భారాల మొత్తము.

గుణమధ్యమం - ఉపయోగాలు (Uses of Geometric Mean)

1. సగటు వృద్ధి రేట్లు సగటు శాతం రేట్ల లెక్కింపులో గుణ మధ్యమం ఉపయోగం చాలా ఎక్కువ. జనాభా, ఉత్పత్తి, అమ్మకాలు మొ॥ ఆర్థిక చలాంకాల పెరుగుదల మరియువృద్ధిరేట్ల లెక్కింపులో సాధారణంగా గుణమధ్యమాన్ని వుపయోగిస్తారు. ఉదాహరణకు 1985 నుండి 1987 వరకు ధరలు మూడు సంవత్సరాలలో 4%, 8%, 16% చొప్పున పెరిగినపుడు సగటు సంవత్సరానికి ధరల పెరుగుదల రేటు $\left(\frac{4+8+16}{8}\right)=\frac{28}{3}=9.33\%$ కాకుండా $\sqrt[3]{4 \times 8 \times 16}=\sqrt[3]{512}=8\%$ అవుతుంది.

2. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో గుణమధ్యమమే వుత్తమమైన సగటుగా పరిగణించబడుచున్నది.

3. శ్రేణిలోని చిన్న అంశాలకు ఎక్కువ ప్రాధాన్యత, పెద్ద అంశాలకు తక్కువ ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలనుకొన్నపుడు గుణమధ్యమమే వుత్తమమైన సగటు.

చక్రవడ్డీ సూత్రం - గుణమధ్యమం

సగటు శాతం మార్పు లెక్కింపులో గుణమధ్యమాన్నే వుపయోగిస్తారని ఇది వరకే తెలుసుకొన్నాము. ఉదాహరణకు ఒక నగర జనాభా 10 సంవత్సరాల కాలంలో రెండు లక్షల (2,00,000) నుండి రెండు లక్షల నలభై వేల (2,40,000) కు పెరిగినపుడు 10 సంవత్సరాల కాలానికి జనాభా పెరుగుదల 2,00,000 లకు 40,000 కాబట్టి 20% చెప్పవచ్చు. ఈ పదేళ్ల కాలంలో సగటున సంవత్సరానికి 2% చొప్పున పెరిగిందని అనుకోవడానికి అవకాశం వుంది. కాని, సంవత్సరానికి 2% చొప్పున జనాభా పెరిగినపుడు 10 సంవత్సరాల తరువాత జనాభా 2,43,800 అవుతుంది. కాబట్టి సగటు వార్షిక జనాభా వృద్ధి రేటు రెండు శాతానికి (2%) కు కొంచెం తక్కువగా వుంటుందన్నమాట. ఈ సగటు వృద్ధిరేటు కనుక్కోవడానికి క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

$$P_n = P_0 (1+r)^n$$

P_0 = ఆరంభ సంవత్సరంలో జనాభా

P_n = అంతిమ సంవత్సరంలో జనాభా

r = వృద్ధి రేటు

n = సంవత్సరాలు

కాబట్టి $P_0 (1+r)^n = P_n$

$$(1+r)^n = \frac{P_n}{P_o}$$

BRAOU

$$(1+r) = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}}$$

సంవర్గ మానాల రూపంలో పై సమీకరణాన్ని వ్రాసినపుడు

$$\log(1+r) = \frac{\log P_n - \log P_o}{10}$$

$$\log(1+r) = \frac{5.3802 - 5.301}{10} = 0.00792$$

$$1 + r = \text{Anti}\log(0.00792) = 1.0184$$

$$r = 0.0184 = 1.84\ \%$$

అంటే జనాభా సంవత్సరానికి 1.84% చొప్పున పెరిగిందన్న మాట.

పై సూత్రం $r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}} - 1$లోని ఏ మూడింటి విలువలు తెలిసినా నాలుగవ దాని విలువను కనుక్కోవచ్చునని గమనించాలి.

గుణ మధ్యమము : సుగుణాలు

1. ఇది ఖచ్చితంగా నిర్వచించబడిన సగటు.
2. ఇది శ్రేణిలోని అన్ని అంశాల విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.
3. సగటు శాతం పెరుగుదల మరియు తరుగుదల రేట్లను గణించడంలో గుణ మధ్యమం చాలా వుపయోగపడుతుంది.
4. అంకమధ్యమం వలె గాక ఇది శ్రేణిలోని చిన్న అంశాలకు ఎక్కువ మరియు పెద్ద అంశాలకు తక్కువ ప్రాధాన్యత నిస్తుంది. కాబట్టే గుణ మధ్యమము సాధారణంగా గుణమధ్యమం అంకమధ్యమం కంటే తక్కువగా వుంటుంది. శ్రేణిలోని అంశాలన్నీ సమానం అయినప్పుడు మాత్రమే గుణమధ్యమం అంక మధ్యమానికి సమానం అవుతుంది. కానీ, ఎప్పుడూ అంకమధ్యమం కంటె ఎక్కువ వుండదు.
5. ఇది బీజగణిత పద్ధతులకు అనువైనది. ఉదాహరణకు రెండు లేదా ఎక్కువ సమూహాల గుణమధ్యమాలు మరియు సమూహాల్లోని అంశాల సంఖ్య తెలిసినప్పుడు వాటికి సమష్టి (combined GM)గుణమధ్యమాన్ని గణించవచ్చు.

$\log GM = \frac{\Sigma \log x}{n}$ కాబట్టి $\Sigma \log x = n \times \log GM$ అయితే రెండు సమూహాల్లోని అంశాలు N_1 N_2 అయినప్పుడు వాటికి సంబంధించిన గుణమధ్యమము

$$\log GM_{12} = \frac{\Sigma \log x_1 + \Sigma \log x_2}{N_1 + N_2}$$

కాని పైన ఇవ్వబడిన సమీకరణం ప్రకారం

BRAOU

$$\log GM_{12} = \frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2}{N_1 + N_2}$$

$$GM_{12} = \text{Anti log} \frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2}{N_1 + N_2}$$

5. ప్రతిచయన చాంచల్యాల ప్రభావం గుణమధ్యమంపై అంతగా వుండదు.

గుణమధ్యమం - లోపాలు

1. శ్రేణిలో ఏ అంశం అయినా సున్నా అయినపుడుగాని, ఋణాత్మక మయినప్పుడు గాని గుణమధ్యమాన్ని గుణించలేము.
2. దీన్ని గణన చేయడం అంత సులభమైన విషయం కాదు.
3. సామాన్య జనం దీనిని అర్థం చేసుకోవడం కష్టం.
4. వాటి వాటి విలువలను బట్టి అంశాల ప్రాధాన్యత సగటులో ప్రతిబింబించాలంటే గుణమధ్యమం అంత మంచి సగటు కాదు.
5. గుణ మధ్యమంగా వచ్చిన విలువ శ్రేణిలోని ఏ అంశం విలువకూ సమానంగా వుండదు.

17.5.3 హార మధ్యమము (Harmonic Mean)

హార మధ్యమము ఎక్కువగా ప్రచారంలో వున్న సగటు కాదు. శ్రేణిలోని అంశాల వ్యుత్క్రమాల సగటు యొక్క వ్యుత్క్రమమే హార మధ్యమము అని నిర్వచించవచ్చు. దీన్ని గణించడానికి ముందుగా శ్రేణిలో వున్న అంశాల వ్యుత్క్రమాలను ముందు కనుక్కోవాలి. అంటే $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n$ మొదలగువాటి సంకలనాన్ని అంశాల సంఖ్యచే భాగించాలి.

$\left(\frac{\Sigma \frac{1}{x}}{N}\right)$ వచ్చిన ఫలితానికి వ్యుత్క్రమాన్ని కనుక్కొంటే అది హార మధ్యమం అవుతుంది (Harmanic mean is the reciprocal of the average of reciprocals of the items in the series).

$$HM = \text{Reci}\left\{\frac{1/x_1 + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}}{N}\right\}$$

$$= \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma 1/x}{N}\right\} \text{ లేదా } \frac{1}{\frac{\Sigma 1/x}{N}}$$

$$HM = \frac{N}{\Sigma 1/x}$$ ఇక్కడ, HW = హార మధ్యమము.

ఉదా : 100, 200, 300, 400 అనే నాలుగు అంశాలకు హార మధ్యమాన్ని కనుక్కోండి ?

$$HW = Reci\left\{\frac{\Sigma \frac{1}{x}}{N}\right\} \text{ or } \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}}$$

$$= Reci\left\{\frac{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}}{4}\right\}$$

$$HW = Reci \frac{\frac{25}{1200}}{4} \text{ or } \frac{4}{25/1200} = \frac{4 \times 1200}{25} = 192$$

$$AM = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{1000}{4} = 250.$$

$f_1 f_2 \ldots\ldots$ అనేవి $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$ అనే అంశాలు పౌన : పున్యాలయినప్పుడు

$$HM = Reci\left\{\frac{\Sigma (f \,.\, Reci\ x)}{N}\right\}$$ లేదా

$$HM = Reci\left\{\frac{\Sigma f/x}{N}\right\}$$ లేదా $$\frac{N}{\Sigma (f/x)}$$

క్రింది దత్తాంశానికి హార మధ్యమం కనుక్కోండి.

మార్కులు (x)	విద్యార్థుల సంఖ్య f	1/x	$f \,.\, 1/x = \frac{f}{x}$
20	4	0.05000	0.20000
21	2	0.04762	0.09524
22	7	0.4545	0.31815
23	1	0.4343	0.4348
24	3	0.4167	0.12501
25	1	0.04000	0.04000
	N = 18		0.82188

$$HM = Reci\left\{\frac{\Sigma f/x}{N}\right\} = Reci\left\{\frac{0.82188}{18}\right\}$$

$$HM = \frac{18}{0.82188} = 219$$

గమనిక : అంశాల వ్యుత్క్రమాలు కనుక్కొనేటపుడు వ్యుత్క్రమాల పట్టికలనుగాని సంవర్గమాన పట్టికలను గాని ఉపయోగించవచ్చు.

ఉదా : 23 అనే సంఖ్య వ్యుత్క్రమం = $\frac{1}{23}$. దీన్ని log (1) - log (23) అని కూడా వ్రాయవచ్చు.

అయితే log (1) అనేది " 0 " కాబట్టి $\log\left(\frac{1}{23}\right) = -\log(23)$

$\log(23) = 1.3517$

$$\therefore \log\left(\frac{1}{23}\right) = 0.0000 - 1.3517 = \overline{2}.6483$$

$$\frac{1}{23} = \text{Anti log}\,(\overline{2}.6483) = 0.04446$$

అయితే ఈ సందర్భంలో కాల్కులేటర్లను వుపయోగించి వ్యుత్క్రమాలను కనుక్కోవడం అతి తేలికైన విషయమని చెప్పనవసరం లేదు.

విరళ శ్రేణులు - హార మధ్యమము

విరళ శ్రేణుల నుంచి హార మధ్యమాన్ని గణించడానికి ముందుగా తరగతి అంతరాల మధ్య విలువలను కనుక్కోవాలి. వాటికి వ్యుత్క్రమాలను కనుక్కొని వాటి అనురూప పౌన : పున్యాలతో వాటిని గణించి వ్యుత్క్రమాల సగటును కనుక్కోవాలి. అట్లా వచ్చిన ఫలితానికి వ్యుత్క్రమాన్ని కనుక్కొంటే వచ్చేదే హారమధ్యమం.

$$HM = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma f \,.\, \text{Reci } m}{N}\right\} = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma f\left(\frac{1}{m}\right)}{N}\right\}$$

లేదా $HM = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{m}\right)}$ ఇక్కడ, m = తరగతి అంతరాల మధ్య విలువలు.

B R A O U

ఉదా :

తరగతి అంతరం	మధ్య విలువ (m)	పౌన్యపున్యం (f)	$1/x$	$f \,.\, 1/x$
5 - 10	7.5	2	0.1333	0.2666
10-15	12.5	9	0.0800	0.7200
15-20	17.5	29	0.0571	1.6571
20-25	22.5	54	0.0444	2.4000
25-30	27.5	11	0.0364	0.4000
30-35	32.5	5	0.0308	0.1540
		110		5.5977

$$HM = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma f \,.\, \text{Reci } m}{N}\right\} = \text{Rec}\left\{\frac{5.5977}{110}\right\} = \frac{110}{5.5977} = 20$$

భారిత హార మధ్యమం (Weighted Harmonic Mean)

భారిత అంక మరియు గుణ మధ్యమాల్లాగే భారిత హార మధ్యమాన్ని గణించవచ్చు.

$$H.M = Reci\left\{\frac{\sum w \times \frac{1}{x}}{\sum w}\right\} \quad w = \text{భారితాలు}$$

హరాత్మక మధ్యమం సుగుణాలు

1. ఖచ్చితంగా నిర్వచించిన సగటు.
2. శ్రేణిలోని అన్ని అంశాలపై ఆధారపడి వుంటుంది.
3. బీజ గణితీయ సూత్రాలను అనువైనది.
4. సగటు నిష్పత్తుల లెక్కింపులో ఉపయోగించడానికి ఉత్తమమైనది.
5. చిన్న అంశాలకు అధిక ప్రాధాన్యతను, పెద్ద విషయాలకు స్వల్ప ప్రాధాన్యతను ఇవ్వాలనుకొన్నపుడు ఉపయోగించదగిన ఉత్తమమైన సగటు.

హరాత్మక మధ్యమం లోపాలు

1. సులభంగా అర్థం చేసుకోగలిగేది కాదు.
2. గణించడం కూడా సులభమైంది కాదు.
3. హరాత్మక మధ్యమం కూడా శ్రేణిలోని ఏ అంశానికి సమానం కాదు.

17.5.4 వర్గమూల సగటు (Quadratic Average)

ఆఖరుగా ఇప్పుడు అంత ప్రచారంలో లేని మరొక సగటు గురించి తెలుసుకొందాము. అంశాల వర్గాల సగటుకు వర్గమూలమే వర్గమూల సగటుగా నిర్వచించవచ్చు.

$$QM = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{2}}$$

ఉదా ॥ 3, 4, 6, 7,10 అనే అంశాల వర్గమూల సగటు

$$QM = \sqrt{\frac{3^2+4^2+6^2+7^2+10^2}{5}} = \sqrt{\frac{210}{5}} = \sqrt{42} = 6.47$$

17.6 తగిన సగటు ఎంపిక (Choice of a Suitable Average)

ఇదివరకే చర్చించినట్లుగా సగటులు అనేవి కేంద్రీయ ప్రవృత్తిమానాలు. ఒక సగటు శ్రేణిలోని అంశాలన్నింటికీ ప్రాతినిధ్యం వహించేదిగా వుండాలి. అయితే పైన చూసినట్లుగా సగటులు ఎన్నో రకాలుగాను అవి వేరు వేరు లక్షణాలను కల్గి వున్నాయి. సగటును ఎంపిక చేసుకోవడం అనేది చాలా ముఖ్యమైన విషయం. తగిన సగటును వుపయోగించినపుడు శ్రేణుల మధ్య పోలికల ఆధారంగా చేసే నిర్ణయాలు విశ్వసనీయంగా వుండవని గమనించాలి. తగిన సగటును ఎంపిక చేయడం అనేది ముఖ్యంగా రెండు అంశాలపై ఆధారపడి వుంటుంది. అవి దత్తాంశ స్వభావం మరియు పరిశోధన అంతిమ లక్ష్యము.

సగటును ఎంపిక చేసేటపుడు ఈ క్రింద చెప్పబడిన విషయాలను గుర్తుంచుకోవాలి.

1. **పరిశోధనా లక్ష్యము :** పరిశోధనా లక్ష్యాన్ని బట్టి తగిన సగటును ఎంపిక చేసుకోవాలి. శ్రేణిలోని అన్ని అంశాలను సమాన ప్రాధాన్యం వుండాలను కొన్నపుడు అంకమధ్యమం తగిన సగటు. ఎక్కువసార్లు వచ్చే

B R A O U

అంశాన్ని సగటుగా భావించినపుడు బాహుళకాన్ని ఎన్నుకోవాలి. శ్రేణిలోని మధ్య స్థానంలో వుండే విలువను సగటుగా పరిగణించదలచినపుడు మధ్యగతం తగిన సగటు అవుతుంది. ఒకవేళ శ్రేణిలోని చిన్న అంశాలకు పెద్ద అంశాలకన్న అధిక ప్రాధాన్యత ఇవ్వదలచినపుడు, గుణ లేదా హార మధ్యమాన్ని ఎన్నుకోవచ్చు.

2. **ప్రాతినిధ్య విలువ :** సగటు విలువ దత్తాంశాన్ని ప్రతిబింబించేదిగా వుండాలి. సగటు వృద్ధి రేటు మొదలైన శాతం మార్కుల విషయంలో గుణ మధ్యమం వుత్తమమైన సగటుగా పరిగణించవచ్చు.

3. **దత్తాంశ స్వభావం, పౌన : పున్య విభాజన రూపం :**

(a) దత్తాంశం యొక్క పౌన : పున్య విభాజనము సౌష్ఠవంగా లేదా దాదాపు సౌష్ఠవంగా వున్నపుడు అంకమధ్యమం గాని మధ్యగతం గాని లేదా బాహుళకం గాని వుపయోగించవచ్చు.

(b) అసౌష్ఠవ లేదా వైషమ్య విభాజన విషయంలో మధ్య గతంగాని బాహుళకం గాని వుపయోగించ వచ్చు.

(c) ప్రథమ లేదా అంతిమ తరగతుల దిగువ మరియు ఎగువ అవధులు అనిశ్చితంగా వున్నప్పుడు మధ్యగతం గాని, బాహుళకం గాని వుపయోగింపదగిన వుత్తమమైన సగటులు. విభాజనంలో కొన్ని అసాధారణ విలువలు వున్నపుడు స్థానీయ సగటులు ఉపయోగించడం మంచిది.

(d) తరగతి అంతరాలు అసమానంగా వున్నపుడు మధ్యగతం ఉత్తమమైన సగటు.

(e) దత్తాంశంలోని అంశాల విస్తృతి స్వల్పంగా వున్నపుడు అంకమధ్యమం ఉత్తమమైన సగటుగా పరిగణించవచ్చు.

(f) దత్తాంశం వృద్ధిరేట్లు, మార్పుశాతం రేట్లు మరియు నిష్పత్తుల రూపంలో వున్నపుడు– ఉదా ॥ సూచీసంఖ్యల విషయంలో–గుణమధ్యమము ఉత్తమమయిన సగటు.

(g) సగటుల లెక్కింపులో అవసరమైనపుడు లక్ష్యాన్ని బట్టి అంశాలకు తగిన భారాలను ఇవ్వాలి.

4) **ఉత్తరోత్తర విశ్లేషణ (Further Analysis) :** లెక్కించే సగటుల ఉత్తరోత్తర పరిశోధన ప్రక్రియలోని తరువాత దశలలో ఉపయోగించే అవసరమున్నపుడు బీజగణితీయ సూత్రాలకనువైన అంకమధ్యమాన్ని వాడడం మంచిది. గుణ మధ్యమాన్ని కూడా ఈ సందర్భంలో వుపయోగించవచ్చు.

5) **ప్రతిచయన చాంచల్యం (Sampling Fluctuations):** ప్రతిచయన చాంచల్యాల ప్రభావానికి అంతగా లోనుగాని వుత్తమమైన సగటు అంకమధ్యమం మాత్రమే.

6) గుణాత్మకమైన దత్తాంశం (qualitative data) విషయంలో మధ్యగతము ఉత్తమమైన సగటు.

ఈ విధంగా దత్తాంశ స్వభావాన్ని పరిశీలించి పరిశోధన అంతిమ లక్ష్యాన్ని దృష్టిలో వుంచుకొని పరిశోధకుడే తగిన సగటును ఎంపిక చేసుకోవాలి.

దత్తాంశంలోని అంశాల విస్తృతి లేదా విచలనము, లెక్కించిన సగటు ఎంతవరకు దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందో నిర్ణయిస్తుంది. అంటే అంశాలు ఎంత ఎక్కువగా సగటు చుట్టూ కేంద్రీకృతమవుతాయో అనే అంశంపై సగటు యొక్క విశ్వసనీయత ఆధారపడి వుంటుంది. విభాజనంలోని అంశాల విస్తృతి ఏవిధంగా వుంటుంది. దానిని ఏ విధంగా గణించి అర్థం చేసుకోవాలి మొదలయిన విషయాలను తరువాతి అధ్యాయంలో చర్చించడమైనది. అయితే వివిధ సగటుల గణింపులో ఉపయోగించిన సూత్రాలను ఒక్కచోట చేర్చి పట్టికా రూపంలో క్రింద ఇవ్వడం జరిగింది.

BRAOU

17.7 వివిధ సగటుల మధ్య సారూప్యత మరియు భేదాలు

లక్షణాలు	అంకమధ్యమం ($\overline{X}$)	మధ్యగతం (Md)	బాహుళకం Mo	గుణమధ్యమం GM	హారమధ్యమము HM
గణింపులో ఏ అంశాలకు ప్రాధాన్యత వుంటుంది	అన్ని అంశాలు	మధ్య విలువ	ఎక్కువ సార్లు వచ్చే అంశం	ప్రతి విలువ	ప్రతి విలువ
బీజగణితీయ సూత్రాలకు అనువైనది	అవును	కాదు	కాదు	అవును	అవును
గణితీయ లక్షణాలు	$\Sigma (X - \overline{X}) - 0$ $\Sigma (X-\overline{X})^2$ కనిష్టం	$\Sigma (X - Md) - 0$ కనిష్టం	-------	$\Sigma (\log X - \log G) = 0$	- - - -
అనిశ్చిత తరగతి అవధులు వున్నపుడు	అనిశ్చితము	నిశ్చితము	నిశ్చితము	అనిశ్చితము	అనిశ్చితము
అల్పతమ, అధికతమ విలువల ప్రాబల్యం	అవును (అధికంగా)	కాదు, లేదు	లేదు	వుంటుంది కాని $\overline{X}$ కంటె తక్కువ	వుంటుంది కాని GM కంటె తక్కువ
ఇతర సగటులతో సంబంధం	GM మరియు HM కంటె ఎక్కువ	X మరియు Mo ల మధ్య	Md, $\overline{X}$ కంటె ఎక్కువ లేదా తక్కువ గాని వుండవచ్చు.	HM కంటె ఎక్కువ AM కంటె తక్కువ	GM, $\overline{X}$ ల కంటె తక్కువ
ప్రతిరూప స్థిరత్వం	వుంటుంది	లేదు	లేదు	వుంటుంది కాని $\overline{X}$ కంటె తక్కువ	వుంటుంది కాని $\overline{X}$, GM ల కంటె తక్కువ
ఏ రకమైన విభాజనాలకు అనువైనది	అన్ని రకాల దత్తాంశాలు	మధ్య విలువ ప్రాతినిధ్య విలువైనపుడు	అంశాలన్నీ ఒకే విలువవైపు కేంద్రీకృతం అయినపుడు	రేట్లు మార్పు శాతం నిష్పత్తులు	వ్యుత్క్రమాల రూపంలో రేట్లు వున్నపుడు

B R A O U

17.8 వివిధ సగటులకు సంబంధించిన కొన్ని ముఖ్యమైన సూత్రాలు

	అంక మధ్యమము			గుణ మధ్యమం	హార మధ్యమం	మధ్య గతం	బాహుళకం
	ప్రత్యక్ష పద్ధతి	భావిత సగటు పద్ధతి	సోపాన విచలనాల పద్ధతి				
వ్యక్తిగత శ్రేణులు	$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\overline{X} = A + \frac{\Sigma dx}{n}$	$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f dx^1}{N} . C$ $dx^1 = \frac{X - A}{C}$	$GM = \text{Anti log}\left\{\frac{\Sigma f \log x}{N}\right\}$	$H = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma \frac{1}{x}}{N}\right\}$	$\frac{N+1}{2}$ వ అంశం విలువ	ఎక్కువ సార్లువచ్చే అంశం విలువ
విచ్ఛిన్న శ్రేణులు	$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$ $N = \Sigma f$	$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f dx}{N}$ $dx = X - A$	$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f dx^1}{N} . C$ $dx^1 = \frac{X - A}{C}$	$GM = \text{Anti log}\left\{\frac{\Sigma f \log x}{N}\right\}$	$H = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma f \frac{1}{x}}{N}\right\}$	$\frac{N+1}{2}$ అంశం విలువ	పరిశీలన లేదా వర్గీకరణ ద్వారా
అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు	$\overline{X} = \frac{\Sigma fM}{N}$	$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f dx}{N}$ $dx = M - A$	$\overline{X} = A + \frac{\Sigma f dx^1}{N} . C$ $dx^1 = \frac{M - A}{C}$	$GM = \text{Anti log}\left\{\frac{\Sigma f \log x}{N}\right\}$	$HM = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma f \frac{1}{x}}{N}\right\}$	$\frac{N}{2}$ వ అంశం విలువ మధ్యగత తరగతిలో $Md = L_1 + \frac{N/2 - cf}{f} . i$	వర్గీకరణద్వారా బాహుళక తరగతి నిర్ణయం $Mo = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{f_1 - f_0 + f_1 - f_2} . i$
భారిత	$\overline{X_{10}} = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$			$GM = \text{Anti log}\left\{\frac{\Sigma W \log x}{\Sigma W}\right\}$	$HM = \text{Reci}\left\{\frac{\Sigma W \frac{1}{x}}{\Sigma x}\right\}$	లేదు	లేదు
సమష్టి	$\overline{X_{12}} = \frac{N_1 \overline{X}_1 + N_2 \overline{X}_2}{N_1 + N_2}$			$\text{Log } G = \frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2}{N_1 + N_2}$	X	లేదు	లేదు

BRAOU

17.9 సారాంశము

కేంద్రస్థానపు కొలతలు లేదా సగటులు దత్తాంశ స్వభావాలను స్థూలంగా తెలుసుకోవటానికి , పోల్చడానికి ఉపయోగపడతాయి. వివిధ రకాల దత్తాంశాలను పోల్చడానికి వీలుగా 5 విధాలైన సగటులను నేర్చుకున్నాము. అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము, హారమధ్యమము—వీటిని గణిత సగటులుగాను; మధ్యగతము, బాహుళకము—వీటిని రేఖా సగటులుగాను నేర్చుకున్నాము. సగటులన్నింటిలోను అంకమధ్యమానికి కనిష్ఠ స్థానం వుంది. తరువాత క్రమంలో మధ్యగతం, బాహుళకాలు ఎక్కువగా ఉపయోగపడతాయి. గుణ మధ్యమము, హార మధ్యమం ప్రత్యేక సందర్భాలలో మాత్రమే ఉపయోగపడుతుంటాయి. పైన తెలిపిన విధంగా సగటుల లక్షణాలను, ఉద్దేశాలను, గణనను ఈ పాఠ్య భాగంలో నేర్చుకున్నాము.

17.10 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. S.P. Gupta : Statistical Methods
2. Taro Yamane : Statistics
3. Frank Jr : Mathematics and Statistics for Economists
4. A.L. Nagar and Das : Statistics
5. Sanchetti and Kapur : Statistics
6. తెలుగు అకాడమి : ఆర్థిక విశ్లేషణ పద్ధతులు

17.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. **క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక్కొక్క దానికి 30 - 40 పంక్తులలో జవాబులు రాయండి.**

1. ఆదర్శ సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలేవి ?
2. వివిధ కేంద్ర స్థానపు కొలతలేవి ? వాటిని సంక్షిప్తంగా వివరించుము.
3. అంకమధ్యమం సుగుణాలను, లోపాలను వివరించుము.
4. రేఖా చిత్ర పద్ధతి ద్వారా మధ్యగతాన్ని ఏవిధంగా కనుగొనవచ్చు ?
5. చతుర్థాంశకాలు, దశాంశకాలు మరియు శతాంశకాలను వివరించుము.
6. బాహుళకాన్ని గణించే పద్ధతిని తెలుపుము ?
7. అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము మరియు ఇతర సగటుల మధ్య సంబంధాన్ని తెలుపుము?
8. భారిత మరియు సమగ్ర అంకమధ్యమాలను వివరింపుము.
9. గుణ మరియు హార మధ్యమాల ప్రాధాన్యతను తెలుపుము.

BRAOU

10. తగిన సగటును ఎంపిక చేసుకోవడంలో వున్న సమస్యలను వివరించుము .

11. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి వివిధ సగటులను గణించుము.

X	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80 - 90	90 - 100
f	5	7	12	20	18	15	11	8	5

12. మూడు తరగతులలోని విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు వారి సగటు మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడినవి. మూడు తరగతులకు సంబంధించిన సమగ్ర సగటును గణించుము.

తరగతి	విద్యార్థుల సంఖ్య	సగటుమార్కులు
A	25	65
B	30	70
C	50	60

13. పరిమిత విస్తరణ వైశాల్యము గల ఒక దత్తాంశ విభాజనపు అంకమధ్యమము 25, మధ్యగతము 22 అయినచో బాహుళకమెంత ?

14. క్రింది దత్తాంశమునకు గుణ మధ్యమము కనుగొనుము.

X : 2, 7, 9, 12, 20, 8, 4, 3, 1

II. క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక్కొక్కదానికి 10 - 20 పంక్తులలో జవాబులిమ్ము

1. తరగతి అంతరాల మధ్యవిలువలను ఏవిధంగా గణింతువు ?
2. పౌన : పున్య సాంద్రత అనగానేమి ?
3. ఊహించిన సగటు అనగానేమి ?
4. మధ్యగత తరగతిని ఏవిధంగా గుర్తించెదవు ?
5. రేఖా చిత్ర పద్ధతిద్వారా మధ్యగతాన్ని ఏవిధంగా గుర్తించెదవు ?
6. బాహుళకము ఏవిధమయిన దత్తాంశంలో సరియైన సగటు ?
7. విశ్లేషణ పట్టిక ఏవిధంగా తయారు చేస్తారు ?
8. అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము మరియు హార మధ్యమ విలువల మధ్య సంబంధాన్ని తెలుపుము ?

17.12 పదకోశము

కేంద్రీయ ప్రవృత్తి (Central tendency)

సగటు (Average)

B R A O U

ఆదర్శ సగటు	(Ideal Average)
అంక మధ్యమము	(Arithmetic Mean)
గుణ మధ్యమము	(Geometric Mean)
హార మధ్యమము	(Harmonic Mean)
మధ్యగతము	(Median)
బాహుళకము	(Mode)
ప్రత్యక్ష పద్ధతి	(Direct method)
సూక్ష్మ పద్ధతి	(Short cut method)
విరళ శ్రేణులు	(Individual series)
అవిరళ శ్రేణులు	(Continuous series)
చతుర్థాంశకాలు	(Quartiles)
దశాంశకాలు	(Deciles)
శతాంశకాలు	(Percentiles)
ప్రత్యేక సగటులు	(Special averages)
భారిత అంకమధ్యమము	(Weighted Arithmetic Mean)
సమగ్ర అంకమధ్యమము	(Combined Mean)
వర్గమూల సగటు	(Quadratic Mean)
తగిన సగటు ఎంపిక	(Choice of suitable average)
పరిశోధనా/లక్ష్యము	(Purpose of investigation)
ప్రాతినిధ్య విలువ	(Representative value)
ఉత్తరోత్తర విశ్లేషణ	(Further analysis)
ప్రతిచయన చాంచల్యము	(Sampling fluctuation)

- డా॥ వి. సదానందం

BRAOU

భాగం - 18 : ఏక చలరాశి దత్తాంశ విశ్లేషణ - విస్తరణ, అసౌష్టవత, శిఖరీయ కొలతలు

విషయక్రమం

18.0 ఉద్దేశాలు

18.1 పరిచయం

18.2 విస్తరణ

18.2.1 విస్తరణకు నిరపేక్ష కొలతలు

18.2.2 విస్తరణకు సాపేక్ష కొలతలు

18.2.3 లొరెంజ్ వక్రం

18.3 అసౌష్టవత (విషమత్వం) కొలతలు

18.3.1 విషమత్వపు కొలతల సూత్రాలు

18.4 శిఖరీయ కొలతలు

18.4.1 ఘాతికలు

18.4.2 శిఖరీయ కొలతలు

18.5 సారాంశం

18.6 అవగాహన ప్రశ్నలు

18.7 చదువ వలసిన గ్రంథాలు

18.8 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

18.9 భావనలు

18.10 పదకోశం

B R A O U

18.0 ఉద్దేశాలు

కేంద్రీయ ప్రవృత్తిమానము (measures of central tendency) ను ఉపయోగించి ఒక చలరాశికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని యే విధంగా విశ్లేషించవచ్చో యూనిట్ 17లో తెలుసుకున్నాము. ఆ యూనిట్‌లో, అంకమధ్యమము (arithmetic mean) , మధ్యగతము (median) , బాహుళకము (mode) మొదలైన వివిధ రకాల కేంద్రీయ ప్రవృత్తిమానాలను చర్చించాం. **అయితే,** కేంద్రీయ ప్రవృత్తి మానాలను ఉపయోగించి ఒక దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడంలో ఉద్దేశం, ఆ దత్తాంశానికి వీలైనంత వరకు పూర్తిగా ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒకే ఒక కొలతను అన్వేషించడం. కాని వేరే దృక్పథంతో దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించవలసివచ్చినప్పుడు, యీ రకమైన

కొలతలు మాత్రమే సరిపోవు. అప్పుడు అవసరాన్నిబట్టి, సందర్భాన్ని బట్టి, విస్తరణ, అసౌష్ఠవత, శిఖరీయత అనే కొలతలను కూడా వాడవలసి ఉంటుంది. ఈ కొలతలను నిర్వచించి వాటి ప్రయోజనాలను పరిశీలించడమే ఈ యూనిట్‌లో ముఖ్యోద్దేశం. ఇందులో ఒక్కొక్క కొలతలో గల వివిధ రకాలను కూడా ప్రవేశపెట్టి వాటిని కూడా చర్చిస్తాం.

18.1 పరిచయం

నగటు (average) అనే కొలత ఒక దత్తాంశాన్ని చాలావరకు ప్రతిబింబిస్తుంది. కాని నగటు మాత్రమే ఆ దత్తాంశానికి గల అన్ని లక్షణాలను తెలియబరచలేదు. ఉదాహరణకు, ఆ దత్తాంశంలో గల అన్ని విలువలు నగటునునుసరించి యేవిధంగా విస్తరించి ఉన్నాయి అనే విషయాన్ని నగటు తెలియబరచలేదు. అందుచేత, రెండు దత్తాంశాలకు నగటు విలువ ఒకటే అయినప్పటికీ, ఆ దత్తాంశాల విలువల విస్తరణలో తేడాలు వుండవచ్చు. ఒక దత్తాంశంలో విలువలు ఒకదానికొకటి దగ్గరలో వుంటూ, రెండవ దత్తాంశంలో విలువలు చాలా వ్యత్యాసాలతో వుండవచ్చు. కాబట్టి నగటులు సమానమైనంత మాత్రాన, ఆ రెండు దత్తాంశాల పోకడ ఒకేలాగ ఉందని చెప్పలేము. ఉదాహరణకు, నలుగురు వ్యక్తుల నెలసరి ఆదాయాలు వరుసగా రూ ॥ 1000 లు, రూ ॥ 200లు, రూ ॥ 100లు, రూ ॥ 60 లు అని అనుకోండి. అప్పుడు వారి నగటు నెలసరి ఆదాయం రూ ॥ 340లు $\left(\frac{1000+200+100+60}{4} = \frac{1360}{4} = 340\right)$ అవుతుంది. మరొక నల్గురు వ్యక్తుల నెలసరి ఆదాయాలు వరుసగా రూ 400లు, రూ.300లు రూ. 310లు రూ. 350లు తీసుకోండి. వారి నగటు నెలసరి ఆదాయం కూడా రూ. 340లు $= \left(\frac{400+300+310+350}{4} = \frac{1360}{4} = 340\right)$. కాని రెండవ దత్తాంశములో విలువలు ఒకదానికొకటి దగ్గరగా వుంటూ నగటుకు దగ్గరలో వున్నాయి. మొదటి దత్తాంశంలో విలువలు ఒకదాని కొకటి చాలా వ్యత్యాసాలు కలిగి ఉండి నగటుతో చాలా తేడా కలిగి వున్నాయి. అందుచేత రెండు దత్తాంశాలలో గల వ్యక్తుల నగటు ఒకటే అయినప్పటికీ, వారి ఆర్థిక స్థితిగతులు ఒకేరకంగా ఉన్నాయని చెప్పలేము. కాబట్టి నగటు మాత్రమే ఈ సందర్భంలో దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించలేదు. దత్తాంశంలో విలువల విస్తరణను గూడా పరిగణించవలసి వుంది. ఇటువంటి విస్తరణను తెలియబరిచేదే విస్తరణ కొలత. 18.2 లో ఈ విస్తరణ కొలతలను చర్చిస్తాం.

ఒక పౌన : పున్య విభాజనం (frequency distribution) లో నగటుతో సమాన తేడాలు గల విలువలు సమాన పౌన : పున్యాన్ని కలిగి ఉంటే ఆ విభాజనాన్ని సౌష్ఠవ (symmetrical) విభాజనం అంటాం. ఒక విభాజనం సౌష్ఠవం కానప్పుడు దానిని అసౌష్ఠవం (asymmetrical) విభాజనం అనిగాని విషమ (skewed) విభాజనం అనిగాని అంటాం. అనగా, ఒక విభాజనం సౌష్ఠవత (symmetry) నుండి యేమాత్రం విచలనం (deviation) కలిగి వున్నా, ఆ విచలనం అసౌష్ఠవతను (వైషమ్యాన్ని skewness) సూచిస్తుంది. ఈ అసౌష్ఠవతను తెలియబరిచేదే అసౌష్ఠవత కొలత (measure of skewness). ఈ అసౌష్ఠవత కొలతలను 18.3 లో చర్చిస్తాం.

రెండు విభాజనాలలో నగటు, విస్తరణ, అసౌష్ఠవత ఒకే విధంగా ఉన్నప్పటికీ, అందులో ఒక విభాజనంలో విలువలు రెండవ దానిలో కంటె చాలా వరకు దాని బాహుళకానికి దగ్గరలో కేంద్రీకృతమై (concentration) ఉండవచ్చు. అప్పుడు దాని పౌన : పున్య వక్రము (frequency curve) రెండవ దాని కంటె యెక్కువ పదునైన శిఖరాన్ని (sharp peak) కలిగి ఉంటుంది. ఒక విభాజనానికి గల ఈ లక్షణాన్ని శిఖరీయత (kurtosis) అంటాం. ఈ శిఖరీయ కొలతలను 18.4లో చర్చిస్తాం.

BRAOU

18.2 విస్తరణ (Dispersion)

ఒక దత్తాంశంలో వివిధ విలువలకు వాటి సగటు నుండి ఉన్న విచలనము (variation) లేదా విస్తరణ (scattering or dispersion) లేదా వ్యత్యాసము (deviation) ను విస్తరణ (dispersion) అని అంటాం. అందుచేత, ఒక దత్తాంశంలోవి విలువలు వాటి మధ్య యెంత వ్యత్యాసాన్ని కలిగి వున్నాయి అనే విషయాన్ని విస్తరణ సూచిస్తుంది. విస్తరణను కొలవడానికి నిరపేక్ష కొలతలు (absolute measures) అని, సాపేక్ష కొలతలు (relative measures) అని రెండు రకాల కొలతలను వాడుతాము. నిరపేక్ష కొలతలలో నాలుగు రకాలున్నాయి. అవి (1) వ్యాప్తి (range) (2) చతుర్థాంశక విచలనము (quartile deviation), (3) మధ్యమ విచలనము (mean deviation) (4) క్రమ విచలనము (standard deviation). సాపేక్ష కొలతలు మూడు. అవి (1) విచలన గుణకము (coefficient of variation) (2) చతుర్థాంశక విచలన గుణకము (coefficient of quartile deviation) (3) మధ్యమ విచలన గుణకము (co efficient of mean deviation). ఇప్పుడు ఈ వివిధ విస్తరణ కొలతలకు నిర్వచనాలను, సూత్రాలను తెలియబరచి వాటిని గూర్చి విపులంగా చర్చిస్తాం.

18.2.1 విస్తరణకు నిరపేక్ష కొలతలు (Absolute Measures of Dispersion)

1. వ్యాప్తి (Range)

ఒక చలరాశి విలువలలో గరిష్ఠ విలువకు, కనిష్ఠ విలువకు గల తేడాను వ్యాప్తి అంటాం.

నిరపేక్ష కొలతలన్నింటిలో ఇది అతి సులువైనది. చాలా సులువుగా దీనిని గణన (compute) చేయవచ్చు. కాని యిది కేవలం గరిష్ఠ, కనిష్ఠ అనే రెండు అంత్య విలువల (extreme values) మీద మాత్రమే ఆధారపడి ఉండడం వలన కొన్ని ఆచరణాత్మక అవసరాలకు (practical purposes) వ్యాప్తి అంతగా ఉపయోగపడదు. ఎందుకంటే, గరిష్ఠ విలువ మరీ యెక్కువగా ఉన్నా, కనిష్ఠ విలువ మరీ తక్కువగా ఉన్నా, వీటివల్ల వ్యాప్తి మీద అనవసర ప్రభావం యేర్పడి, వ్యాప్తి విలువ చాలా అసహజంగా తయారయి ఆచరణ యోగ్యంగా ఉండదు.

B R A O U

వ్యాప్తిని గణన చేయడాన్ని యీ క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు.

ఉదా 1 : రూ. 8,5,10,7,12,6 అనే విలువలకు వ్యాప్తి = 12 - 5 = రూ. 7. ఎందుకంటే, వాటిలో గరిష్ఠ విలువ రూ. 12. కనిష్ఠ విలువ రూ. 5.

సామాన్య పౌన : పున్య విభాజనంలో గూడా వ్యాప్తిని యిదే విధంగా కనుగొనవచ్చు.

ఉదా 2 :

విలువ :	5	10	15	20	25	30	35	40
పౌనఃపున్యం :	3	5	10	20	30	18	12	5

ఇందులో గరిష్ఠ విలువ 40, కనిష్ఠ విలువ 5. కాబట్టి వ్యాప్తి = 40-5 = 35.

ఒక వర్గీకృత పౌన : పున్య విభాజనం (grouped frequency distribution) లో వ్యాప్తి అనగా

అత్యున్నత తరగతి (highest class) యొక్క ఎగువ హద్దు (upper boundary) కు అత్యల్ప తరగతి (lowest class) యొక్క దిగువ హద్దు (Lower boundary)కు గల తేడా. కాని విభాజనంలో తరగతులకు హద్దులు వివృతమైతే (open) , వ్యాప్తిని కనుగొనలేము.

ఉదా 3 :

మార్కులు :	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
విద్యార్థుల సంఖ్య :	6	10	16	14	8	4

ఈ విభాజనాన్ని అవిచ్ఛిన్నం (countinuous) చేసి వ్రాస్తే

మార్కులు :	9.5 - 19.5	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5	59.5-69.5
విద్యార్థుల సంఖ్య :	6	10	16	14	8	4

ఇందులో అత్యున్నత తరగతి 59.5 - 69.5 . దీని ఎగువ హద్దు 69.5. అత్యల్ప తరగతి 9.5 -19.5. దీని దిగువహద్దు 9.5 . కాబట్టి వ్యాప్తి = 69.5 - 9.5 = 60.

2. చతుర్థాంశక విచలనము (Quartile Deviation) లేదా అర్ధచతుర్థాంశక అంతరవ్యాప్తి (Semi - Interquartile Range)

Q_1 మొదటి (దిగువ), Q_3 మూడవ (ఎగువ) చతుర్థాంశకములు అయితే $Q_3 - Q_1$ ను చతుర్థాంశక అంతరవ్యాప్తి అని అంటాం. $(Q_3 - Q_1)/2$ ను అర్ధ చతుర్థాంశక అంతరవ్యాప్తి లేదా చతుర్థాంశక విచలనము అని అంటాం.

ఈ కొలతలు Q_1 ,Q_3 ల మీద ఆధారపడి ఉండడం వలన, అన్ని విలువల విచలనాన్ని పరిగణించ వలసిన అవసరం ఈ విచలనంలో లేదు. అందుచేత యిది ఆచరణాత్మక అవసరాలకు అంతగా ఉపయోగపడదు. చతుర్థాంశక విచలనాన్ని వివిధ సందర్భాలలో యే విధంగా గణనచేస్తామో క్రింది ఉదాహరణలలో తెలియజేస్తున్నాము.

ఉదా 4 : ఏడుగురు వ్యక్తుల దినసరి వేతనాలు వరుసగా రూ. 12, 7, 15, 10, 19, 17, 25. ఈ దినసరి వేతనాలకు చతుర్థాంశక విచలనాన్ని కనుగనండి.

సాధన : ఈ వేతనాలను, ఆరోహణక్రమంలో (ascending order) వ్రాస్తే, వరుసగా రూ. 7, 10, 12, 15, 17, 19, 25 అవుతాయి.

ఇక్కడ విలువలసంఖ్య $n = 7, \frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2, \frac{3(n+1)}{4} = 3 \times 2 = 6$

కాబట్టి, $Q_1 = \frac{n+1}{4}$ వ విలువ = 2వ విలువ = 10,

$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ వ విలువ = 6వ విలువ = 19

కాబట్టి, చతుర్థాంశక విచలనము = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{19-10}{2}$ = రూ. 4.5.

ఉదా 5 : క్రింది దత్తాంశము నుండి చతుర్థాంశక విచలనాన్ని కనుగొనండి.

విలువ :	10	15	20	25	30	35	40
పౌన పున్యం :	5	10	16	20	14	8	4

సాధన : ఇక్కడ మొత్తం పౌన : పున్యం $N = 5+10+16+20+14+8+4 = 77$

$$\therefore \frac{N+1}{4} = \frac{77+1}{4} = 19\frac{1}{2}, \frac{3(N+1)}{4} = 3 X 19\frac{1}{2} = 58\frac{1}{2}$$

$\therefore Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము (item) యొక్క విలువ

$= 19\frac{1}{2}$ వ అంశం విలువ $=$ 19 వ అంశం విలువ $+\frac{1}{2}$(20వ అంశం విలువ - 19వ అంశం విలువ)

$= 20 + \frac{1}{2}(20\text{-}20) = 20.$

$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ వ అంశం విలువ $=$ $58\frac{1}{2}$ వ అంశం విలువ

$=$ 58 వ అంశం విలువ + $\frac{1}{2}$ (59వ అంశం విలువ 58 వ అంశం విలువ)

$30 + \frac{1}{2}(30\text{-}30) = 30$

$\therefore$ చతుర్థాంశక విచలనం $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{30-20}{2} = 5$

BRAOU

ఉదా 6 : ఈ క్రింది పౌన : పున్య విభాజనానికి చతుర్థాంశక విచలనాన్ని కనుగొనండి.

దినసరి వేతనాలు :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
శ్రామికుల సంఖ్య :	6	12	18	10	4

సాధన : ముందుగా సంచిత పౌన : పున్య (cumulative frequency) పట్టికను తయారు చేసుకోవాలి.

తరగతి ఎగువహద్దులు	సంచిత పౌన : పున్యం " కంటె తక్కువ " Less than
10	0
15	6
20	18
25	36
30	46
35	50 = N

ఇక్కడ $\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$, $\frac{3N}{4} = 3 \times 12.5 = 37.5$

$\frac{N}{4} = 12.5$ అనే సంచిత పౌన : పున్యం 6కు 18కు మధ్యలో ఉంది. అనగా 15, 20 విలువల సంచిత పౌన : పున్యాలకు మధ్యలో ఉంది. కాబట్టి Q_1ను సరళ అంతర్వేశన (simple interpolation) పద్ధతి ద్వారా యీ విధంగా కనుగొనవచ్చు.

$$\frac{Q_1 - 15}{20 - 15} = \frac{12.5 - 6}{18 - 6}$$

అనగా, $$\frac{Q_1 - 25}{5} = \frac{6.5}{12}$$

$$\therefore Q = 5 \times \frac{6.5}{12} + 15 = 17.71$$

ఇదే విధంగా Q_3ను కూడా కనుగొనవచ్చు. $\frac{3N}{4} = 37.5$ అనే సంచిత పౌన : పున్యం 36కు 46కు మధ్యలో ఉంది. అనగా 25, 30 విలువల సంచిత పౌన : పున్యాలకు మధ్యలో ఉంది. కాబట్టి,

$$\frac{Q_3 - 25}{30 - 25} = \frac{37.5 - 36}{46 - 36}$$

అనగా, $$\frac{Q_3 - 25}{5} = \frac{1.5}{10}$$

$$\therefore Q_3 = 5 \times \frac{1.5}{10} + 25 = 25.75$$

$$\therefore \text{చతుర్థాంశక విచలనం} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{25.75 - 17.71}{2} = 4.02$$

3. మధ్యమ విచలనం (Mean Deviation)

ఒక చలరాశి యొక్క విలువల శ్రేణికి (series) మధ్యమ విచలనం అనగా, దాని యొక్క యే సగటు నుంచైనా అన్ని విలువలకు గల నిరపేక్ష విచలనాలకు (absolute deviations) అంకమధ్యమం (Arithmetic Mean). విలువల నిరపేక్ష విచలనాలను తీసుకుంటున్నప్పుడు ఆ విచలనాలను యే సగటు నుంచైనా తీసుకోవచ్చు. ఆ సగటు అంకమధ్యమమైనా కావచ్చు, మధ్యగతమైనా కావచ్చు, లేదా బాహుళకమైనా కావచ్చు. కాని, సాధారణంగా అంకమధ్యమము నుండి గాని, మధ్య గతము నుండి గాని, విచలనాలను తీసుకుంటాం. విచలనాలను అంకమధ్యమం నుండి తీసుకొంటే, ఆ మధ్యమ విచలనాన్ని అంకమధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనం (Mean Deviation from Mean) అని అంటాం. విచలనాలను మధ్యగతము నుండి తీసుకొంటే, ఆ మధ్యమ విచలనాన్ని మధ్యగతం నుండి మధ్యవిచలనం (Mean Deviation from Median) అని అంటాం. విచలనాలను బాహుళకం నుండి తీసుకొంటే, ఆ మధ్యమ విచలనాన్ని బాహుళకం నుండి మధ్యమ విచలనం (Mean Deviation from Mode) అని అంటాం.

ఒక చలరాశి xయొక్క విలువలు $x_1, x_2, \ldots, x_n$ అయి, దాని అంకమధ్యమము $\overline{x}$, మధ్యగత oM, బాహుళకం Z అయితే, దాని వివిధ మధ్యమ విచలనాలకు సూత్రాలు ఈవిధంగా ఉంటాయి.

అంకమధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనం = $\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$

మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం = $\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - M|}{n}$

బాహుళకం నుండి మధ్యమ విచలనం = $\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - z|}{n}$

ఇందులో $|\ \ |$ అనగా ఈ రెండు గీతల మధ్య వున్న విలువకు నిరపేక్ష విలువ అని అర్థం. ఉదాహరణకు, $|-3|$ అనగా - (-3) = 3, $|2|$ అనగా2 , $|0|$ అనగా 0.

దత్తాంశము పౌన : పున్య విభాజనమైనప్పుడు, వివిధ మధ్యమ విచలనాలకు క్రింది సూత్రాలను వాడుతాము.

అంకమధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనం = $\frac{\Sigma f_i|x_i - \bar{x}|}{\Sigma f_i}$

ఈ సూత్రంలో, దత్తాంశము అవర్గీకృత (ungrouped) పౌన : పున్య విభాజనం అయినప్పుడు x_i లను చలరాశి యొక్క విలువలుగానూ, వర్గీకృత (grouped) పౌన : పున్య విభాజనం అయినపుడు x_i లను తరగతుల మధ్య విలువలుగాను తీసుకోవాలి. f_i లు x_i ల పౌన : పున్యాలు. $\Sigma f_i = N$ మొత్తం పౌన : పున్యం. x యొక్క అంకమధ్యమం $\bar{X}$ ఇదేవిధంగా,

మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం = $\frac{\Sigma f_i|x_i - M|}{\Sigma f_i}$ బాహుళకం నుండి

మధ్యగతం = $\frac{\Sigma f_i|x_i - Z|}{\Sigma f_i}$

క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

ఉదా 7 : 31, 35, 29, 63, 55, 72, 37లకు అంకమధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{31+35+29+63+55+72+37}{7} = \frac{322}{7} = 46$

ఇప్పుడు వివిధ విలువలకు ఈ అంకమధ్యమం నుండి విచలనాలకు నిరపేక్ష విలువలను తెలిపే క్రింది పట్టికను తయారు చేసుకోవాలి.

B R A O U

విలువలు (x_i)	అంకమధ్యమం నుండి విచలనాలు $x_i - \bar{x} = x_i - 46$	ఈ విచలనాలకు కేవల విలువలు $\lvert x_i - \bar{x} \rvert = \lvert x_i - 46 \rvert$
31	- 15	15
35	- 11	11
29	- 17	17
63	17	17
55	9	9
72	26	26
37	- 9	9
		$104 = \lvert x_i - \bar{x} \rvert$

∴ అంకమధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనం $= \dfrac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n} = \dfrac{104}{7} = 14.86$

ఉదా 8 : 8, 15, 53, 49, 19, 62, 7, 15, 95, 77 లకు మధ్యగత నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

సాధన: విలువలను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాస్తే, అవి వరుసగా 7, 8, 15, 15, 49, 53, 62, 77, 95 అవుతాయి.

మధ్యగత $= \dfrac{n+1}{2}$ వ విలువ $= \dfrac{10+1}{2}$ వ విలువ = 5.5 వ విలువ

= 5 - వ, 6 - వ విలువల సగటు $= \dfrac{19+49}{2} = \dfrac{68}{2} = 34$

ఈ మధ్యగత నుండి అన్ని విలువలకు నిరపేక్ష విచలనాలు వరుసగా,

$\lvert 7 - 34 \rvert, \lvert 8 - 34 \rvert, \ldots \lvert 95 - 34 \rvert$ అనగా,

27, 26, 19, 19, 15, 15, 19, 28, 43, 61. కాబట్టి, మధ్యగత నుండి మధ్యమ విచలనం

$= \dfrac{27 + 26 + 19 + 19 + 15 + 15 + 19 + 28 + 43 + 61}{10} = 27.2$

ఉదా 9 : ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము నుండి, మధ్యగత నుండి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

విలువలు(x_i) :	10	11	12	13	14	మొత్తం
పౌన : పున్యాలు (f_i) :	3	12	18	12	3	48

BRAOU

$\therefore$ మధ్యగత నుండి మధ్యమ విచలనం $= \frac{\sum f_i |x_i - 5|}{N} = \frac{14}{10} = 1.4$

4. క్రమ విచలనం (Standard Deviation)

ఒక చలరాశి యొక్క విలువల శ్రేణికి క్రమ విచలనం అనగా దాని అంకమధ్యమం నుండి వివిధ విలువలకు గల విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమానికి ధనాత్మక వర్గమూలం. దీనిని సాధారణంగా " σ " అనే సంకేతంతో సూచిస్తాం. σ^2 ను విస్తృతి (variance) అంటాం. అనగా, $\sqrt{\text{విస్తృతి}}$ = క్రమ విచలనం.

ఒక చలరాశి x యొక్క విలువలు $x_1, x_2, \ldots, x_n$ అయి, దాని అంకమధ్యమం $\bar{x}$ అయితే, క్రమ విచలనం σ కు సూత్రం :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_2 - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

విస్తృతి = $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

σ^2 సూత్రాన్ని సూక్ష్మీకరిస్తే $\sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$ అని తెలుస్తుంది. కాని $\frac{\sum x_i^2}{n}$ అనేది విలువల వర్గాలకు అంకమధ్యమం, $\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$ అనేది విలువల అంకమధ్యమానికి వర్గం. అందుచేత,

విస్తృతి = విలువల వర్గాలకు అంకమధ్యమం - విలువల అంకమధ్యమానికి వర్గం.

కాబట్టి క్రమ విచలనం $= \sqrt{\frac{\sum xi^2}{n} - \left(\frac{\sum xi}{n}\right)^2} = \sqrt{\text{వర్గాలకు అంకమధ్యమం} - \text{అంకమధ్యమానికివర్గం}}$.

ఈ క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదా 11: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 అనే విలువలను క్రమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి పద్ధతి : $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$

ఈ అంక మధ్యమం నుండి వివిధ విలువలకు గల విచలనాలు వరుసగా 1 -5, 2-5, 3-5, ... , 9 -5. అనగా -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4. ఈ విచలనాలకు వర్గాలు వరుసగా 16, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16. కాబట్టి

విస్తృతి = ఈ వర్గాలకు అంకమధ్యమం $= \frac{16+9+4+1+0+1+4+9+16}{9} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$

$\therefore$ క్రమ విచలనం $= \sqrt{\text{విస్తృతి}} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2.58$

BRAOU

రెండవ పద్ధతి : అంకమధ్యమం = $\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$

వివిధ విలువల వర్గాలకు అంకమధ్యమం = $\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}{9}$

$= \frac{1+4+9+16 \ldots\ldots +81}{9} = \frac{285}{9}$

క్రమ విచలనం = $\sqrt{\text{విలువల వర్గాలకు అంకమధ్యమం - అంకమధ్యమానికి వర్గం}}$

$= \sqrt{\frac{285}{9} - 25} = \sqrt{\frac{60}{9}} = 2.58$

దత్తాంశము సామాన్య శ్రేణిగా ఉన్నప్పుడు, క్రమ విచలనానికి సూత్రం, దానిని గణన చేసే పద్ధతిని పైన తెలుసుకోవడం జరిగింది. దత్తాంశము పౌన : పున్య రూపంలో ఉన్నప్పుడు, క్రమ విచలనానికి సూత్రం, దానిని గణన చేసే పద్ధతిని క్రింద గమనిద్దాం.

ఒక చలరాశి X యొక్క విలువల దత్తాంశము పౌన : పున్య రూపంలో ఉండి, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ లు విలువలుగాని, వివిధ తరగతులకు మధ్య విలువలు గాని అయి, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ లు ఆ విలువల పౌన : పున్యాలు గాని, తరగతుల పౌన : పున్యాలు గాని అయితే.

$$\sigma = \frac{\sum fi\,(xi - \bar{x})^2}{\sum fi}$$

దీనినే, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\, xi^2}{N} - \left(\frac{\sum fi\, xi}{N}\right)^2}$, $N = \sum fi$, అని గూడా వ్రాయవచ్చు.

కాని $\frac{\sum fi\, xi^2}{N}$ అనేది విలువల వర్గాలకు అంకమధ్యమం, $\frac{\sum fi\, xi}{N}$ అనేది విలువలకు అంకమధ్యమం.

కాబట్టి, $\sigma = \sqrt{\text{విలువల వర్గాలకు అంకమధ్యము - అంకమధ్యమానికి వర్గం}}$.

పై సూత్రంలో అన్ని విచలనాలను అంకమధ్యమం $\bar{X}$ నుండి తీసుకోవడం జరిగింది. కాని విచలనాలను యే విలువ నుంచైనా తీసుకోవచ్చు. నిజానికి క్రమ విచలనం విలువ మనం యే విలువ నుంచి విచలనాలను తీసుకుంటున్నాము అనే విషయం మీద ఆధారపడదు. కాబట్టి క్రమ విచలనం సూత్రంలో విచలనాలను తీసుకునే మూల బిందువుకు (origin) మనకు కావలసినట్లుగా మార్చుకోవచ్చు. కాని, స్కేలును (Scale) మారుస్తే క్రమ విచలనం విలువ మారుతుంది. అందుచేత, క్రమ విచలనం విలువ మూలబిందువు మీద ఆధారపడి ఉండదు, కాని, స్కేలు మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. క్రింది సూత్రాన్ని గమనిస్తే ఈ విషయం తెలుస్తుంది.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\, di^2}{N} - \left(\frac{\sum fi\, di}{N}\right)^2} \times h$$

ఇక్కడ, $di = \frac{xi - A}{h}$, A అనగా ఏదో ఒక విలువ (మూల బిందువు). అనగా విచలనాలను A అనే విలువ నుంచి తీసుకుంటున్నాము. h అనేది స్కేలు. సాధారణంగా అంతరాల పొడవును (length of the intervals) స్కేలుగా తీసుకుంటాం.

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి క్రమ విచలనాన్ని సులువుగా గణన చేయవచ్చు. ఈ సూత్రంలో మూల బిందువును యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకోవడానికి వీలుంది. కాబట్టి విచలనాల విలువ వీలైనంత తక్కువ ఉండేటట్లు, ఈ మూల బిందువును ఎంపిక చేసుకుంటాం. మనకు అనుకూలంగా ఉన్న మూల బిందువు నుంచి విచలనాలను తీసుకుని, వీటిని యింకా తగ్గించడానికి, స్కేలుచే భాగిస్తాం. ఈ విధంగా చేయడం వలన, మొదటి దత్తాంశంలో ఉన్న విలువలు, పౌన : పున్యాలు చాలా పెద్దవి అయినప్పటికీ విచలనాల విలువలు చాలా తగ్గి, క్రమ విచలన గుణనను సులభం చేస్తుంది. అందుచేత, సాధారణంగా క్రమ విచలన గణనలో ఈ సూత్రాన్ని వాడుతాము. ఈ సూత్రాన్ని వాడడానికి ముందుగా అంకమధ్యమాన్ని కనుగొనవలసిన అవసరం లేదని గమనించండి.

ఉదా 12 : ఒక పార్లమెంట్‌లో 540 సభ్యుల వయస్సులు ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి. వాటికి క్రమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

వయస్సు (సం ॥లలో) :	30	40	50	60	70
సభ్యుల సంఖ్య :	64	132	153	140	51

సాధన : ముందుగా ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేద్దాం.

వయస్సు (సం॥లలో) x_i	A = 50 నుండి విచలనాలు $d_i = x_i - 50$	సభ్యుల సంఖ్య f_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
30	− 20	64	−1280	25600
40	− 10	132	−1320	13200
50 = A	0	153	0	0
60	10	140	1400	14000
70	20	51	1020	20400
మొత్తం		540 = N	$\sum f_i d_i$ = - 180	$\sum f_i d_i^2$ = 73200

$$\therefore \text{క్రమ విచలనం} = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{73200}{540} - \left(\frac{-180}{540}\right)^2}$$

$$= \sqrt{135.5555 - 0.1111} = \sqrt{135.4444} \text{ సం ॥ } 11.64 \text{ లు (సుమారుగా)}$$

ఉదా 13 : క్రింది పౌన : పున్య విభాజనానికి క్రమవిచలనాన్ని కనుగొనండి.

ఎత్తు (అంగుళాలలో) :	59 - 61	61-63	63-65	65-67	67-69	మొత్తం
విద్యార్థుల సంఖ్య :	4	30	45	15	6	100

BRAOU

సాధన : ముందుగా క్రింది పట్టికను తయారు చేద్దాం

ఎత్తు (అంగుళాలలో)	మధ్యవిలువలు x_i	పౌన : పున్యం f_i	A = 64నుండి విచలనాలు $d_i = x_i - 64$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
59 - 61	60	4	-4	- 16	64
61 - 63	62	30	-2	- 60	120
63 - 65	64	45	0	0	0
65 - 67	66	15	2	30	60
67 - 69	68	6	4	24	96
మొత్తం	N = 100			$\Sigma f_i d_i = -22$	$\Sigma f_i d_i^2 = 340$

$$\therefore \text{ క్రమ విచలనం } = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{340}{100} - \left(\frac{-22}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3.4 - 0.0484} = \sqrt{3.3516} = 1.83 \text{ అంగుళాలు (సుమారుగా)}$$

ఈ ఉదాహరణలో మూల బిందువును 64గా తీసుకొని, స్కేలును మాత్రం మార్చలేదు.

ఉదా 14 : క్రింది పౌన : పున్య విభాజనానికి క్రమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1 – 10	5	51 - 60	22
11 - 20	12	61 - 70	15
21 - 30	20	71 - 80	6
31 - 40	25	81 - 90	4
41 - 50	40	91 - 100	1

సాధన : ఈ ఉదాహరణలో స్కేలును గూడా మార్చుతాము. 45.5ను మూల బిందువుగాను 10ని స్కేలుగాను తీసుకొని క్రింది పట్టికను తయారు చేద్దాం.

BRAOU

తరగతి అంతరములు	మధ్య విలువలు xi	పౌన : పున్యాలు fi	విచలనాలు (A = 45.5, h = 10)	fidi	$fi\,di^2$
1 -10	5.5	5	-4	-20	80
11-20	15.5	12	-3	-36	108
21-30	25.5	20	-2	-40	80
31-40	35.5	25	-1	-25	25
41-50	45.5 = A	40	0	0	0
51-60	55.5	22	1	22	22
61-70	65.5	15	2	30	60
71-80	75.5	6	3	18	54
81-90	85.5	4	4	16	64
91-100	95.5	1	5	5	25
మొత్తం	N = 150			$\Sigma fi\,di = -30$	$\Sigma fidi^2 = 518$

$$\therefore \text{క్రమ విచలనం} = \sqrt{\frac{\Sigma fi\,di^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fi\,di}{N}\right)^2} \text{ X h} = \sqrt{\frac{518}{150} - \left(\frac{-30}{150}\right)^2} \text{ X } 10$$

$$= \sqrt{3.4533 - 0.04} \times 10 = \sqrt{3.4133} \times 10 = 1.848 \times 10 = 18.48$$

సంయుక్త (composite) దత్తాంశానికి క్రమ విచలనం

ఒక దత్తాంశంలో n_1 విలువలు ఉండి $\overline{x}_1$ అంకమధ్యమం గానూ, σ_1 ను క్రమ విచలనం గానూ కలిగి ఉంటూ, మరొక దత్తాంశంలో n_2 విలువలు ఉండి $\overline{x}_2$ ను అంకమధ్యమంగానూ, σ_2 ను క్రమవిచలనంగానూ కలిగి ఉంటే, ఆ రెండు దత్తాంశాలను సంయుక్తము చేయగా వచ్చిన సంయుక్త దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం $\overline{x}$ ను, క్రమ విచలనం σ ను యీ క్రింది సూత్రాల ద్వారా రాబట్టవచ్చు.

$$\overline{X} = \frac{n_1 \overline{x}_1 + n_2 \overline{x}_2}{n_1 + n_2},$$

$$\sigma^2 = \frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2}$$

BRAOU

$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$, $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$

ఉదా 15 : 50,100 విలువలు గల రెండు శాంపుల్స్‌కు 54.4, 50.3 వరుసగా అంకమధ్యమాలు, 8, 7లు వరుసగా క్రమ విచలనాలు అనుకొండి. ఈ రెండు శాంపుల్స్‌ను సంయుక్తము చేయగా వచ్చిన సంయుక్త శాంపుల్‌కు అంకమధ్యమాన్ని క్రమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

సాధన : ఇక్కడ $n_1 = 50, n_2 = 100, \bar{x}_1 = 54.4, \bar{x}_2 = 50.3, \sigma_1 = 8, \sigma_2 = 7$ కాబట్టి పై సూత్రంలో వీటి విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{50 \times 54.4 + 100 \times 50.3}{50 + 100}$$

$$= \frac{2720 + 5030}{150} = \frac{7750}{150} = 51.67 = 51.7 \quad \text{(సుమారుగా)}$$

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 54.4 - 51.7 = 2.7$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 50.3 - 51.7 = -1.4$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{50 \times 64 + 100 \times 49 + 50 (2.7)^2 + 100 (-1.4)^2}{50 + 100}$$

$$\sigma^2 = \frac{8660.5}{150} = 57.737$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{57.737} = 7.59 = 7.6 \quad \text{(సుమారుగా)}$$

క్రమ విచలనానికి గల అనుకూల, ప్రతికూల లక్షణాలు

విస్తరణ కొలతలలో క్రమ విచలనం చాలా ప్రాముఖ్యత కలిగిన కొలత. సర్వసాధారణంగా ఉపయోగపడే కొలత. ఒక మంచి విస్తరణ కొలతకు ఉండవలసిన లక్షణాలు చాలావరకు ఈ క్రమ విచలనానికి ఉన్నాయి. అవి యేవనగా,

(1) ఇది ఖచ్చితమైన నిర్వచనాన్ని కలిగి, శ్రేణిలో అన్ని విలువలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

(2) ఇది మిగతా కొలతల కంటే శాంప్లింగ్ చాంచల్యాల (sampling fluctuations) వలన చాలా తక్కువగా ప్రభావితమవుతుంది.

(3) మూలబిందువును, స్కేలును అనుకూలంగా ఎంచుకొని, దీనిని సులువుగా గణన చేయవచ్చు.

B R A O U

కాని దీనికి కొన్ని ప్రతికూల లక్షణాల గూడా ఉన్నాయి. అవి యేవనగా

(1) దీని సూత్రం సంక్లిష్టంగా ఉండడం వలన దీని గణన చాలా కష్టం.

(2) రెండు శ్రేణులలో విలువలు వివిధ యూనిట్లలో ఉంటే, ఆశ్రేణులలో ఉన్న విచలనాలను పోల్చడానికి క్రమ విచలనం ఉపయోగపడదు.

18.2.2 విస్తరణకు సాపేక్ష కొలతలు (Relative Measures of Dispersion)

ఇంతవరకు విస్తరణకు వివిధ రకాల నిరపేక్ష కొలతలను చర్చించడం జరిగింది. కాని, రెండు దత్తాంశాలలో విలువలు వివిధ యూనిట్లలలో ఉంటే, వాటి విస్తరణను పోల్చడానికి నిరపేక్ష కొలతలు ఉపయోగపడవు. అప్పుడు సాపేక్ష కొలతలను వాడవలసి ఉంటుంది. ఈ సాపేక్ష కొలతలు మూడు. (1) విచలన గుణకం , (Co efficient of Variation) (2) చతుర్థాంశక విచలన గుణకం, (Co efficient of Quartile Deviation), (3) మధ్యమ విచలన గుణకం (Co efficient of Mean Deviation).

ఒక నిరపేక్ష కొలతను ఆ సంబంధిత కేంద్రీయ ప్రవృత్తి మాన కొలతలో శాతంగా (percentage) తెలియబరిస్తే, సాపేక్ష కొలత వస్తుంది. ఈ సాపేక్ష కొలతలు దత్తాంశములోని విలువలు కొలవబడే యూనిట్పై ఆధారపడవు. అందుచేత యివి వివిధ దత్తాంశాలలోని విస్తరణను పోల్చడానికి ఉపయోగపడతాయి. వీటిని గురించి యిప్పుడు చర్చిస్తాం.

(1) విచలన గుణకం

విచలన గుణకాన్ని యీ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాం.

$$\text{విచలన గుణకం} = \frac{\text{క్రమ విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమము}} \times 100 = \frac{\sigma}{\bar{x}} . 100$$

అనగా, క్రమ విచలనానికి, అంకమధ్యమానికి గల నిష్పత్తి (ratio) ని ఒక శాతంగా తెలియబరిస్తే , విచలన గుణకం అవుతుంది. ఈ విచలన గుణకం రెండు దత్తాంశాల విస్తృతిని సరిపోల్చడానికి చాలా ఉపయోగపడుతుంది. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదా 16 : ఒక ఫ్యాక్టరీ A,B అను రెండు రకాల విద్యుత్తు బల్బులను తయారు చేస్తున్నది. వాటి మన్నికను గూర్చి జరిపిన పరిశీలనలో ఈ క్రింది సమాచారం సేకరించబడింది.

మన్నిక కాలము (గంటలలో)	A రకం బల్బులు	B రకం బల్బులు
500 - 700	5	4
700 - 900	11	30
900 - 1100	26	12
1100 - 1300	10	8
1300 - 1500	8	6
మొత్తం	60	60

BRAOU

విచలన గుణకాన్ని ఉపయోగించి, రెండు రకాల బల్బుల మన్నిక కాలాలలో విస్తరణను పరిపోల్చి, యే రకంలో మన్నిక కాలం యెక్కువ విస్తరణ కలిగి ఉందో తెలియబరచండి.

సాధన : ముందుగా క్రింది పట్టికను తయారు చేయాలి.

తరగతుల మధ్య విలువలు x_i	విచలనాలు $d_i = \frac{x_i - 1000}{200}$ A = 1000, h = 200	A రకం			B రకం		
		f_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	f_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
600	-2	5	-10	20	4	-8	16
800	-1	11	-11	11	30	-30	30
1000 = A	0	26	0	0	12	0	0
1200	1	10	10	10	8	8	8
1400	2	8	16	32	6	12	24
మొత్తం		N = 60	Σ fi di =5	Σ fi di^2 = 73	N = 60	Σ fi di =-18	Σ fi di^2 = 78

A రకం : అంకమధ్యం $= A + \frac{\Sigma fi\,di}{N} \times h = 1000 + \frac{5}{60} \times 200 = 1016.67$ గంటలు

క్రమ విచలనం $= \sqrt{\frac{\Sigma fi\,di^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fi\,di}{N}\right)^2} \times h = \sqrt{\frac{73}{60} - \left(\frac{5}{60}\right)^2} \times 200$

$= 219.8$ గంటలు

B R A O U

$\therefore$ క్రమ విచలన గుణకం $= \frac{\text{క్రమ విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}} \times 100 = \frac{2198}{1016.67} \times 100 = 21.62\ \%$

B రకం: అంకమధ్యమం $= A + \frac{\Sigma fi\,di}{N} \text{ X } h = 1000 + \left(\frac{18}{60}\right) \text{X } 200 = 940$ గంటలు

క్రమ విచలనం $= \sqrt{\frac{\Sigma fi\,di^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fi\,di}{N}\right)^2} \times h = \sqrt{\frac{78}{60} - \left(\frac{-18}{60}\right)^2} \times 200$

$= 220$ గంటలు.

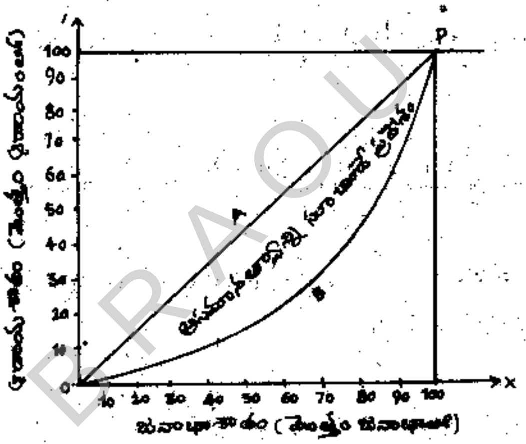
$\therefore$ క్రమ విచలన గుణకం $= \frac{\text{క్రమ విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}} \times 100 = \frac{220}{940} \text{ X } 100 = 23.4\%$

కాబట్టి B రకం బల్బులలో A రకం బల్బులలో కంటె మన్నిక కాలంలో యెక్కువ విస్తరణ వుంది.

(inequality) తెలియబరచడానికి ఈ వక్రాలు బాగా ఉపయోగపడతాయి. ఇప్పుడు ఈ వక్రాలను ఒక దేశంలో వున్న భూమి (land) , వేతనాలు (wages) , ఆదాయం మొదలైన వాటి పంపిణీలను తెలియ బరచడానికి కూడా వాడడం జరుగుతున్నది. లొరెంజ్ వక్రము ఒక సంచిత శాత వక్రము (cumulative percentage curve)

ఈ లొరెంజ్ వక్రాన్ని గీయడానికి, ముందుగా దత్తాంశములో ఉన్న విలువలకు సంచిత మొత్తాలను (cumulative totals), ఆ విలువల పౌనఃపున్యాలకు సంచిత పౌన : పున్యాలను కనుగొంటాం. తరువాత, ఆ సంచిత మొత్తాలను, అన్ని విలువల మొత్తంలో శాతాలుగా గణన చేస్తాం. ఈ విధంగా సంచిత మొత్తాల శాతాలు (percentage of cumulative totals) వస్తాయి. ఇదేవిధంగా, సంచిత పౌన : పున్యాలను మొత్తం పౌన : పున్యంలో శాతాలుగా తెలుసుకొని, సంచిత పౌన : పున్య శాతాలను (Percentage of cumulative frequencies) కనుగొంటాం. X - అక్షంపై ఈ సంచిత పౌన : పున్యాల శాతాలను, Y - అక్షంపై సంచిత మొత్తాల శాతాలను గుర్తిస్తాం. ఈ శాతాల వ్యాప్తి రెండు అక్షాలపై 0 నుంచి 100 వరకు ఉంటుందనే విషయం విదితమే. ఇప్పుడు రేఖాచిత్రంలో సంచిత మొత్తాల శాతాలను వాటికి సంబంధించిన సంచిత పౌన : పున్య శాతాలను బిందువులుగా గుర్తించి, ఆ బిందువులను కలిపితే వచ్చే వక్రమే లొరెంజ్ వక్రం.

ఉదాహరణకు, ఒక దేశంలో జనాభా మధ్య ఆదాయ పంపిణీని తెలియబరచే లొరెంజ్ వక్రాన్ని క్రింద చూపినాం.



BRAOU

జనాభా మధ్య సమానంగా ఆదాయం పంపిణీ జరిగితే, అప్పుడు లొరెంజ్ వక్రం OAP అనే సరళరేఖ అవుతుంది. కాని సాధారణంగా పంపిణీ ఉన్న అసమానత్వం వలన లొరెంజ్ వక్రం OBP వంటి వక్రరేఖ మాదిరిగా ఉంటుంది. OAP కు OBP కు మధ్య నున్న ప్రదేశం అసమానత్వాన్ని తెలియజేస్తుంది. ఈ ప్రదేశం ఎక్కువగా ఉంటే అసమానత్వాలు ఎక్కువగా ఉన్నాయని, తక్కువగా ఉంటే అసమానత్వాలు తక్కువగా ఉన్నాయని మనం అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఇటువంటి అసమానత్వాలను విశ్లేషిస్తున్న అన్ని సందర్భాలలోనూ లొరెంజ్ వక్రాలను వాడవచ్చు. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

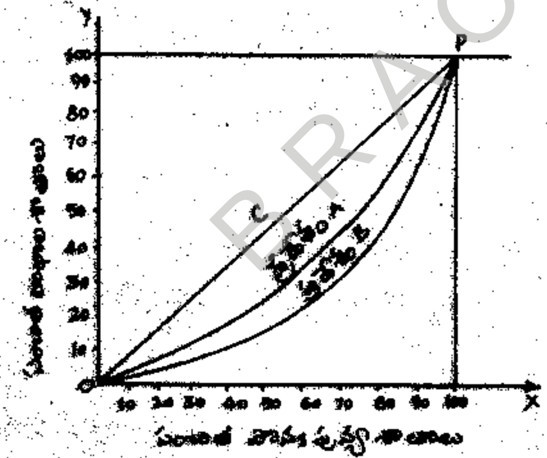
ఉదా 19 : A,B అను రెండు ప్రదేశాలలో వివిధ స్థాయిలలో లాభాలను ఆర్జిస్తున్న కంపెనీల సంఖ్యలను ఇవ్వడమైనది. వాటి లొరెంజ్ వక్రాలను గీసి తగిన వ్యాఖ్యానం చేయండి.

ఆర్జించిన లాభాలు (రూ : వేలలో)		: 6	25	60	84	105	150	170	400
కంపెనీల సంఖ్య	ప్రదేశం A	: 6	11	13	14	15	17	10	14
	ప్రదేశం B	: 2	38	52	28	38	26	12	4

సాధన : ముందుగా క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాం.

లాభాలు			ప్రదేశం - A			ప్రదేశం B		
ఆర్జించిన లాభాలు (వేలరూ.లలో)	సంచిత లాభాలు (Cum. Profits)	సంచిత లాభాలశాతాలు (Percentage of Cum. Profits)	కంపెనీల సంఖ్య	సంచిత శాఖపున్యాలు	సంచిత శాఖ : పున్యాల శాతాలు	కంపెనీల సంఖ్య	సంచిత శాఖ : పున్యాలు	సంచిత శాఖ : పున్యాల శాతాలు
6	6	0.6	6	6	6	2	2	1
25	31	3.1	11	17	17	38	40	20
60	91	9.1	13	30	30	52	92	46
84	175	17.5	14	44	44	28	120	60
105	280	28.0	15	59	59	38	158	79
150	430	43.0	17	76	76	26	184	92
170	600	60.0	10	86	86	12	196	98
400	1000	100.0	14	100	100	4	200	100

ఇప్పుడు ప్రదేశం A కు, ప్రదేశం B కు లోరెంజ్ వక్రాలను క్రింద పటంలో చూపుతున్నాము.



BRAOU

పై పట్టికలో చూపిన సంచిత శాఖ : పున్యాల శాతాలకు, సంచిత లాభాల శాతాలకు సంబంధించిన బిందువులను గుర్తించి కలిపితే, ప్రదేశం A కు, ప్రదేశం B కు సంబంధించిన లోరెంజ్ వక్రరేఖలు పై పటంలో చూపిన విధంగా వస్తాయి. పై పటంలో OAP కి OCP కి మధ్య విస్తీర్ణం కంటె, OBP కి OCP కి మధ్య ఉన్న విస్తీర్ణం ఎక్కువగా వుంది. కాబట్టి కంపెనీల లాభాల పంపిణీలో A ప్రదేశంలో కంటె, B ప్రదేశంలోనే ఎక్కువ సమానత్వాలు ఉన్నాయని గుర్తించాలి.

అంకమధ్యమం = $A + \frac{\sum fi\,di}{N} = 18.5 - \frac{217}{500} = 18.07$

క్రమ విచలనం = $\sqrt{\frac{\sum fi\,di^2}{N} - \left(\frac{\sum fi\,di}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{1669}{500} - \left(\frac{-217}{500}\right)^2} = 1.775$

బాహుళకం = $L + \frac{f_m - f_1}{2\,f_m - f_1 - f_2} \times h = 18 + \frac{125 - 100}{2 \times 125 - 100 - 87} \times 1 = 18.4$

(ఇందులో 18 - 19 అనే తరగతి బాహుళకం తరగతి (modal Class) ఎందుచేతననగా, ఆ తరగతికి యొక్కువ పౌన : పున్యం (125) ఉన్నది. L (= 18) ఆ బాహుళకం తరగతి దిగువ హద్దు. f_m (125) ఆ తరగతి పౌన : పున్యం. f_1 (=100) ఆ తరగతికి ముందు తరగతి పౌన : పున్యం. f_2 (=87) ఆ తరగతికి తరువాత ఉన్న తరగతికి పౌన : పున్యం. h (=1) తరగతుల పొడవు)

పియర్‌సన్స్ విషమత్వపు కొలత = $\frac{\text{అంకమధ్యమం - బాహుళకం}}{\text{క్రమ విచలనం}} = \frac{18.07 - 18.4}{1.775} = -0.187$

కాబట్టి ఈ విభాజనం ఋణాత్మక విషమత్వపు విభాజనం అయి దాని పౌన : పున్య వక్రము అంకమధ్యమానికి యెడవ ప్రక్కగా యొక్కువ మొగ్గు చూపుతుంది.

ఉదా 21 : క్రింది పౌన : పున్య విభాజనానికి బౌలే విషమత్వపు కొలతను కనుగొనండి.

వయస్సు (సం॥లలో)	: 20లోపు	20 -25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45-55	55 పైన
ఉద్యోగస్తుల సంఖ్య :	13	29	46	60	112	95	45	21

సాధన : ఈ విభాజనంలో అంత్య విలువలు తెలియజేయని తరగతులు (open - end classes) ఉన్నాయి కాబట్టి, చతుర్థాంశకముల మీద ఆధారపడిన బౌలే విషమత్వపు కొలతే యిక్కడ విషమత్వాన్ని కొలవడానికి సరియైన కొలత. అందుచేత, ముందుగా ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాం.

వయస్సు (సం॥లలో)	సంచిత పౌన : పున్యం (" కంటె తక్కువ " (Less than))
20	13
25	42
30	88
35	148
40	260
45	354
55	399
55, ఆ పైన	420 = N

ఇక్కడ, $\frac{N}{4} = \frac{420}{4} = 105, \frac{N}{2} = \frac{420}{2} = 210, \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 420}{4} = 315.$ $\frac{N}{4} = 105$ అనే సంచిత పౌన:పున్యం, 88, 148 అనే సంచిత పౌన:పున్యాల మధ్య ఉంది. ఇది 30 - 35 అనే తరగతికి సంబంధించిన సంచిత పౌన:పున్యం. ఈ తరగతి దిగువ హద్దు $l_1 = 30$. ఈ తరగతికి ముందు తరగతి సంచిత పౌన:పున్యం $F_1 = 88$. ఈ తరగతి పౌన:పున్యం $f_1 = 60$. తరగతి పొడవు $h = 5$ కాబట్టి, Q_1 సూత్రం ప్రకారంగా

$$Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - F_1}{f_1} \times h = 30 + \frac{105 - 88}{60} \times 5 = 30 + \frac{17}{12} = 31.42$$

ఇదేవిధంగా, $$Q_2 = l_2 + \frac{\frac{N}{2} - F_2}{f_2} \times h = 35 + \frac{210 - 148}{112} \times 5$$

$$= 35 + \frac{62}{112} \times 5 = 37.8$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{\frac{3N}{4} - F_3}{f_3} \times h = 40 + \frac{315 - 260}{94} \times 5$$

$$= 40 + \frac{55}{94} \times 5 = 42.9$$

కాబట్టి బౌలే విషమత్వం కొలత $= \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)}$

$$= \frac{(42.9 - 37.8) - (37.8 - 31.4)}{(42.9 - 37.8) + (37.8 - 31.4)}$$

$$= \frac{5.1 - 6.4}{5.1 + 6.4} = -\frac{1.3}{11.5} = -0.11$$

ఈ విలువ ఋణాత్మకం కాబట్టి ఈ విభాజనం ఋణాత్మక విషమ విభాజనం అయి పౌన:పున్య వక్రం తక్కువ విలువల వైపు పొడవైన చివర భాగాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

B R A O U

18.4 శిఖరీయ కొలతలు (Measures of Kurtosis)

ఒక విభాజనానికి గల పౌన:పున్య వక్రం యొక్క శిఖరానికి (peak) గల పదను (sharpness) ను శిఖరీయత (peakedness) అంటాం. రెండు విభాజనాల సగటు, విస్తరణ, అసౌష్ఠవత ఒకేవిధంగా ఉన్నప్పటికీ, వాటి పౌన:పున్య వక్రాల శిఖరీయతలలో తేడా ఉండవచ్చు. అందులో ఒక విభాజనంలో విలువలు రెండవ దానిలో కంటె బాహుళకానికి చాలా దగ్గరలో ఉండి, దాని పౌన:పున్య వక్రం చాలా పదునైన శిఖరాన్ని కలిగి ఉండవచ్చు. ఈ పౌన:పున్య వక్రం ఎంతవరకు పదునైన శిఖరాన్ని కలిగి ఉంటుంది అనే విషయాన్ని

క్రింది పట్టికను గమనించండి

x_i	f_i	$y_i = x_i - 4$	y_i^2	y_i^3	y_i^4	fi yi	fi yi ^{2}	fi yi ^{3}	fi yi4
1	2	-3	9	-27	81	-6	18	-54	162
2	9	-2	4	-8	16	-18	36	-72	144
3	25	-1	1	-1	1	-25	25	-25	25
4	35	0	0	0	0	0	0	0	0
5	20	1	1	1	1	20	20	20	20
6	8	2	4	8	16	16	32	64	128
7	1	3	9	27	81	3	9	27	81

మొత్తం N=100 $\quad \Sigma fi\, yi = -10 \quad \Sigma fi\, yi^2 = 140 \quad \Sigma fiyi^3 = -40 \quad \Sigma fiyi\, 4 = 560$

$m_1^1 =$ 4 పరంగా 1 -వ ఘాతిక $= \dfrac{\Sigma f_i (x_1 - 4)}{N} = \dfrac{\Sigma fi\, yi}{100} = \dfrac{-10}{100} = -0.1$

$m_2^1 =$ 4 పరంగా 2 -వ ఘాతిక $= \dfrac{\Sigma fi (x_i - 4)^2}{N} = \dfrac{\Sigma f_i y_i^2}{100} = \dfrac{140}{100} = 1.4$

$m_3^1 =$ 4 పరంగా 3 -వ ఘాతిక $= \dfrac{\Sigma f_i (x_i - 4)^3}{N} = \dfrac{\Sigma f_i y_i^3}{N} = \dfrac{-40}{100} = -0.4$

$m_4^1 =$ 4 పరంగా 4 -వ ఘాతిక $= \dfrac{\Sigma f_i (x_i - 4)^4}{N} = \dfrac{\Sigma f_i y_i^4}{N} = \dfrac{560}{100} = 5.6$

$\therefore m_1 =$ 1 -వ కేంద్ర ఘాతిక $= 0$

$m_2 =$ 2వ కేంద్ర ఘాతిక $= m_2^1 - m_1^{1^2} = 1.4 - (-0.1)^2 = 1.4 - 0.01 = 1.39$

$m_3 = m_3^1 - 3\, m_2^1 m_1^1 + 2\, m_1^{1^3} = -0.4 - 3\,(1.4)\,(-0.1) + 2\,(-0.1)^3$

$= -0.4 + 0.42 - 0.002 = 0.018.$

$m_4 =$ 4వ కేంద్ర ఘాతిక $= m_4^1 - 4\, m_3^1 m_1^1 + 6 m_2^1 m_1^{1^2} - 3\, m_1^{1^4}$

$= 5.6 - 4\,(-0.4)\,(-0.1) + 6\,(1.4)\,(-0.1)^2 - 3\,(-0.1)^4$

$= 5.6 - 0.16 + 0.084 - 0.0003 = 5.5237.$

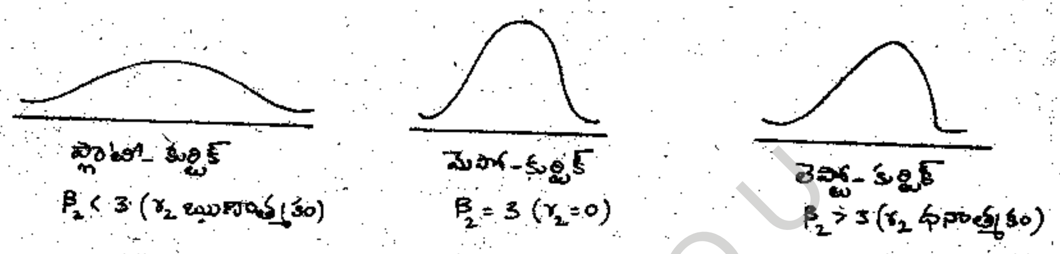
BRAOU

18.4.2 శిఖరీయ కొలతలు

ఇప్పుడు ఘాతికలను వాడి శిఖరీయత కొలతలను కనుగొనడానికి సూత్రాన్ని తెలియబరుస్తాం.

ఒక పౌన : పున్య విభాజనానికి పౌన : పున్య వక్రపు శిఖరం చాలా సున్నితమైన పదును కలిగి వుంటే, ఆ విభాజనంలో విలువలన్నీ బాహుళకానికి చాలా దగ్గరలో ఉన్నాయని అర్థం. అటువంటి విభాజనానికి $\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{m_4}{\sigma^4}$ అనే గుణకానికి విలువ 3 అవుతుంది. అనగా, $r_2 = \beta_2 - 3 = 0$ అవుతుంది. కాబట్టి

r_2 0 అయితే, ఆ పౌన : పున్య వక్రపు శిఖరం సున్నితత్వాన్ని కొంత కోల్పోయిందని అర్థం. అనగా $\beta_2 > 3$ లేదా $\beta_2 < 3$ అవుతుంది. $\beta_2 < 3$ (r_2 ఋణాత్మకమైతే) అయితే ఆ శిఖరీయతను ప్లాటీ - కుర్టిక్, (Platy - Kurtic), $\beta > 3$ అయితే (r_2 ధనాత్మకమయితే) ఆ శిఖరీయతను లెప్టో - కుర్టిక్ (Lepto - Kurtic) $\beta_2 = 3$ ($r_2 = 0$) $\beta > 3$ అయితే , ఆ శిఖరీయతను మెసో - కుర్టిక్ (Meso - Kurtic) అని అంటాం. ఈ వివిధ శిఖరీయతలను క్రింద పటంలో చూపినాము.



ఉదా 23: ఈ క్రింది విభాజనానికి శిఖరీయతను కనుగొనండి. పౌన : పున్య విభాజనం స్వభావాన్ని పరిశీలించండి.

తరగతి అంతరాలు :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
పౌన : పున్యం :	1	3	4	2

సాధన : ముందుగా ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాం.

తరగతి అంతరం	మధ్య విలువ (x_i)	పౌన : పున్యం f_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x} = x_i - 22$	$f_i (x_i - \overline{x})$	$f_i (x_i - \overline{x})^2$	$f_i (x_i - \overline{x})^3$	$f_i (x_i - \overline{x})^4$
0 - 10	5	1	5	- 17	- 17	289	- 4913	83521
10 - 20	15	3	45	- 7	- 21	147	- 1029	7203
20 - 30	25	4	100	3	12	36	108	324
30 - 40	35	2	70	13	26	338	4394	57122
మొత్తం		$\Sigma f_i = 10 = N$	$\Sigma f_i x_i = 220$			$\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^2 = 810$		$\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^4 = 148170$

$$\text{అంకమధ్యమం} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{220}{10} = 22$$

$$m_2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{810}{10} = 81$$

$$m_4 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{N} = \frac{148170}{10} = 14817$$

$$\therefore \beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{14817}{(81)^2} = \frac{14817}{6561} = 2.258 < 3.$$

$\beta_2 < 3$ కాబట్టి, ఈ విభాజనానికి పౌన : పున్య వక్రం ప్లాటీ - కుర్టిక్ అవుతుంది.

18.5 సారాంశం

ఒక దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడానికి, కేంద్రీయ ప్రవృత్తిమానాలే సరిపోవని, విస్తరణ కొలతలను కూడా వాడవలసి వుంటుందని తెలుసుకొని, అటువంటి విస్తరణ కొలతలను ఈ యూనిట్ 18.2వ విభాగంలో ప్రవేశపెట్టాం. ఒక విభాజనం సౌష్టవమా, అసౌష్టవమా అని యేవిధంగా తెలుసుకోవాలి అనే విషయాన్ని చర్చిస్తూ 18.3వ విభాగంలో అసౌష్టవత కొలతలను పరిశీలించాం. ఒక విభాజనం యొక్క పౌన : పున్య వక్రము యొక్క శిఖరమునకు గల పదును యేవిధంగా ఉంటుంది అని తెలుసుకోవడానికి " శిఖరీయత " అనే భావనను ప్రవేశపెట్టి ఈ శిఖరీయతకు కొలతలను 18.4 విభాగంలో చర్చించాము.

18.6 అవగాహన ప్రశ్నలు

1. ఈ క్రింది విభాజనానికి చతుర్థాంశక విచలనాన్ని కనుగొనండి.

బరువు (కెజీలలో) :	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70
మనుష్యుల సంఖ్య :	10	22	28	20	12	8

2. క్రింది విభాజనములో ఒక తెగలో బార్యా, భర్తల వయస్సులలో తేడాలను యివ్వడం జరిగింది.

సంవత్సరాలు :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15-20	20 -25	25-30	30-35	35-40
పౌన :పున్యం :	449	705	507	281	109	52	16	4

ఈ విభాజనానికి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొనండి. ఆ తెగలో ఉన్న సాంఘిక ఆచారాలను గురించి ఈ మధ్యమ విచలనం యేమి తెలియజేస్తుంది ?

BRAOU

3. క్రింది దత్తాంశమునకు సరియైన విస్తరణ కొలతను కనుగొనండి.

వారానికి వచ్చే వేతనం (రూపాయలలో)	కార్మికుల సంఖ్య
35 కంటె తక్కువగా	14
35 - 37	62
38 - 40	99
41 - 43	18
43 కంటె ఎక్కువగా	7

(సూచన : మొదటి, ఆఖరి తరగతులు వివృతంగా ఉన్నాయి కాబట్టి, ఈ సందర్భంలో చతుర్థాంశక విచలనమే సరియైన విస్తరణ కొలత)

4. క్రింది విభాజనానికి క్రమ విచలనాన్ని కనుగొనండి.

వయస్సు (x) :	20 - 25	25 -30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
మనుష్యుల సంఖ్య :	170	110	80	45	40	35

5. రెండు ఫ్యాక్టరీలలో చెల్లించే వేతనాల విభాజనాన్ని క్రింద యీయడం జరిగింది. ఏ ఫ్యాక్టరీలో వేతనాలు యెక్కువ వ్యత్యాసాన్ని కలిగి ఉన్నాయో చెప్పండి.

వేతనాలు (రూపాయలలో)	కార్మికుల సంఖ్య మొదటి ఫ్యాక్టరీ	కార్మికుల సంఖ్య రెండవ ఫ్యాక్టరీ
50 - 100	2	6
100 - 150	9	11
150 - 200	29	18
200 - 250	54	32
250 - 300	11	27
300 - 350	5	11

BRAOU

6. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి " లొరెంజ్ " వక్రాన్ని గీసి తగిన వ్యాఖ్యానం చేయండి.

నెలసరి ఆదాయం (వందల రూపాయలలో)	5 కంటె తక్కువ	5 - 9.9	10 - 14.9	15-19.9	20-24.9	25-29.9	30-34.9
వ్యక్తుల సంఖ్య	144	54	36	24	18	15	9
కూడబెట్టిన సంపద (వందల రూపాయలలో)	132	22	24	20	24	26	52

7. క్రింది విభాజనానికి " పియర్ సన్ ", " బౌలే " విషమత్వపు కొలతలను కనుగొనండి.

తరగతులు :	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 -35	35 -40
పౌనఃపున్యాలు:	6	8	17	21	15	11	2

8. షూతికలను ఉపయోగించి క్రింది విభాజనానికి విషమత్వం, శిఖరీయత కొలతలను కనుగొనండి.

తరగతులు :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
పౌన : పున్యం :	1	3	4	2

9. " వైషమ్యం " (విషమత్వం) అనగా నేమి ? దాని ప్రాముఖ్యతయేమి ?

10. " విస్తరణ " అనగా నేమి ? విస్తరణ కొలత ఆవశ్యకత యేమి ?

11. " వైషమ్యం ", " శిఖరీయత " - వీటి తేడాను తెలుపండి. ఒక పౌన : పున్య విభాజనాన్ని వర్ణించడంలో వీటికి గల పాత్ర ఎటువంటిది ?

12. సాపేక్ష విస్తరణ, నిరపేక్ష విస్తరణకు గల తేడాను తెలుపండి.

18.7 చదువవలసిన గ్రంథాలు

1. Business Statistics : S. Saha.
2. Statistical Methods : C.B. Gupta

18.8 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

1. విచలన గుణకాన్ని నిర్వచించండి. ఈ కొలతకు గల ప్రత్యేక ప్రాముఖ్యతయేమి ?

2. క్రింది దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం, క్రమ విచలనం, అంకమధ్యము నుండి మధ్యమ విచలనం కనుక్కోండి.

తరగతులు :	4 – 5	6 - 7	8 - 9	10 - 11	12 - 13	14-15
పౌనఃపున్యాలు:	4	10	20	15	8	3

3. క్రింది దత్తాంశానికి వైషమ్యం, శిఖరీయత కొలతలను కనుగొనండి.

వార్షిక అమ్మకాలు : (వేల రూ॥లలో)	0 - 20	20-50	50 - 100	100 - 250	250-500	500-1000
సంస్థల సంఖ్య :	20	50	69	30	25	19

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. విచలన గుణకాన్ని వివరించండి.

2. వైషమ్యం, శిఖరీయతల తేడాలను వివరించండి.

18.9 భావనలు

ఈ యూనిట్‌లో చర్చించిన భావనలన్నింటిని ఈ విభాగంలో పున : ప్రవేశ పెడదాము.

BRAOU

1. విస్తరణ (Dispersion) : ఒక దత్తాంశములో వివిధ విలువలకు వాటి సగటు నుండి ఉన్న విచలనము వ్యత్యాసమును విస్తరణ అని అంటాము.

2. వ్యాప్తి (Range): ఒక చలరాశి విలువలలో గరిష్ఠ విలువకు, కనిష్ఠవిలువకు గల తేడాను వ్యాప్తి అంటాం.

3. చతుర్థాంశక విచలనము (Quartile Deviation) లేదా అర్థ చతుర్థాంశక అంతరవ్యాప్తి (Semi - Inter Quantity Range) : Q_1 మొదటి (దిగువ), Q_3 మూడవ (ఎగువ) చతుర్థాంశకములు అయితే $Q_3 - Q_1$ను చతుర్థాంశక అంతరవ్యాప్తి అని అంటాం. $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ ను అర్థ చతుర్థాంశక అంతర వ్యాప్తి లేదా చతుర్థాంశక విచలనము అని అంటాం.

4. మధ్యమ విచలనము (Mean Deviation): ఒక చలరాశి యొక్క విలువల శ్రేణికి మధ్యమ విచలనము అనగా దాని యొక్క యే సగటు నుంచైనా అన్ని విలువలకు గల నిరపేక్ష విచలనాలకు అంకమధ్యమం.

5. అంకమధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనం (Mean Deviation from Mean) : పై నిర్వచనంలో విచలనాలను అంకమధ్యమం నుండి తీసుకొంటే, ఆ మధ్యమ విచలనాన్ని అంకమధ్యమము నుండి మధ్యమ విచలనం అని అంటాం.

6. మధ్యగతము నుండి మధ్యమ విచలనం (Mean Deviation from Median) : నిర్వచనం 4 లో విచలనాలను మధ్యగతం నుండి తీసుకొంటే, ఆ మధ్యమ విచలనాన్ని మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం అని అంటాం.

7. బాహుళకం నుండి మధ్యమ విచలనం (Mean Deviation from Mode) : నిర్వచనం 4 లో విచలనాలను బాహుళకం నుండి తీసుకొంటే, ఆ మధ్యమ విచలనాన్ని బాహుళకం నుండి మధ్యమ విచలనం అని అంటాం.

8. క్రమ విచలనం (Standard Deviation), విస్తృతి (Variance) : ఒక చలరాశి యొక్క విలువల శ్రేణికి క్రమ విచలనం అనగా దాని అంకమధ్యమం నుండి వివిధ విలువలకు గల విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమానికి ధనాత్మక వర్గమూలం. క్రమ విచలనకు వర్గాన్ని విస్తృతి అంటాం.

9. విచలన గుణకం (Coefficient of Variation)

$$\text{విచలన గుణకం} = \frac{\text{క్రమ విచలనం}}{\text{అంక మధ్యమం}} \times 100 = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

10. చతుర్థాంశక విచలన గుణకం (Co efficient of Quartile Deviation)

$$\text{చతర్థాంశక విచలన గుణకం} = \frac{\text{చతుర్థాంశక విచలనం}}{\text{మధ్యగతం}} \times 100$$

11. మధ్యమ విచలన గుణకం (Co efficient of Mean Deviation)

$$\text{లేదా మధ్యమ విచలన గుణకం} = \frac{\text{మధ్యమ విచలనం}}{\text{అంక మధ్యమం లేదా మధ్యగతము}} \times 100$$

12. లొరెంజ్ వక్రము (Lorenz Curve) : ఒక దత్తాంశములోని విస్తరణకు రేఖాచిత్రము ద్వారా చూపే వక్రాన్ని లొరెంజ్ వక్రము అంటాం. X - అక్షంపై సంచిత పౌన :పున్య శాతాలను, Y- అక్షంపై సంచిత మొత్తాల శాతాలను గుర్తించి, వాటికి సంబంధించిన వక్రాన్ని గీస్తే, అదే లొరెంజ్ వక్రము అవుతుంది.

13. సౌష్ఠవ (Symmetrical) , అసౌష్ఠవ (Asymmetrical) విభాజనం : ఒక దత్తాంశంలో దాని అంక మధ్యమానికి సమాన వ్యత్యాసంతో ఉన్న విలువలు సమాన పౌన :పున్యాన్ని కలిగి ఉంటే, ఆ విభాజనాన్ని సౌష్ఠవ విభాజనం అని అంటాం. ఒక విభాజనం సౌష్ఠవం కాకపోతే, దానిని అసౌష్ఠవ విభాజనం అనిగాని విషమ (skewed) విభాజనం అనిగాని అంటాం.

14. ధనాత్మక విషమ విభాజనం (Positively Skewed Distriblution) : ఒక విభాజనం యొక్క పౌన :పున్య వక్రము హెచ్చు విలువల వైపు పొడవైన చివర భాగాన్ని కలిగి ఉంటే, ఆ విభాజనాన్ని ధనాత్మక విషమ విభాజనం అని అంటాం.

15. ఋణాత్మక విషమ విభాజనం (Negatively Skewed Distribution): ఒక విభాజనం యొక్క పౌన :పున్య వక్రము తరుగు విలువల వైపు పొడవైన చివర భాగాన్ని కలిగి ఉంటే, ఆ విభాజనాన్ని ఋణాత్మక విషమ విభాజనం అని అంటాం.

16. వైషమ్యానికి పియర్ సన్స్ మొదటి కొలత (Pearson's First Measure of Skewness)

$$\text{వైషమ్యపు కొలత} = \frac{\text{అంకమధ్యమం - బాహుళకం}}{\text{క్రమ విచలనం}}$$

17. వైషమ్యానికి పియర్‌సన్స్ రెండవ కొలత (Pearson's Second Measure of Skewness)

$$\text{వైషమ్యపు కొలత} = \frac{3(\text{అంకమధ్యమం - మధ్యగతం})}{\text{క్రమ విచలనం}}$$

18. వైషమ్యానికి బౌలే కొలత (Bowley's Measure of Skewness)

$$\text{వైషమ్యపు కొలత} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)} = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

19. శిఖరీయత (Peakedness): ఒక విభాజనానికి గల పౌన :పున్య వక్రం యొక్క శిఖరానికి గల పదునును శిఖరీయత అని అంటాం.

20. A పరంగా r వ ఘాతిక (r - th Moment about A) : x అనే చలరాశికి $x_1, x_2, \ldots, x_n$ అను విలువలు ఉన్నాయని అనుకొండి. A యేదైనా ఒక యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య అయితే, A పరంగా r వ ఘాతిక (m_r^1) ను ఈ విధంగా నిర్వచిస్తాం. $m_r^1 = \frac{\Sigma (x_i - A)^r}{n}$.

21. r వ కేంద్ర ఘాతిక (r - th Cenral Moment) : పై నిర్వచనంలో $A = \overline{x}$ అయితే, అంకమధ్యమపరంగా r వ ఘాతిక ను r వకేంద్ర ఘాతిక (r - th central moment) అని అంటాం.

22. ప్లాటీ - కుర్టిక్ (Platy - Kurtic), లెప్టో - కుర్టిక్ (Lepto - Kurtic), మెసో - కుర్టిక్ (Meso-Kurtic): $\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{m_4}{\sigma^4}$, $r_2 = \beta_2 - 3$ అయితే, $\beta_2 < 3$ అయినప్పుడు ఆ శిఖరీయతను ప్లాటీ -

BRAOU

కుర్టిక్ అని.$\beta_2 > 3$ అయితే ఆ శిఖరీయతను లెప్టో - కుర్టిక్ అని. $\beta_2 = 3$ అయితే ఆ శిఖరీయతను మెసో - కుర్టిక్ అని అంటాం.

18. 10 పదకోశం

అంకమధ్యమం	Arithmetic Mean
అసౌష్ఠవ	Asymmetrical
అసౌష్ఠవత కొలతలు	Measures of skewness
అత్యున్నత తరగతి	Highest class
అత్యల్ప తరగతి	Lowest class
అర్థ చతుర్థాంశక అంతర వ్యాప్తి	Semi - inter quartile range
అవర్గీకృత	Unshaped
అంతరం	Interval
ఆదాయం	Income
అసమానత్వం	Inequality
అంత్య విలువలు తెలియజేయని తరగతులు	Open - end classes
ఎగువ హద్దు	Upper boundary
కేంద్రీయ ప్రవృత్తి మానం	Measure of central tendency
కేంద్రీకృతమై	Concentration
క్రమ విచలనం	Standard deviation
ఘాతికలు	Moments
చతర్థాంశక విచలనం	Quartile deviation
చతుర్థాంశక విచలన గుణకం	Coefficient of quartile deviation
నిరపేక్ష కొలతలు	Absolute measures
పదునైన శిఖరం	Sharp peak
పొడవు	Length
పంపిణీ	Distribution
దిగువహద్దు	Lower boundary
పౌన : పున్య వక్రం	Frequency curve

B R A O U

పౌన : పున్య విభాజనం	Frequency distribution
బాహుళకం	Mode
భూమి	Land
మధ్యగతము	Median
మధ్యమ విచలనం	Mean Deviation
మధ్యమ విచలన గుణకం	Co efficient of Mean Deviation
లొరెంజ్ వక్రం	Lorenz curve
వర్గీకృత పౌన : పున్య విభాజనం	Grouped frequency distribution
విచలనం	Deviation
విచలన గుణకం	Co efficient of variation
విస్తరణ	Dispersion
వివృతం	Open
వేతనం	Wage
విషమ	Skewed
వైషమ్యం (విషమత్వం)	Skewness
వ్యాప్తి	Range
శాంప్లింగ్ చాంచల్యాలు	Sampling fluctuations
శిఖరీయత	Kurtosis
సగటు	Average
సంచిత పౌన : పున్యం	Cumulative frequency
సంచిత శాత వక్రం	Cumulative percentage curve
సంచిత మొత్తాలు	Cumulative totals
సంయుక్త	Composite
సాపేక్ష కొలతలు	Relative measures
సౌష్ఠవ	Symmetrical
సౌష్ఠవత	Symmetry.

- ఆచార్య ఎవ్. రాజగోపాలరావు

BRAOU

ఖండం - 6

సంభావ్యత : పంపిణీలు, అంచనాలు

ఈ ఖండంలో సంభావ్యతా సిద్ధాంతాలను చర్చించడంతో బాటు సంభావ్యత పంపిణీలను, అంచనాలను, సార్థకతా పరీక్షలను పరిశీలిస్తాం. భాగం 19లో సంభావ్యత భావనను పరిచయం చేస్తూ దానికి సంబంధించిన సంకలన సిద్ధాంతం, గుణక సిద్ధాంతం, బేయిస్ సిద్ధాంతాలను వివరించాం. తర్వాత భాగంలో విభాజనా ప్రమేయాలను ; ద్విపద, పాయిసన్, సామాన్య విభాజనాలను తెలుసుకొందాం. ఈ ఖండంలోని చివరి పాఠంలో పరామితి, దాని అంచనాధారం, ప్రతిరూపం, ప్రతిరూప విభాజనం, క్రమ దోషం భావనలను తెలియజేస్తూ సార్థకతా పరీక్షలను పరిశీలిద్దాం.

ఈ ఖండంలోని 3 భాగాలు :

భాగం - 19 : సంభావ్యత, ప్రాథమిక సంభావ్యతా వాదం

భాగం - 20 : సంభావ్యతా ప్రమేయాలు, విభాజనా ప్రమేయాలు : ద్విపద, పాయిసన్ మరియు సామాన్య విభాజనాలు

భాగం - 21 : సార్థకతా పరీక్షలు

B R A O U

ఉదా (2) : యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : పాచికను విసరడం

శాంపుల్ ఆవరణము : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ఉదా (3) : యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : రెండు నాణెములను ఎగుర వేయడం

శాంపుల్ ఆవరణము : $\Omega = \{ (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) \}$.

ఉదా (4) : యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : ఒక నాణెమును ఎగురవేయడం, ఒక పాచికను దొర్లించడం.

శాంపుల్ ఆవరణము : $\Omega = \{(H,1), \ldots, (H,6), (T,1) \ldots (T,6)\}$

నిర్వచనం (1) :

సమ సంభవ ఘటనలు (Equally Likely Events)

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన ఘటనలు సమ సంభవాలు అయినప్పుడు వాటిని సమ సంభవ ఘటనలు అని పిలుస్తారు.

ఉదా (5) : సౌష్ఠవమైన ఒక నాణెమును ఎగురవేస్తే బొమ్మ పడుటకు ఎంత అవకాశమున్నదో, బొరుసు పడడానికి గూడా అంతే అవకాశమున్నది. కావున 'బొమ్మ పడడం', 'బొరుసు పడడం' లను సమసంభవ ఘటనలుగా భావించాలి.

నిర్వచనం (2) :

పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు (Mutually Exclusive Events)

ఒక ప్రయోగానికి చెందిన శాంపుల్ ఆవరణంలో A,B లు ఘటనలు. A యొక్క రాక B యొక్క రాకను నిరోధించినట్లయితే A,B లను పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అని అంటారు.

ఉదా (6): బాగుగా కలుపబడిన పేకముక్కల నుండి ఒక పేక ముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే ఏ పేక ముక్క రావడానికైనా ఒకే అవకాశమున్నదని ఊహించవచ్చు. వచ్చిన ముక్క మిగతా ముక్కల రాకను నిరోధిస్తుంది.

నిర్వచనం (3) :

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలు (Favourable Elementary Events)

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణములో ఒక ఘటన సంభవానికి అనుకూలంగా ఉండే ప్రాథమిక ఘటనలను అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలుగా పేర్కొంటాము.

ఉదా (7) : పాచికను యాదృచ్ఛికంగా విసిరే ప్రయోగంలో 'సరిసంఖ్య రావడం' అనే ఘటన సంభవానికి అనుకూలంగా వుండే, శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనలు : '2 రావడం', '4 రావడం', '6 రావడం.

నిర్వచనము :

సంభావ్యత సాంప్రదాయిక నిర్వచనము (Classical Definition of probability)

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన శాంపుల్ ఆవరణలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య n అనుకుంటే

అందులోని n(A) ప్రాథమిక ఘటనలు A అనే ఘటనకు అనుకూలమైతే

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

ఉదా 8 : ఒక సాధ్వన నాణెమును ఎగురవేస్తే బొమ్మపడడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

శాంపుల్ ఆవరణము : $\Omega = \{H, T\}$

శాంపుల్ ఆవరణములోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 2

బొమ్మ పడడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 1

A : బొమ్మపడడం

కాబట్టి, $P(A) = \frac{1}{2}$

ఉదా 9 : ఒక పాచికను ఎగురవేస్తే సరిసంఖ్య రావడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

శాంపుల్ ఆవరణం : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A : సరి సంఖ్య రావడం

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలు : {2}, {4}, {6}

శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 6

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 3

కాబట్టి, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ఉదా 10 : రెండు నాణెములను ఎగురవేస్తే ఒక బొమ్మ, ఒక బొరుసు రావడానికి సంభావత్య ఎంత ?

శాంపుల్ ఆవరణం : $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 4

A : ఒక బొమ్మ, ఒక బొరుసు కావడం.

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలు : (H,T), (T,H)

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 2

కాబట్టి $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

19.3 ప్రస్తారాలు - సంయోగాలు

కొన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రయోగాలకు శాంపుల్ ఆవరణాన్ని పూర్తిగా వ్రాయడం కష్టం కాబట్టి, శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్యను గణించడానికి సంయోగాత్మక విశ్లేషణను {Combinational analysis} ఉపయోగిస్తాము.

B R A O U

శాంపుల్ ఆవరణము :

S = { (సోమ - మంగళ), (మంగళ - బుధ), (బుధ - గురు), (గురు - శుక్ర), (శుక్ర - శని), (శని - ఆది), (ఆది - సోమ) }

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలు : (శని - ఆది), (ఆది - సోమ) - 2

ఉదా (17) : ఒక సంచిలో 3 ఎరుపు, 6 తెలుపు మరియు 7 నీలం రంగు బంతులున్నాయి. రెండు బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే వాటిలో ఒక తెలుపు మరియు ఒక నీలం రంగు బంతులుండేందుకు సంభావ్యతని కనుక్కోండి.

సాధన : సంచిలో బంతుల మొత్తం = 16.

16 బంతుల నుండి 2 బంతులను 16_{C_2} రకాలుగా తీసుకోవచ్చు. 6 తెలుపు రంగు బంతుల నుండి ఒక బంతిని 6_{C_1} రకాలుగా తీసుకోవచ్చు. అట్లే 7 నీలం రంగు బంతుల నుండి ఒక దానిని 7_{C_1} రకాలుగా తీసుకోవచ్చు. శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 16_{C_2} అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : $(6_{C_1})(7_{C_1})$. ఘటన : E : 16 బంతుల నుండి రెండు బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే అది తెలుపు మరియు నీలం రంగు బంతులవడం.

$$P(E) = \frac{7_{c_1} \times 6_{c_1}}{16_{c_2}} = \frac{7 \times 6}{120} = \frac{7}{20}$$

ఉదా (18) : బాగుగా కలపబడిన 52 పేక ముక్కల నుండి రెండు ముక్కలు యాదృచ్ఛికంగా తీసుకోబడినాయి. అవి రెండు ఆసులవడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

సాధన : శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 52_{c_2}. 4 ఆసుల నుండి రెండు ఆసులను 4_{c_2} రకాలుగా తీసుకోవచ్చు. అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 4_{c_2} . E : రెండు ముక్కలు ఆసులవడం.

$$\therefore P(E) = \frac{4_{C_2}}{52_{C_2}} = \frac{6}{51 \times 26} = \frac{1}{221}$$

ఉదా (19) : బ్రిడ్జి క్రీడలో ఒక క్రీడాకారునికి ఒకే సూట్‌కు చెందిన 9 ముక్కలుండటానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

సాధన : శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : $52_{C_{13}}$

E : ఒకే సూట్‌కు చెందిన 9 ముక్కలుండడం.

9 ముక్కలు డైమండ్స్, 4 ముక్కలు డైమండ్స్ కాకుండా వుండడం (లేదా) 9 ముక్కలు క్లబ్స్, 4 ముక్కలు క్లబ్స్ కాకుండా వుండడం (లేదా) 9 ముక్కలు హార్ట్స్, 4 ముక్కలు హార్ట్స్ కాకుండా వుండడం (లేదా) 9 ముక్కలు స్పేడ్స్, 4 ముక్కలు స్పేడ్స్ కాకుండా వుండడం.

E అనే ఘటన సంభవానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య :

B R A O U

$(13_{c_9} \times 39_{c_4}) + (13_{c_9} \times 39_{c_4}) + (13_{c_9} \times 39_{c_4}) + (13_{c_9} \times 39_{c_4})$

$4 \times 13_{c_9} \times 39_{c_4}$

$$P(E) : \frac{4 \times 13_{c_9} \times 39_{c_4}}{52_{c_{13}}}$$

ఉదా (20) : 1, 2, 3, 4, 5 అనే సంఖ్యల నుండి ఒక సంఖ్యను, మిగిలిన నాలుగు సంఖ్యల నుండి మరియొక సంఖ్యను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొంటే, రెండు సంఖ్యలు బేసి సంఖ్యలవడానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు : శాంపుల్ ఆవరణం :

S = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4) }

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 6

$$\therefore P(E) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

ఉదా (21): " REGULATIONS" అనే ఇంగ్లీషు పదంలోని అక్షరాలను యాదృచ్ఛికంగా వ్రాస్తే R మరియు E ల మధ్య ఖచ్చితంగా నాలుగు అక్షరాలుండేందుకు సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : R మొదటి అక్షరంగా వస్తే E తరువాత ఏదేని పదిస్థానాల్లో ఉండవచ్చు. R రెండవ అక్షరంగా వస్తే E ఏదేని మిగత స్థానాల్లో ఉండవచ్చు. . . . . R పదకొండవ స్థానంలో ఉంటే E ఏదేని ఒక ముందరి స్థానాల్లో ఉంటుంది. అంటే, ఇచ్చిన పదాలను యాదృచ్ఛికంగా వ్రాస్తే, R,E లు 110 వేరు వేరు స్థానాల్లో ఉండవచ్చు.

శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 110

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలు :

(i) R మొదటి స్థానం, E ఐదవ స్థానం
E మొదటి స్థానం, R ఐదవ స్థానం

(ii) R రెండవ స్థానం, E ఆరవ స్థానం
E రెండవ స్థానం, R ఆరవ స్థానం

. . . .
. . . .
. . . .

(vi) R ఆరవ స్థానం , E పదకొండవ స్థానం
E ఆరవ స్థానం , R పదకొండవ స్థానం

అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 12

$$P(E) = \frac{12}{110} = \frac{6}{55}$$

E : R,E లకు మధ్య ఖచ్చితంగా 4 అక్షరాలుండడం.

B R A O U

ఎ.ఎల్. కాల్మొగొరోవ్ (A.L.Kolmogorov) అనబడే ప్రఖ్యాత శాస్త్రవేత్త స్వీకృత పద్ధతి ద్వారా సంభావ్యతను నిర్వచించినాడు. ఈ నిర్వచనం వల్ల సంభావ్యత సిద్ధాంతాలకు ఒక నూతన వికాసం కలిగి ఆ భాగం మహా వృక్షమైనది.

నిర్వచనం 6 :

(a) ఘటనల క్షేత్రం (Field of Events)

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణం Ω అనుకొంటే, Ω యొక్క ఉపసమితుల ద్వారా నిర్మితమైన సమితుల తరగతి, ఘటనల క్షేత్రం τ అవాలంటే

(i) $\varnothing \in \tau$

(ii) $A,B \in \tau \rightarrow A \cup B \in \tau$

(iii) $A,B \in \tau \rightarrow A \cap B \in \tau$

(iv) $A \in \tau \rightarrow A^{c} \in \tau$

A^{c} అనగా A యొక్క పూరకము

ఉదా 26: Ω {H,T} అయితే, ఘటనల క్షేత్రం τ ను కనుక్కోండి.

$\tau = \{ \phi, \{H\}, \{T\}, \Omega \}$

ఉదా 27: $\tau = \{\Omega, \varnothing\}$ కూడా ఒక ఘటనల క్షేత్రం అవుతుంది.

ఉదా 28 : $\Omega = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$ అయితే ఘటనల క్షేత్రాన్ని కనుక్కోండి.

$\tau = \{\varnothing \{1\}, \{2\}, \ldots \{6\} ; \{1,2\}, \ldots \{5,6\} ; \{1,2,3\} \ldots \{4,5,6\}; \{1,2,3,4\} \ldots \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega \}$

Ω లో n బిందువులున్నట్లయితే τ లో Ω యొక్క 2^{n} ఉపసమితులుంటాయి. P యొక్క ప్రదేశము (domain) τ, వ్యాప్తి (0,1)గా ఉండేటట్లు P ని τ పై నిర్వచిస్తాము.

ie., $P : \tau \rightarrow [0,1]$

(b) స్వీకృతాలు (Axioms)

(i) $\forall A \in \tau, P(A) \geq 0.$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j = 1,2,\ldots,n,$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

BRAOU

(c) స్వీకృతాలనుపయోగించి (i) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(ii) $P(\emptyset) = 0$ (iii) A B $\Rightarrow P(A) \le P(B)$ అని చూపండి.

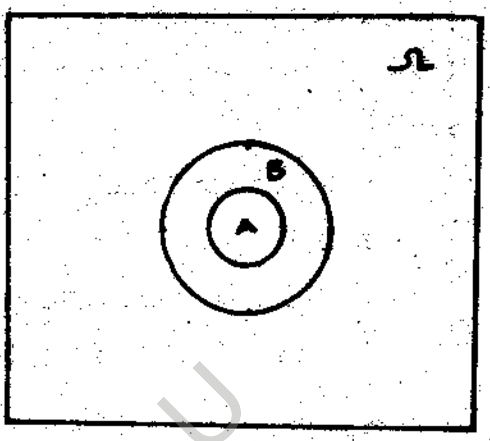
నిరూపణ :

(i) $A \cup A^c = \Omega$

$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ ($\because$ మూడవ స్వీకృతం)

$P(A) + P(A^c) = 1$ ($\because$ రెండవ స్వీకృతం)

పటం - 1



$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$,

(ii) $A \cup \emptyset = A$

$P(A \cup \emptyset) = P(A)$

$\Rightarrow P(A) + P(\emptyset) = P(A)$ [$\because A \cap \emptyset = \emptyset$]

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

(iii) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B - A)$

$A \cap (B - A) = \emptyset$

$P(B) = P[A \cup (B-A)] = P(A) + P(B-A)$ ($\because$ మూడవ స్వీకృతం)

$P(B) - P(A) = P(B-A) \ge 0.$

$P(B) \ge P(A)$

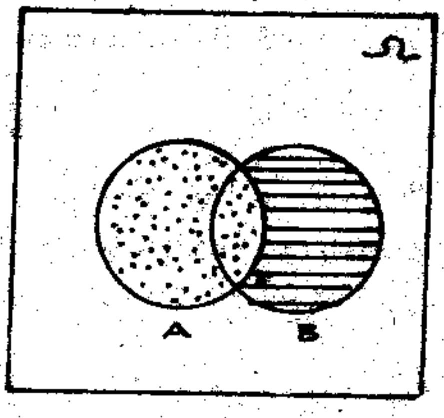
$\Rightarrow P(A) \le P(B)$

19.6 సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము (Addition Theorm of Probability)

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క శాంపుల్ ఆవరణం Ω, శాంపుల్ ఆవరణం యొక్క ఉపసమితుల ద్వారా నిర్మితమైన ఘటనల క్షేత్రం τ అయితే,

$\forall A, B \in \tau$

పటం - 2



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A,B లు వియుక్త సమితులు అయితే

$A \cap B = \emptyset$ అవుతుంది కావున

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

నిరూపణ : $A = (A - B) \cup (A \cap B)$

$A - B$, $A \cap B$ లు వియుక్త సమితులు.

BRAOU

$B = (B-A) \cup (A \cap B)$

$B-A$, $A \cap B$ లు విముక్త సమితులు

$A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A-B) + P(A \cap B) + P(B-A)$

$= P(A) + P(B-A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ఉదా (29) : బాగుగా కలుపబడిన 52 పేక ముక్కల నుండి ఒక ముక్క యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొనబడినది. అది స్పేడ్ గాని, ఆసుగాని అగుటకు సంభావ్యతా ఎంత ?

జవాబు :

A : తీసుకొనబడిన పేకముక్క స్పేడ్ కావడం

B : తీసుకొనబడిన పేకముక్క ఆసు కావడం

$A \cap B$: తీసుకోబడిన పేక ముక్క స్పేడు మరియు ఆసు కావడం

$A \cup B$: తీసుకొనబడిన పేకముక్క స్పేడు మరియు ఆసు కావడం

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

శాంపుల్ ఆవరణలో 52 ప్రాథమిక ఘటనలుంటాయి.

అందులో స్పేడు ముక్కలు 13 కావున, స్పేడు రావడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య 13 అవుతుంది.

$P(A) = \frac{13}{52}$

తీసుకురావడానికి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య : 4

$P(B) = \frac{4}{52}$

స్పేడు, ఆసు రావడానికి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య : 1

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$P(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

ఉదా (30) : 1,2,3,4,5,6,7,8,9 అనే అంకెల నుండి ఒక అంకెను యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొంటే అది 5 కంటే తక్కువ అగుటకు గాని లేదా సరిసంఖ్య అగుటకు గాని సంభావ్యత ఎంత ?

B R A O U

జవాబు :

A : తీసుకొనబడిన సంఖ్య 5 కంటె తక్కువ కావడం

B : తీసుకొనబడిన సంఖ్య సరిసంఖ్య అవడం

$A\cap B$: తీసుకొనబడిన సంఖ్య 5 కంటె తక్కువ మరియు సరిసంఖ్య కావడం

9 అంకెల నుండి ఒక అంకెను $9_{c_1} = 9$ విధాలుగా తీసుకొనవచ్చు. కావున, శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 9.

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{2,4,6\}$

$A \cap B = \{2,4\}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = 2/3$

ఉదా 31 : ఒక పేక దస్తా నుండి రాణీలను, రాజాలను వేరు చేసి ఒక చిన్న పేక దస్తాను తయారు చేసినారు. అందులో నుండి 2 పేక ముక్కలను తీస్తే అవి రెండు ఎర్రవిగాని లేదా రాణులుగాని అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు : చిన్న పేక దస్తాలో 8 ముక్కలుంటాయి. అంటే శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 8_{c_2}

A : రెండు పేక ముక్కలు ఎర్రవి కావడం

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య : 4

B : రెండు పేక ముక్కలు రాణులు కావడం

అనుకూల ఘటనలు సంఖ్య : 4

$A \cap B$: రెండు పేకముక్కలు రాణులు మరియు ఎర్రవి కావడం

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య : 2

$A \cup B$: రెండు పేక ముక్కలు రాణులు లేదా ఎర్రవి కావడం.

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{4c_2}{8c_2} + \frac{4c_2}{8c_2} - \frac{1}{8c_2} = 6/28 = 11/28$

19.7 నియుత సంభావ్యత (Conditional Probability)

నిర్వచనం 7 : $A,B,\in \tau$, $P(A) \neq 0$ అనుకోండి. B అనే ఘటన A అనే ఘటన పైన ఆధారపడితే $P(B/A)$ ని A జరిగినపుడు B సంభావ్యత అని పిలుస్తారు. B అనే ఘటన A పైన ఆధారపడకపోతే $P(B/A) = P(B)$ అని వ్రాస్తాము. ఇదేవిధంగా $P(A/B)$ ని నిర్వచించవచ్చు.. $P(B/A)$, $P(A/B)$ లను నియుత సంభావ్యతలు అని పిలుస్తారు.

B R A O U

నిర్వచనం : సాంఖ్యిక స్వతంత్ర్యత (Stochastic Independence)

$P(A \cap B) = P(A), P(B)$ అయినప్పుడు A,B లు స్వతంత్ర్య ఘటనలు అవుతాయి.

ఉదా 32 : బాగుగా కలుపబడిన 52 పేకముక్కల నుండి ఒక ముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. రాజా వచ్చినది అని చెబితే అది ఎరుపురంగు పేక ముక్క ఆగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : A : పేక ముక్క రాజా అవడం

B : పేకముక్క ఎరుపు అవడం

B సంభావ్యత గణించడమంటే, B దృష్ట్యా శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య, 52ను హారములోను అనుకూల ఘటనల సంఖ్య 26 ను లవములోను తీసుకొనడము అవుతుంది.

అంటే $P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

వచ్చిన పేకముక్క రాజా అని చెబితే, శాంపుల్ ఆవరణంలో కేవలం 4 ప్రాథమిక ఘటనలుంటాయి. అందులో రెండు ముక్కలు ఎర్రవి వుంటాయి గనుక

$P(B/A) = \frac{2}{4} = 1/2$

$\Rightarrow P(B/A) = P(B)$

ఉదా (33) : ఒక పాచికను దొర్లించే ప్రయోగంలో సరిసంఖ్య వచ్చినదని చెబితే, 6 రావడానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

<u>జవాబు</u> : A : సరి సంఖ్య రావడం

A: {2,4,6}

B= ఆరు రావడం

B= {6}

$P\{B\} = 1/6$

సరి సంఖ్య వచ్చినదని చెబితే శాంపుల్ ఆవరణంలో కేవలం మూడు ప్రాథమిక ఘటనలే వుంటాయి. అందులో 6 రావడం అనే ప్రాథమిక ఘటన B సంభవించడానికి అనుకూలంగా వుంటుంది.

$P(B/A) = 1/3 \therefore P(B) \neq P(B/A)$

19.8 సంభావ్యతా గుణకార సిద్ధాంతము (Multiplication Theorem of Probability)

A,A∩B లు ఘటనలయి వాటి సంభావ్యతలు వరుసగా $P(A), P(A \cap B)$ లు అయితే

$P(A \cap B) = P(B/A) . P(A)$

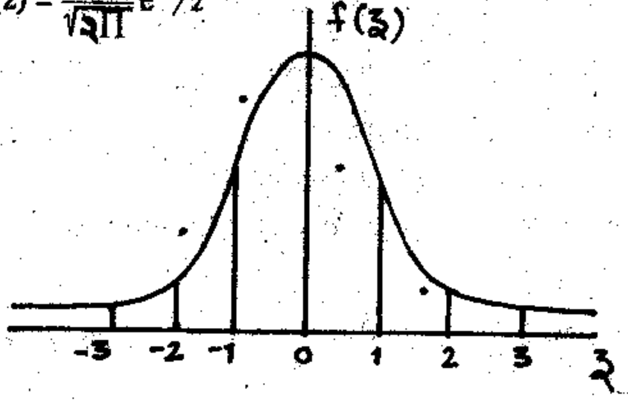
$= P(A/B). P(B)$

f(x) మరియు x – అక్షములచే పరిబద్ధమైన ప్రదేశము (area) ఒకటి అవుతుంది.

$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ గా తీసుకొంటే, Z యొక్క విభాజనాన్ని ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనం అని పిలుస్తాం (standard normal disribution).

Z యొక్క విభాజనం యొక్క గణిత స్వరూపం

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-3^2/2}$



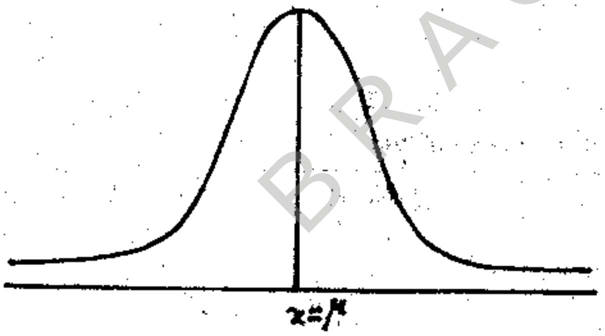
$P[-1 \leq X \leq 1] = 0.6827$

$P[-2 \leq X \leq 2] = 0.9545$

$P[-3 \leq X \leq 3] = 0.9973$

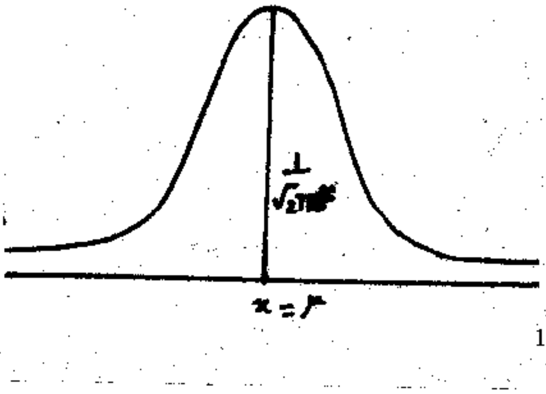
20.6.1 సామాన్య విభాజనం యొక్క ధర్మాలు

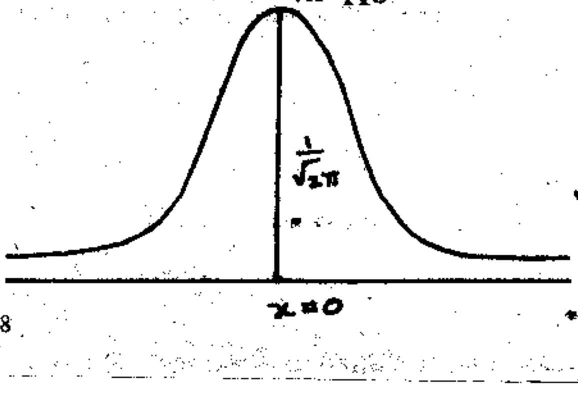
1. సామాన్య వక్రము $x = \mu$ అనే సరళరేఖ చుట్టూ సౌష్ఠవంగా ఉంటుంది.



2. x – అక్షము సామాన్య వక్రానికి అనంత స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

3. ప్రామాణిక సామాన్య వక్రానికి $\sqrt{x\,\Pi}$ అత్యంత ఉన్నత ద్వితీయ నిరూపకము అవుతుంది. సామాన్య విభాజనము యొక్క విస్తృతి ' ఒకటి ' కాకపోతే అట్టి ద్వితీయ నిరూపకము $\frac{1}{\sqrt{x}\,\Pi\sigma}$ అవుతుంది.





BRAOU

(i) అంక మధ్యమము : λ

(ii) విస్తృతి : λ

(iii) ఘాతికలపై ఆధారపడిన అసౌష్ఠవతా గుణకము: $\lambda^{\frac{1}{2}}$ అవుతాయి.

అంక మధ్యమము, విస్తృతులు సమానమయ్యే ఒక విభాజనం పాయిసన్ విభాజనం. పాయిసన్ విభాజనాన్ని అరుదుగా సంభవించే ఘటనల విభాజనం అంటారు. ఒక అరుదైన ఘటన ఒక చోటగాని, ఒక కాల పరిమితిలో గాని x సార్లు సంభవించడానికి సంభావ్యతను $P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ గా వ్రాస్తాము.

ఒక సంవత్సరంలో ఒక చికిత్సాలయంలో పుట్టిన కవలల సంఖ్యను X తో సూచిస్తే అది పాయిసన్ విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది. ఒక దినం ఒక యంత్రంపై తయారైన వస్తువులలో లోపాలను గలిగిన వస్తువుల సంఖ్య పాయిసన్ యాదృచ్ఛిక చలరాశి కావచ్చు. ఒక వ్యాధి వలన ఒక ప్రదేశంలో మృతుల సంఖ్య పాయిసన్ విభాజనాన్ని కలిగి ఉండవచ్చు.

ఉదా 11 : $P(X=1) = P(X=2)$ అయ్యేటట్లు X ఒక యాదృచ్ఛిక పాయిసన్ చలరాశి అయితే, X యొక్క అంకమధ్యమం మరియు విస్తృతులను కనుక్కోండి.

$P(X=1) = e^{-\lambda}\lambda$

$P(X=2) = e^{-\lambda}\lambda^{2}$

$P(X=1) = P(X=2)$ కాబట్టి

$$e^{-\lambda}\lambda = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2}$$

$$1 = \frac{\lambda}{2}$$

అంకమధ్యమం = విస్తృతి =2.

20.6 సామాన్య విభాజనం (Normal Disribution)

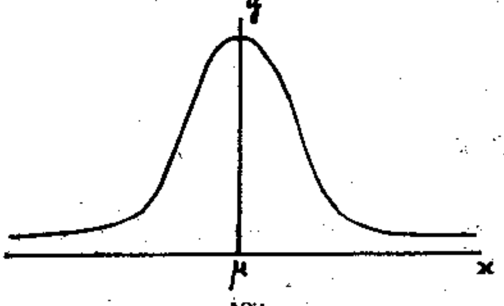
అవిచ్ఛిన్న సంభావ్యతా ప్రమేయాలలో అతిముఖ్యమైనది సామాన్య విభాజనం. దీని గణిత స్వరూపం క్రింది విధంగా వుంటుంది.

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} \qquad (20.6.1)$$

μ = అంకమధ్యమం : σ^2 = విస్తృతి

$\Pi = 3.14159....$; $e = 2.71828 ....$

సామాన్య విభాజనం యొక్క రేఖాచిత్ర స్వరూపం క్రింది చిత్రపటంలో ఇవ్వబడినది.



ఉదా 9 : నలుగురు చిన్న పిల్లలున్న కుటుంబంలో కనీసం ఒక మగపిల్లవాడు వుండడానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

$n = 4$

X = మగ పిల్లల సంఖ్య

మగపిల్లవాడు పుడితే సఫలము అనుకొందాము.

$P(S) = \frac{1}{2}$

సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటనః $X \geq 1$.

$P[X \geq 1] = P[X=1] + P[X=2] + P[X=3] + p[X=4]$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

ఉదా 10 : ఒక యంత్రముతో తయారు చేయబడిన బోల్టులలో 20% నాణ్యత లోపించబడి ఉండే, 4 బోల్టులను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే అందులో ఖచ్చితంగా ఒక నాణ్యత లోపించిన బోల్టు ఉండడానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.

$n = 4$

X = నాణ్యత లోపించిన బోల్టుల సంఖ్య

బోల్టు నాణ్యత లోపించి ఉండడానికి సంభావ్యత : 0.2=P

సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటన : X =1

$P[X=1] = [1\ ^4]\,(0.2)^1\,(0.8)^{4-1}$

$= 4 \times 0.2 \times (0.8)^3 = 0.4096.$

BRAOU

20.5 పాయిసన్ విభాజనం (Poisson Distribution)

ఈ విభాజనం సైమన్ డెనిస్ పాయిసన్ (1781-1848) అనే ఫ్రెంచి శాస్త్రవేత్తచే కనుగొనబడినది. దీనిని ద్విపద విభాజనం యొక్క అవధిగా భావించవచ్చు. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క ప్రయత్నాలను అనంతంగా కొనసాగిస్తూ ప్రతి ప్రయత్నంలో సఫలతను పొందుటకు సంభావ్యత స్థిరంగా ఉంటూ స్వల్పమైతే $np(=\lambda)$ విలువ పరిమితమైతే పాయిసన్ విభాజనాన్ని ద్విపద విభాజనం యొక్క అవధిగా రాబట్టవచ్చు. పాయిసన్ విభాజనాన్ని క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$P[X=x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ x = 0, 1, 2. \ldots$$

$\lambda > 0,$

$e = 2.71828\ldots,$

పాయిసన్ విభాజనం యొక్క ధర్మాలు :

పాయిసన్ విభాజనం యొక్క

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

ద్విపద విభాజనం యొక్క ధర్మాలు :

(i) ద్విపద విభాజనం యొక్క అంక మధ్యమం : np

(ii) విస్తృతి : n p q.

(iii)ఘాతికలపై ఆధారపడిన అసౌష్ఠవతా గుణకము :

$$r_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}.$$

$q > p \Rightarrow p < \frac{1}{2}$ అయినప్పుడు ద్విపద విభాజనం ధనాత్మక అసౌష్ఠవతను కలిగి ఉంటుంది.

$q < p \Rightarrow p > \frac{1}{2}$ అయినప్పుడు ద్విపద విభాజనం ఋణాత్మక అసౌష్ఠవతను కలిగి ఉంటుంది.

$q = p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ అయితే ద్విపద విభాజనం సౌష్ఠవంగా ఉంటుంది.

(iv) $n\,p\,q < np$ కాబట్టి, ద్విపద విభాజనం యొక్క విస్తృతి దాని అంకమధ్యమం కంటె తక్కువగా ఉంటుంది.

ఉదా 8 : ఒక సౌష్ఠవమైన పాచికను ఐదుసార్లు విసిరితే 3 రెండుసార్లు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

n=5

X = 3 ల సంఖ్య

X = 0,1,2,3,4,5

3 వస్తే సఫలం (S)

$P(S) = \frac{1}{6}$

సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటన : $\{X = 2\}$

$$P[X=2] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{6-2}$$

$$= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$= 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216} = \frac{625}{3888}.$$

BRAOU

లేక $P[X=x] = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$, x=0, 1, 2, ..., n.

లేక $P[X=x] = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$, x=0, 1, 2, ..., n .

$q = 1 - p$

$$\sum_{x=0}^{n} P[X=x] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} = 1 \text{ . (*)}$$

ఉదా 6 : ఒక సౌష్ఠవ నాణెమును 6 సార్లు ఎగురవేస్తే ఖచ్చితముగా 2 బొమ్మలు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

X : బొమ్మల సంఖ్య

$n = 6$

బొమ్మ వస్తే సఫలము అనుకొంటే,

$$P(H) = \frac{1}{2} = p$$

$$P[X = x] = \binom{6}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$$

సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటన : { X = 2}

$$P[X = 2] = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}$$

$$= \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!} \frac{1}{2^{6}} = 15/64$$

ఉదా 7 : పై సమస్యకు కనీసం 4 బొమ్మలు వచ్చుటకు సంభావ్యత కనుగొనండి.

$$P[X \geq 4] = P[X = 4] + P[X=5] + P[X=6]$$

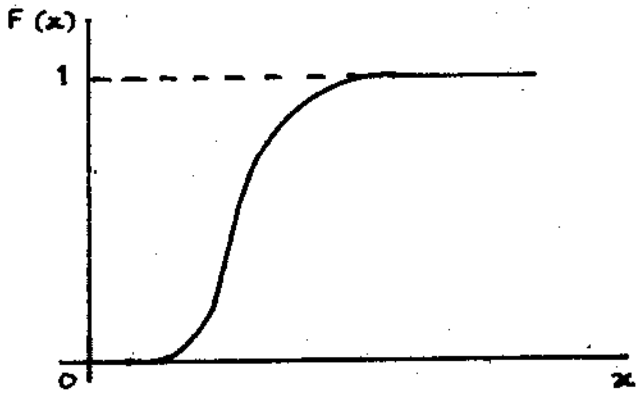
$$= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{6} + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{6} + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

B R A O U

---

* సఫలముల సంఖ్య X , 0,1, ..., n విలువలను తీసుకొనవచ్చు. వాటి సంభావ్యతలు వరుసగా $q^{n}, \binom{n}{1} p q^{n-1}, \binom{n}{2} p^{2} q^{n-2} \ldots \binom{n}{n-1} p^{n-1} q, p^{n}$ అవుతాయి. ఈ సఫలముల సంఖ్య యొక్క సంభావ్యతా ప్రయోజనమును ద్విపద విభాజనము అంటారు. అందుకు కారణం, వివిధ సఫలముల సంఖ్య సంభావ్యతలు $(q+p)^{n}$ యొక్క ద్విపద విపులీకరణ లోని వివిధ పదములు కావడమే.

X యొక్క విభాజనా ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమయితే అది క్రింది విధంగా వుంటుంది.



పటం - 20.4 X యొక్క అవిచ్ఛిన్న విభాజనా ప్రమేయం

విభాజన ప్రమేయం యొక్క ధర్మాలు :

1. X యొక్క వ్యాప్తి $a \leq X \leq b$ అయితే

$F(a) = 0$, $F(b) = 1$ అవుతాయి.

2. F(x) ఏక దిష్టావరోహణ క్రమము కాని ప్రమేయం (Monotonically now - decreasing function)

3. F(x) కుడివైపు నుండి అవిచ్ఛిన్నంగా (Right continuous) ఉంటుంది.

20.4 ద్విపద విభాజనం (Binomial Disribution)

ద్విపద విభాజనం 18వ శతాబ్దంలో జేకబ్ బెర్నవులీ అనే గణిత శాస్త్ర వేత్తచే కనుగొనబడినది. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో ఒక ఘటన జరిగితే అది సఫలమని (Success) S తో సూచిస్తూ, ఆ ఘటన జరగకపోతే విఫలమని (Failure) F తో సూచిస్తూ, $P(S) = p$, $P(F) = 1-p$ గా వ్రాస్తాము. పై ప్రయోగాన్ని స్వతంత్రంగా n సార్లు నిర్వహిస్తే x ప్రయత్నాలు సఫలము, n-x ప్రయత్నాలు విఫలము అయితే మనకు x, S- అక్షరాలు ; n-x, F- అక్షరాలు వస్తాయి. అప్పుడు x,S- అక్షరాలు ; n-x, F అక్షరాలు వచ్చుటకు సంభావ్యత $P^{x}(1-p)^{n-x}$ అవుతుంది. n అక్షరాలలో x ఒక రకం, n-x వేరొక రకం అయినప్పుడు వాటి నుండి ఉత్పన్నమయ్యే వివిధ ప్రస్తారాల సంఖ్య

$$\frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$ అవుతుంది.

X= సఫలముల సంఖ్యను ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశిగా పరిగణిస్తే, X= x అనే ఘటన $\frac{n!}{x!.(n-x)!}$ రకాలుగా సంభవిస్తుంది. ఈ ఘటనలన్నీ పరస్పర వివర్జితాలు, సమసంభవాలు కాబట్టి,

n ప్రయత్నాలలో, x సఫలముల సంభావ్యత :

$$P[X=x] = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^{x}(1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n.$$

BRAOU

$x = 0$ అయితే $y = \frac{1}{2}$ అవుతుంది.

$x = 4$ అయితే $y = \frac{1}{2} - 4a$ అవుతుంది.

OABC సమలంబ చతుర్భుజము కాబట్టి దాని వైశాల్యము :

$\frac{1}{2}(OC)(OA + BC) = \frac{1}{2}(4)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4a\right) = 2(1 - 4a)$

చుక్కలలో చూపబడిన ప్రదేశము ఒకటి కాబట్టి, $2(1-4a) = 1$ అవుతుంది.

$2-8a = 1$; $8a = 2-1$; $a = 1/8$.

20.3 విభాజనా ప్రమేయము (Distribution Function)

X ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, దాని విభాజనా ప్రమేయాన్ని, $F(x) = P[X \le x]$ గా నిర్వచిస్తాము.

X విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి ఐతే F(x) సోపాన ప్రమేయము (step Function) అవుతుంది. X అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి ఐతే దాని విభాజనా ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అవుతుంది.

ఉదా 5 : ఒక నిష్పాక్షికమైన పాచికను విసిరే ప్రయోగంలో, X పాచిక పై వచ్చు బిందువుల సంఖ్య ఐతే, X యొక్క విభాజనా ప్రమేయం యొక్క రేఖా చిత్రపటాన్ని గీయండి.

x :	1	2	3	4	5	6
P[X = x] :	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$P[X < 1] = 0$

$P[X < 1] = P[X < 1] + P[X = 1] = \frac{1}{6}$

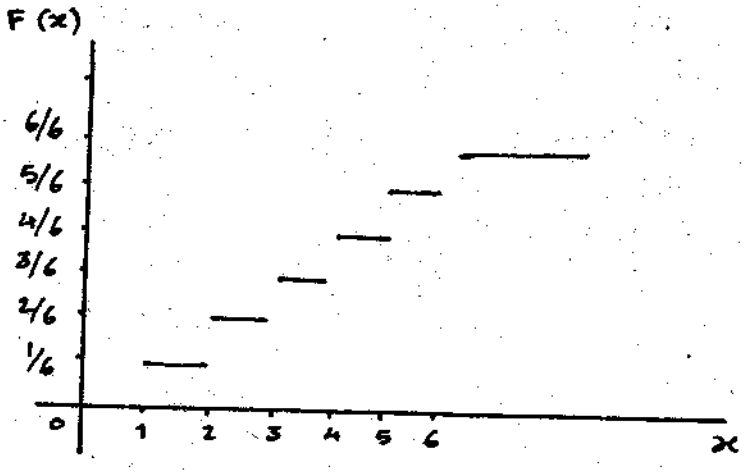
$P[X < 2] = P[X < 1] + P[X = 1] = P[1 < X < 2] = \frac{1}{6}$

$P[X \le 2] = P[X \le 1] + p[1 < X < 2] + P[X=2] = \frac{1}{6} + 0 + 1/6 = 2/6$

$P[X \le 3] = 3/6$

$P[X \le 4] = 4/6$

$P[X \le 5] = 5/6$



పటం - 20.3 X యొక్క విభాజనా ప్రమేయం

BRAOU

ఉదా 3 : రెండు నాణేలను ఎగురవేసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపుల్ ఆవరణం

$\Omega = \{ (HT), (TH), (HH), (TT) \}$

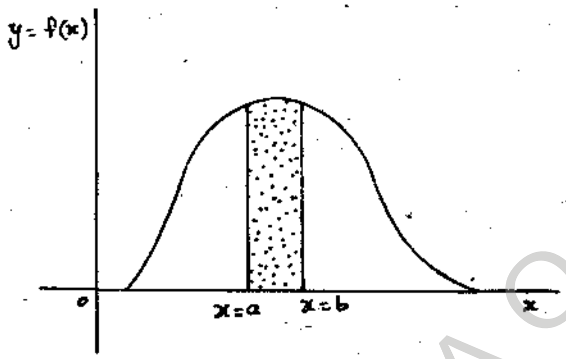
X = బొమ్మల సంఖ్య

X యొక్క విభాజనం క్రింద ఇవ్వబడినది.

X :	0	1	2
P (X = x) :	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

20.2.2 అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి (Continuous Random Variable)

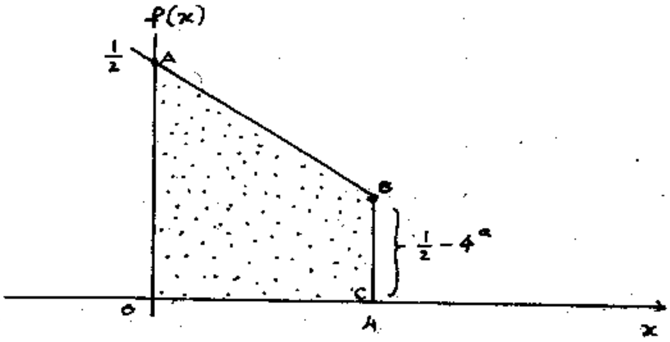
X అనే చలరాశి ఒక అవిచ్ఛిన్న సమితిలోని విలువలన్నింటినీ తీసుకొంటుంది అని అనుకొందాము. ఒక ప్రతిరూపము యొక్క సాపేక్ష పౌన:పున్య క్రమభుజి, ప్రతిరూపము లోకానికి అభిసరణ చెందితే, ఒక అవిచ్ఛిన్న వక్రమవుతుంది. అట్టి అవిచ్ఛిన్న వక్రము యొక్క గణిత స్వరూపాన్ని $y = f(x)$ గా వ్రాస్తాము.



$y=f(x)$ అనే వక్రము మరియు x అక్షములచే పరిబద్ధమైన ప్రదేశము (area) యొక్క విలువ ' ఒకటి' అవుతుంది. చుక్కలలో చూపబడిన ప్రదేశాన్ని $P(a \le X \le b)$ గా వ్రాస్తాము. $y = f(x)$ ను సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం, X ను అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటాము.

ఉదా 4 : X అనే అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి 0 మరియు 4కు మధ్యగల అన్ని విలువలను తీసుకొంటూ, $f(x) = \frac{1}{2} - ax$ అనే సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయాన్ని కలిగి వుంటే, a యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

$y = f(x) = \frac{1}{2} - ax$ ఒక సరళరేఖ అవుతుంది. X యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం క్రింద ఇవ్వబడినది.



B R A O U

20.1 పరిచయము

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన శాంపుల్ ఆవరణం Ω తో సూచిస్తే , అది ఒక అరూప సమితి అవుతుంది. యాదృచ్ఛిక చలరాశిపై అరూప సమితిని వాస్తవ సంఖ్యల సమితిలోనికి ప్రతిసర్జనము చేస్తుంది. యాదృచ్ఛిక చలరాశులు రెండు రకాలు. (ఎ) విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి, (బి) అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి. ప్రతి యాదృచ్ఛిక చలరాశి ఒక విభాజనా ప్రమేయాన్ని కలిగి వుంటుంది. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి విభాజనా ప్రమేయం కుడి నుండి అవిచ్ఛిన్నంగా ఉంటే, అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి విభాజనా ప్రమేయం కుడి ఎడమల నుండి అవిచ్ఛిన్నంగా ఉంటుంది. విచ్ఛిన్న విభాజనాలలో అతి ముఖ్యమైనవి ద్విపద మరియు పాయిసన్ విభాజనాలు. అవిచ్ఛిన్న విభాజనాలలో అత్యంత ప్రాముఖ్యతను కల్గిన విభాజనం సామాన్య విభాజనముగా గమనిస్తాము. ఈ విభాజనాలను వివరంగా తెలుసుకొందాం.

20.2 యాదృచ్ఛిక చలరాశులు - వాటి విభాజనాలు

20.2.1 విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి (Discrete Random Variable)

X అనే చలరాశి $x_1, x_2, \ldots, x_n$ అనే విలువలను వరుసగా $P_1, P_2, \ldots, P_n$ అనే సంభావ్యతలతో $P_1 + P_2 + \ldots + P_K = 1$ అయ్యేటట్లు తీసుకొంటే, X ను విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి అని, X యొక్క విభాజనాన్ని విచ్ఛిన్న విభాజనం అని $P(x = x_i) = p_i$ ని సంభావ్యతా ప్రమేయమనీ అంటాము.

ఉదా 1 : రెండు సౌష్ఠవమైన పాచికలను విసిరితే, వాటి మీది చుక్కల మొత్తాన్ని X తో సూచిస్తే, మనకు క్రింది విచ్ఛిన్న విభాజనం ఉత్పన్నమవుతుంది.

x :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X= x) :	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

ఉదా 2 : ముగ్గురు చిన్నపిల్లలున్న కుటుంబంలో X మగపిల్లల సంఖ్య అయినట్లయితే, మగపిల్లవాడు కల్గుటకు గాని, ఆడపిల్ల కల్గుటకుగాని సంభావ్యత సమానమైతే X యొక్క విభాజనం క్రింది విధంగా వుంటుంది.

x :	0	1	2	3
	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$P(X=0) = P(GGG) = P(G) . P(G). P(G) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P[\{GGB\} \cup \{GBG\} \cup \{BGG\}]$

$= P(GGB) + P(GBG) + P(BGG)$

$= 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$

$P(X = 2) = P[\{GBB\} \cup \{BGB\} \cup \{BBG\}] = 3/8$

$P(X=3) = P(BBB) = 1/8$

ఇక్కడ G : ఆడపిల్ల, B : మగపిల్లలను సూచిస్తాయి.

భాగం-20 : సంభావ్యతా విభాజనాలు : ద్విపద, పాయిసన్, సామాన్య విభాజనాలు

విషయక్రమం

20.0 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

20.1 పరిచయం

20.2 యాదృచ్ఛిక చలరాశులు - వాటి విభాజనాలు

20.3 విభాజనా ప్రమేయము

20.4 ద్విపద విభాజనం

20.5 పాయిసన్ విభాజనం

20.6 సామాన్య విభాజనం

20.7 ద్విపద మరియు పాయిసన్ విభాజనాల మధ్య సంబంధం

20.8 సారాంశం

20.9 అవగాహన ప్రశ్నలు

20.10 సంప్రదింపు గ్రంధాలు

20.11 భావనలు

20.12 పదకోశం

20.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

20.0 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

యాదృచ్ఛిక చలరాశులు, వాటి విభాజనా ప్రమేయాలను చర్చించడం ఈ భాగం యొక్క ఉద్దేశాలలో ఒకటి. విచ్ఛిన్న విభాజనాలలో అతిముఖ్యమైన ద్విపద విభాజనంను, మరియు పాయిసన్ విభాజనాలను, అవిచ్ఛిన్న విభాజనాలలో ఎంతో ప్రాముఖ్యతను కల్గిన సామాన్య విభాజనాన్ని వివరించడం మరో ఉద్దేశం.

ఈ భాగాన్ని చదివిన తరువాత మీరు :

- విచ్ఛిన్న మరియు అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశుల మధ్య భేదాన్ని గుర్తించగలగాలి.
- యాదృచ్ఛిక చలరాశి విభాజనా ప్రమేయం దాని ధర్మాలను గూర్చిన అవగాహన కలిగి యుండాలి.
- ద్విపద విభాజనం అనగా నేమిటో, అది ఎలా ఉద్భవిస్తుందో తెలుసుకొని యుండాలి.
- పాయిసన్ విభాజనం గణిత స్వరూపాన్ని, ధర్మాలను ద్విపద విభాజనంతో దానికిగల సంబంధాన్ని తెలుసుకొని ఉండాలి.
- సామాన్య విభాజనం, దాని ధర్మాలు, ఉపయోగాలు, దాని వైశాల్య పట్టికలను గూర్చిన చక్కని అవగాహన కలిగి వుండాలి.

BRAOU

5. బేయిస్ సిద్ధాంతమనగా నేమి ? దాని ఉపయోగాలను తెలపండి ?

6. మూడు పాచికలను విసిరితే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి శాంపుల్ ఆవరణము వ్రాయండి.

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ అని నిరూపించండి.

8. సంభావ్యతా స్వీకృతాలను పేర్కొనండి.

9. $P(A) = 1/3$, $P(B) = 3/4$, $P(A \cup B) = 11/12$ అయితే $P(A/B)$ మరియు $P(B/A)$ లను కనుక్కోండి.

10. కింద ఇవ్వబడిన సమాచారము సరియగునది అవునోకాదో తర్కించండి.

$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.7$

$P(A \cap B) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.2$, $P(A \cap C)$ 0.4

11. ఆరు పాచికలను ఒకసారిగా విసిరినారు. ఒక్కొక్క పాచిక మీద ఒకటి నుండి ఆరులోని ఒక్కొక్క సంఖ్య వచ్చేటందుకు సంభావ్యత కనుక్కోండి.

12. A,B,Cలు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలైతే క్రింది వివరాలు ఎందుకు తప్పో వివరించండి:

(i) $P(A) = 0.24$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.2$

(ii) $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.61$

(iii) $P(A) = 0.6$, $P(A \cap B^C) = 0.5$

$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.6$ అయితే A మరియు B లు స్వతంత్ర ఘటనలు అవునో కాదో పరీక్షించండి.

ఇవ్వబడిన వివరాల నుండి A మరియు B లు

(i) స్వతంత్ర ఘటనలు (ii) పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు

(iii) అస్వతంత్ర మరియు పరస్పర వివర్జితాలు కాని ఘటనలు అవునో కాదో పరీక్షించండి.

(a) $P(A \cap B) = 0$

b) $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A) = 0.45$

(c) $P(A \cup B) = 0.85$, $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$

(d) $P(A \cup B) = 0.70$, $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$

(c) $P(A \cup B) = 0.90$, $P(A/B) = 0.8$, $P(B) = 0.5$

- ఆచార్య పి. సుబ్బరామిరెడ్డి

19.13 భావనలు (Explanation of Concepts)

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం : ప్రయోగ ఫలితాన్ని ఖచ్చితంగా ఊహించలేని ప్రయోగం.

శాంపుల్ ఆవరణము : యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ప్రాథమిక ఘటనల సమితి.

ప్రాథమిక ఘటన : కొన్ని ఘటనల సమ్మేళనంగా వ్రాయలేనట్లుండే ఘటన.

19.14 పదకోశం

1.	Probability	-	సంభ్యావత
2.	Random experiment	-	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం
3.	Event	-	ఘటన
4.	Elementary event	-	ప్రాథమిక ఘటన
5.	Equally likely events	-	సమ సంభవ ఘటనలు
6.	Mutually exclusive events	-	పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు
7.	Permutations	-	ప్రస్తారాలు
8.	Combinations	-	సంయోగాలు
9.	Relaive frequency	-	సాపేక్ష పౌన : పున్యము
10.	Addition theorem	-	సంకలన సిద్ధాంతము
11.	Conditional probability	-	నియత సంభావ్యత
12.	Multiplication theorem	-	గుణకార సిద్ధాంతము

19.15 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

క్రింది ప్రశ్నలకు వివరముగా జవాబులిమ్ము

1. సంభావ్యత యొక్క వివిధ నిర్వచనాలను సోదాహరణముగా యిచ్చి వాటి సలక్షణాలను, అవలక్షణాలను వివరించండి.
2. సంభావ్యతా సంకలన సిద్ధాంతమనగానేమి ? దాని ఉపయోగాలను తెలపండి.
3. నియత సంభావ్యత అనగానేమి ? దాని గణనకు సంభావ్యత గుణకార సిద్ధాంతమెలా ఉపయోగ పడుతుంది.
4. పరస్పర వర్జిత ఘటనలు, స్వతంత్ర ఘటనలు, అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనలను నిర్వచించి వివరించండి.

19.10 సారాంశం

సంభావ్యత అంటే ఏమిటో, దానిని గణించడమెలాగో పైన చెప్పబడింది. ఘటనల సంభావ్యతల గణనను సులభతరం చేసే సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము, సంభావ్యత గుణకార సిద్ధాంతము, బేయిస్ సిద్ధాంతాలు సోదాహరణంగా వివరించబడినవి. సంయోగాలు, ప్రస్తారాలకు చెందిన కీలకమైన (సంభావ్యతలను గణించడానికి) సూత్రాలను యివ్వడమే కాకుండా వాటిని ఉపయోగించడంపైన ఉదాహరణలతో కూడిన వివరణ యివ్వబడినది. పెక్కు సమస్యలు సాధించబడి వున్నాయి.

19.11 అవగాహన ప్రశ్నలు

1. బాగుగా కలుపబడిన పేకముక్కల దస్తా నుండి వరుసగా రెండు ముక్కలు యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొనబడినవి. మొదట తీసిన ముక్కను తిరిగి పేక దస్తాలో వుంచితే రెండు రాణులు వచ్చుటకు సంభావ్యత గణించండి.

   జవాబు : 1/169.

2. ఒక సంచిలో 6 ఎరుపు మరియు 9 నలుపు బంతులున్నవి. ఒక్కొక్కసారి 4 బంతుల లెక్కన రెండుసార్లు బంతులు తీయబడినవి. మొదటి సారి తీయబడిన నాలుగు బంతులను తిరిగి సంచిలో వుంచకుండా, తిరిగి 4 బంతులను తీసినారు. మొదటిసారి 4 ఎరుపు రెండవసారి 4 నలుపు బంతులు వచ్చుటకు సంభావ్యత కనుక్కోండి. జవాబు : 42/10010

3. 1 నుండి 40 వరకు అంకెలున్న చీటీలలో నుండి ఒకటి యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొనబడింది. ఆ సంఖ్య రెండు యొక్క గాని, 5 యొక్క గాని గుణిజమయ్యేందుకు సంభావ్యతను కనుగొనండి.జవాబు : 3/5

4. ఒక పుస్తకంలోని సమస్యలలో 90 % వాటిని A అను వ్యక్తి సాధించగలడు. B అనువ్యక్తి కేవలం 70% సమస్యలనే సాధించగలడు. ఆ పుస్తకం నుండి ఒక సమస్యను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొంటే అది ఇద్దరిలో కనీసం ఒక వ్యక్తిచే సాధించబడడానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి. జవాబు : 0.97

5. ఒక సంచిలో 2 వెండి మరియు 4 రాగి నాణెములున్నవి. మరియొక సంచిలో 4 వెండి, 3 రాగి నాణెములున్నవి. రెండు సంచులలో ఒకదాని నుండి ఒక నాణెము యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినది. అది వెండి నాణెము అగుటకు సంభావ్యతను గణించండి. జవాబు : 19/42

19.12 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. Murray R. Spiegel, " Statistics " Schaum's Outline Series, Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1972.

2. P.S. Grewal " Methods of Statistical Analysis ", Sterling Publishers Private Limited, New Delhi, 1990.

3. S.C. Gupta, V.K. Kapoor, " Fundamentals of Mathematical Statistics " Sultan Chand and Sons , New Delhi. 1983

BRAOU

$$P(E_1 | A) = \frac{1/15}{\frac{1}{15}+\frac{1}{9}+\frac{2}{33}} = \frac{1/15}{\frac{33+55+30}{495}} = \frac{1}{15} x \frac{495}{118} = \frac{33}{118}$$

ఉదా (41) : ఒక కర్మాగారంలో తయారు చేయబడే బోల్టులలో వరుసగా 25% , 35% , మరియు 40% బోల్టులను A,B,C అనే యంత్రాలనుపయోగించి తయారుచేస్తారు. వాటిలో వరుసగా 5%, 4% , 2% బోల్టులు నాణ్యత లోపించి ఉంటాయి. ఒక బోల్టును యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొంటే అది నాణ్యత లోపించి ఉన్నది. అది A అనే యంత్రం ద్వారా తయారయి ఉండడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

E_1 : బోల్టు మొదటి యంత్రం ద్వారా తయారు చేయబడి ఉండడం

E_2 : బోల్టు రెండవ యంత్రం ద్వారా తయారు చేయబడి ఉండడం

E_3 : బోల్టు మూడవ యంత్రం ద్వారా తయారు చేయబడి ఉండడం

$$P(E_1) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_2) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$P(E_3) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

E : (యాదృచ్ఛికంగా తీసుకోబడిన) బోల్టు నాణ్యత లేకుండా ఉండడం. సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటన : E_1 / E

$$P(E/E_1) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$P(E/E_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$P(E/E_3) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{3} P(E/E_i) \, . \, P(E_i) = \frac{1}{4} \text{ x } 0.05 + \frac{2}{5} \text{ x } 0.04 + \frac{1}{5} \text{ x } 0.02$$

$$P(E_1) . P(E/E_1) = \frac{1}{4} \text{ x } 0.05$$

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1) \, . \, P(E/E_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(E/Ei) \, P(E_1)} = \frac{\frac{1}{4} \text{ x } 0.05}{\frac{1}{4} \text{ x } 0.05 + \frac{2}{5} \text{ x } 0.04 \text{ x } \frac{1}{5} \text{ x } 0.02}$$

$$= \frac{125}{345} = \frac{25}{69}$$

B R A O U

$$P(E_i | A) = \frac{P(E_i) P(A | E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A | E_i)}$$

గమనిక : $P(E_i)$ లు ఇవ్వబడినప్పుడు, A అనే Ei కి చెందిన ఘటన జరిగినప్పుడు Ei అనే ఘటనల సంభావ్యతను తిరిగి అంచనా వేయడమే ' బేయిన్ సిద్ధాంతము '

ఉదా 40 : మొదటి పెట్టెలో 1తెలుపు, 2 నలుపు మరియు 3 ఎర్రబంతులు ; రెండవ పెట్టెలో 2 తెలుపు, 1 నలుపు మరియు ఒక ఎరుపు మూడవ పెట్టెలో 4 తెలుపు, 5 నలుపు మరియు 3 ఎర్రని బంతులున్నాయి. ఒక యాదృచ్ఛికంగా గ్రహించబడిన పెట్టె నుండి రెండు బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీసినారు. అవి ఒక తెలుపు, ఒక ఎరుపు బంతులయితే, ఆ రెండు బంతులు మొదటి పెట్టె నుండి తీయబడడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

విరూపణ : E_1 : మొదటి పెట్టె తీసుకొనబడడం

A : రెండు బంతులలో ఒక తెలుపు మరియొకటి ఎరుపు కావడం.

సంభావ్యత కనుగొనవలసిన ఘటన : E_1/A

$P(E_1) = \frac{1}{3}$

E_2 : రెండవ పెట్టె తీసుకొనబడడం.

$P(E_2) = \frac{1}{3}$

E_3 : మూడవ పెట్టె తీసుకొనబడడం

$P(E_3) = \frac{1}{3}$

$$P(A|E_1) = \frac{1_{C_1} \times 3_{C_1}}{6_{C_2}} = \frac{3}{15} = 1/5$$

$$P(A|E_2) = \frac{2_{c_1} \times 1_{c_1}}{6C_2} = 1/3$$

$$P(A|E_3) = \frac{4_{C_1} \times 3_{C_1}}{12_{C_2}} = 2/11$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(E_i) P(A|E_i) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{15} + \frac{1}{9} + \frac{2}{33}$$

$$P(E_1) . P(A/E_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

B R A O U

$$P(A) = \frac{{}^{4}C_3 \times {}^{11}C_5}{{}^{15}C_8}$$

బేయిస్ సిద్ధాంతము (Bayes' Theorem)

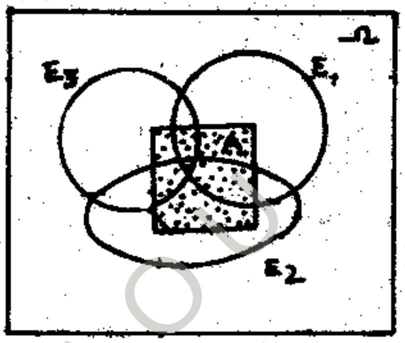
$E_1, E_2, \ldots, E_n$ లు పరస్పర వియుక్త ఘటనలు : $P(E_i) \neq 0, i = 1,2, \ldots n.$

$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ఏదేని ఒక ఘటన అయినప్పుడు, $P(A) > 0$ అయితే

$$P[E_i \mid A] = \frac{P[E_i]\, P[A \mid E_i]}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P[A \mid E_i]}$$ అని నిరూపించండి

నిరూపణ :

ముక్కలచే గుర్తించబడిన సమితిని A గా తీసుకొంటే



$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ అని తెలుస్తుంది.

$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ అని అనుకొందాము.

$$\Rightarrow A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)$$

$A \cap E_i \subset E_i, i = 1, 2, \ldots, n.$

E_i పరస్పర వియుక్త ఘటనలు కాబట్టి $A \cap E_i$ కూడా పరస్పర వియుక్త ఘటనలు అవుతాయి.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} P(A \cap E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A \mid E_i) \quad \text{________ (1)}$$

$$P(A \mid E_i) = P(A \cap E_i)\, P(E_i)$$

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E_i)\, P(A \mid E_i)}{P(A)} \quad \text{________ (2)}$$

రెండవ సమీకరణంలో ఒకటవ సమీకరణాన్ని ప్రతిక్షేపిస్తే

B R A O U

(1) మొదటి ప్రయత్నంలో తీసిన బంతులను తిరిగి సంచిలో ఉంచినపుడు

(2) మొదటి ప్రయత్నంలో తీసిన బంతులను తిరిగి సంచిలో ఉంచనపుడు

జవాబు : (i) A : మొదటి ప్రయత్నంలో నాలుగు తెల్లబంతులు రావడం

B : రెండవ ప్రయత్నంలో నాలుగు నల్లబంతులు రావడం

15 బంతుల నుండి 4 బంతులను 15_{C_4} రకాలుగా తీయవచ్చు.

$$P(A) = \frac{6_{C_4}}{15_{C_4}}$$

9 నల్లబంతుల నుండి 4 బంతులను 9_{C_4} రకాలుగా తీయవచ్చు.

$$P(B) = \frac{9_{C_4}}{15_{C_4}}$$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ($\therefore$ A,B లు స్వతంత్ర ఘటనలు కాబట్టి)

$$= \frac{6_{C_4}}{15_{C_4}} \times \frac{9_{C_4}}{15_{C_4}}$$

(ii) మొదటి ప్రయత్నంలో వచ్చిన బంతులను తిరిగి సంచిలో వేయకపోతే A,B లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

11 బంతులను నుండి నాలుగు బంతులను 11_{C_4} రకాలుగా తీయవచ్చు.

మొదటి ప్రయత్నంలో వచ్చినవి 4 తెల్లబంతులు కాబట్టి, 9 నల్ల బంతుల నుండి 4 నల్ల బంతులను 9_{C_4} రకాలుగా తీయవచ్చు.

$$P(B/A) = \frac{9_{C_4}}{11_{C_4}}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A) . P(A)$$

$$= \frac{9_{C_4}}{11_{C_4}} \times \frac{6_{C_4}}{15_{C_4}}$$

ఉదా (39) : 15 రికార్డు ప్లేయర్లలో 4 పాడై పోయినవి. ఒక్కొక్క రికార్డు ప్లేయరును యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొని పరీక్షించినారు. పరీక్షించినట్టి రికార్డు ప్లేయర్‌ను తిరిగి రికార్డు ప్లేయర్ల గుంపులో పెట్టలేదు. 9 సార్లు పరీక్షించబడిన రికార్డు ప్లేయర్లలో నాలుగు పాడైపోయినవవడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

A : మొదట పరీక్షించిన 8 రికార్డు ప్లేయర్లలో 3 పాడయిపోయి ఉండడం.

15 రికార్డు ప్లేయర్ల నుండి 8 రికార్డు ప్లేయర్లను $^{15}C_8$ రకాలుగా తీయవచ్చు.

ఘటన A కి అనుకూలంగా వుండే ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య $4_{C_3} \times 11_{C_5}$

B R A O U

A : నాలుగు బంతులలో ఒక్కోరకానికి చెందిన బంతులు కనీసం ఒకటి వుండడం.

A_1 : 2 ఎరుపు, 1 తెలుపు, 1 నలుపు బంతులు రావడం

A_2 : 1 ఎరుపు, 2 తెలుపు, 1 నలుపు బంతులు రావడం

A_3 : 1 ఎరుపు, 1 తెలుపు, 2 నలుపు బంతులు రావడం

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_1, A_2, A_3 = పరస్పర వివర్జితాలు

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

A_1 యొక్క అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య = $6c_2 \times 4c_1 \times 5c_1$

A_2 యొక్క అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య = $6c_1 \times 4c_2 \times 5c_1$

A_3 యొక్క అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య = $6c_1 \times 4c_1 \times 5c_2$

$$P(A) = \frac{6c_2 \times 4c_1 \times 5c_1}{15c_4} + \frac{6c_1 \times 4c_2 \times 5c_1}{15c_4} + \frac{6c_1 \times 4c_1 \times 5c_2}{15c_4} = 0.5275 \,.$$

ఉదా (37) : ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు వేరువేరుగా సాధించేందుకు సంభావ్యతలు 3/7, 7/12. ఆ సమస్య సాధించబడేందుకు సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : A : మొదటి విద్యార్థి సమస్యను సాధించడం

B : రెండవ విద్యార్థి సమస్యను సాధించడం

$(A \cup B)$: సమస్య సాధించబడడం

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ = సమస్య సాధించబడక పోవడం

$P(A \cup B) = 1 - P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A^C) \cdot P(B^C)$

$$= 1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{12} = 16/21 \,.$$

ఉదా 38 : ఒక సంచిలో 6 తెలుపు, 9 నలుపు బంతులున్నాయి. ఆ సంచి నుండి నాలుగు బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే మొదటి ప్రయత్నంలో అవి అన్నీ తెల్లబంతులు, రెండవ ప్రయత్నంలో అవి అన్నీ నల్లబంతులవడానికి, క్రిందివి నిజమైనపుడు, సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

B R A O U

$$= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$$

ఉదా (35) : ఒకపెట్టెలో 1,2,3,4 అంకెలు గల నాలుగు చీటీలు, వేరొకపెట్టెలో 2,4,6,7,8,9 అంకెలుగల ఆరు చీటీలు వున్నాయి. ఒక పెట్టెను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొని, ఆ పెట్టె నుడి ఒక చీటీని యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొంటే, ఆ చీటీపైన అంకె 2 గాని 4 గాని అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు :

A : మొదటి పెట్టెను తీసుకోవడం, దాని నుండి తీయబడిన చీటీలో 2 గాని 4 గాని వుండడం.

B : రెండవ పెట్టెను తీసుకొనడం, దాని నుండి 2 గాని 4గాని వున్న చీటి తీయడం

$A = A_1 \cap A_2$

A_1 : మొదటి పెట్టెను తీయడం

A_2 : మొదటి పెట్టె నుండి 2 గాని 4 గాని రావడం

$P(A) = P(A_1) . P(A_2/A_1)$

$B = B_1 \cap B_2$

B_1 = రెండవ పెట్టె తీయడం

B_2= దాని నుండి 2 గాని 4 గాని రావడం

$B = B_1 \cap B_2$

$P(B) = P(B_1) . P(B_2/B_1)$

A,B లు పరస్పర వివర్జితాలు.

$A \cup B$ = ఒక పెట్టెను, దాని నుండి ఒక చీటీని తీస్తే అది 2 గాని 4 గాని కావడం

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= P(A_1) . P(A_2/A_1) + P(B_1) . P(B_2/B_1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{12}$$

ఉదా (36) : ఒక పెట్టెలో 6 ఎరుపు , 4 తెలుపు మరియు 5 నలుపు రంగు బంతులున్నాయి. అందులో నుండి 4 బంతులను యాదృచ్ఛికంగా తీస్తే ఒక్కొక్క రంగుకు చెందిన బంతులు కనీసం ఒకటి వుండడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : మొత్తం బంతుల సంఖ్య : 15

15 బంతుల నుండి 4 బంతులను $\binom{15}{4}$ రకాలుగా తీయవచ్చు.

B R A O U

నిరూపణ : శాంపుల్ ఆవరణంలోని N ప్రాథమిక ఘటనలలో N_A, N_B ప్రాథమిక ఘటనలు వరుసగా A,Bల సంభవానికి అనుకూలంగా వున్నాయనుకొందాము. $N_{A\cap B}$ ప్రాథమిక ఘటనలు A మరియు B లు ఏకకాలంలో సంభవించేందుకు అనుకూలంగా ఉన్నాయనుకొందాము.

$$P(A) = \frac{N_A}{N};\ P(B) = \frac{N_B}{N};\ P(A\cap B) = \frac{N_{A\cap B}}{N}$$

B జరిగినప్పుడు A సంభవించడంను గురించి మనం చెప్పుకొనవలసివస్తే, శాంపుల్ ఆవరణంలోని ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య కేవలం N_B అనుకొందాము. అప్పుడు A సంభవించడానికి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $N_{A\cap B}$ అవుతుంది.

$$P(A/B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B}$$

$$P(A\cap B) = \frac{N_{A\cap B}}{N} = \frac{N_{A\cap B}}{N_B}.\frac{N_B}{N} = P(A/B).P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A/B).P(B)$$

అదేవిధంగా మనకు

$$P(B/A) = \frac{N_{A\cap B}}{N_B}$$ అవుతుంది.

$$P(A\cap B) = \frac{N_{A\cap B}}{N} = \frac{N_{A\cap B}}{N_A}.\frac{N_A}{N} = P(B/A).P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(B/A).P(B)$$

ఉదా (34) : రెండు పాచికలను విసిరితే వచ్చిన అంకెల మొత్తం 8 కంటే ఎక్కువ వుండేందుకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు : అంకెల మొత్తము S అనుకంటే

A (అంకెల మొత్తం 8 కంటె ఎక్కువ రావడం) అనే ఘటన సంభావించాలంటే,

S =9 గాని 10 గాని 11 గాని 12 గాని కావాలి.

S =9 సంభవించడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 4

S =10 సంభవించడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 3

S =11 సంభవించడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 2

S =12 సంభవించడానికి అనుకూల ప్రాథమిక ఘటనల సంఖ్య : 1

పై ఘటనలు పరస్పర వివర్జితాలు కాబట్టి

$$P(A) = P(S > 8) = P(S=9) + P(S=10) + P(S=11) + P(S=12)$$

B R A O U

సార్థకతా స్థాయి : $\alpha = 0.05$

సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.025} = 1.96$

$|t| > 1.96$ కాబట్టి, మనం శూన్యం ప్రాతిపదికను తిరస్కరిస్తాము.

సమస్య : 900 (= n) పరిమాణంగా గలిగిన ఒక ప్రతిరూపం యొక్క అంకమధ్యమం 5, విస్తృతి 36 అయితే, ఆ ప్రతిరూపం అంకమధ్యమం 5.3 గా గల్గిన లోకం నుండి వచ్చినదేమో పరీక్షించండి.

సాధన : $Ho : \mu = 5.3$

$H_1 : \mu \neq 5.3$

$\bar{x} = 5, \sigma = \sqrt{36} = 6$

$$t = \frac{\bar{x} - 3.2}{6/\sqrt{900}}$$

$$= \frac{5 - 5.3}{6/30} = \frac{-0.3 x 30}{6} = -1.5$$

$|t| = 1.5$

$\alpha = 0.05$ అనుకొందాము.

$t_{0.025} = 1.96$

$|t| < 1.96$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక ఆమోదించబడుతుంది.

21.7 రెండు ప్రతిరూప అంక మధ్యమాల సార్థకతా పరీక్ష

మొదటి లోకం : $f(x, \theta_1)$

రెండవ లోకం : $g(y, \theta_2)$

θ_1 మరియు θ_2 వరుసగా మొదటి, రెండవ లోకాల అంకమధ్యములు.

శూన్య ప్రాతిపదిక : $Ho : \theta_1 = \theta_2$

ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదిక : $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$

మొదటి ప్రతిరూపం : $x_1, x_2, \ldots, x_m$

రెండవ ప్రతిరూపం : $y_1, y_2, \ldots, y_n$

మొదట ప్రతిరూప అంకమధ్యమం : $\bar{x}$

(a) σ తెలుసు అనుకొందాము. అప్పుడు t విలువను గణించవచ్చు.

శూన్య ప్రాతిపదిక నిజమయినప్పుడు, బృహత్ప్రతి రూపాలలో t ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

సార్థకతా స్థాయి : α

సార్థకతా పరీక్షా ద్విపార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి, సందిగ్ధ విలువ (critical value) ను $t_{\alpha/2}$ లో సూచిస్తాము.

$|t| \leq t_{\alpha/2}$ అయినప్పుడు Ho ను అంగీకరించండి.

$|t| > t_{\alpha/2}$ అయినప్పుడు Ho ను తిరస్కరించండి.

(b) σ తెలియదు అనుకొందాము. అప్పుడు σ విలువను ప్రతిరూప క్రమ విచలనంలో అంచనా వేస్తూ దానిని β తో సూచిస్తాము.

ప్రతిరూప అంక మధ్యమం : $\overline{x}$

ప్రతిరూప క్రమ విచలనం : β

పరీక్షా సాంఖ్యకం : $t = \dfrac{\overline{x} - \theta_0}{s / \sqrt{n}}$

బృహత్ప్రతి రూపాలలో t ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

ద్విపార్శ్వ పరీక్షలో, $|t| \leq t_{\alpha/2}$ అయినప్పుడు Ho ను అంగీకరిస్తాము. $|t| > t_{\alpha/2}$ అయితే Ho ను తిరస్కరిస్తాము.

సమస్య : 900 (= n) పరిమాణంగా గలిగిన ఒక ప్రతిరూపం యొక్క అంకమధ్యమం 3.5. ఈ ప్రతిరూపం 3.2 అంక మధ్యమం, 9.0 విస్తృతిగా గలిగిన లోకం నుండి వచ్చినదో లేదో పరీక్షించండి.

సాధన : $H_0 : \mu = 3.2$

$H_1 : \mu \neq 3.2$

$\overline{x} = 3.5$

$\sigma^2 = 9.0 \Rightarrow \sigma = 3.0$

$$t = \frac{\overline{x} - 3.2}{3.0 / \sqrt{900}}$$

$$= \frac{3.5 - 3.2}{3 / 30} = 3.0$$

$|t| = 3.0$

BRAOU

సందిగ్ధ విలువలు ($Z\alpha$)	సార్థకతా స్థాయి 1%	5%	10%
ద్విపార్శ్వ పరీక్ష	$t_\alpha = 2.58$	$t_\alpha = 2.96$	$t_\alpha = 1.645$
కుడి పార్శ్వ పరీక్ష	$t_\alpha = 2.33$	$t_\alpha = 1.645$	$t_\alpha = 1.28$
ఎడమ పార్శ్వ పరీక్ష	$t_\alpha = -2.33$	$t_\alpha = -1.645$	$t_\alpha = -1.28$

21.5 సార్థకతా పరీక్ష సోపానాలు (Steps of Significance Tests)

(i) శూన్య ప్రాతిపదిక Ho ను ప్రతిపాదించడం

(ii) ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదికను (H_1) ఎంచుకోవడం

(iii) సార్థకతా స్థాయి (α) ని నిర్ధారించడం

(iv) పరీక్షా - సాంఖ్యకాన్ని

$$t = \frac{Z\text{-}E(Z)}{SE\,(Z)}$$ గణించడం

Z : ఒక సాంఖ్యకము

E(Z) = Z యొక్క అంకమధ్యమం

SE (Z) : Z యొక్క క్రమ విచలనం

(v) గణించిన t విలువను, Ho మరియు α నిర్దేశించే (t విలువ) t_α తో పోల్చి శూన్య ప్రాతిపదికను అంగీకరించడం లేక తిరస్కరించడం.

B R A O U

21.6 ఒక అంకమధ్యమం యొక్క సార్థకతా పరీక్ష

లోకం : $f(x, \theta)$

లోకం యొక్క అంకమధ్యమం : θ

Ho : $\theta = \theta_0$

H_1 : $\theta \neq \theta_0$

ప్రతిరూపం : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ($n > 30$)

ప్రతిరూప అంకమధ్యమం : $\bar{x}$ (=Z)

పరీక్షా సాంఖ్యకం : $t = \dfrac{x - \theta_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

(iv) $H_0 : P = \frac{1}{2}$

$H_1 : P = \frac{3}{5}$

21.3 సార్థకతా పరీక్షలు

$f(x,\theta)$ ఒక లోకానికి చెందిన సంభావ్యతా ప్రమేయమో లేదా సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయమో అనుకుందాము. $f(x,\theta)$ యొక్క గణిత స్వరూపం తెలిసినా దాని పరామితి θ తెలియక పోతే దానిని $f(x,\theta)$ నుండి వచ్చినది అనుకొన్న ప్రతిరూపాన్నుపయోగించి అంచనా వేస్తాము. θ ను గురించిన ఊహాత్మక విలువ θ_0 అయినప్పుడు, θ యొక్క ప్రతిరూప అంచనా మరియు $\theta = \theta_0$ ల మధ్య సార్థకమైన భేదం ఉన్నదా లేదా అని తెలుసుకొనడానికి ఉపయోగపడే పరీక్షలను సార్థకతా పరీక్షలు అంటాము. సార్థకతా పరీక్షల నుపయోగించి రెండు అంతకంటే ఎక్కువ ప్రతిరూప సాంఖ్యకాల మధ్య సార్థకతా భేదాన్ని గూడా మనం పరీక్షించవచ్చు. బృహత్ప్రతి రూపాలలో ఈ పరీక్షలు సామాన్య విభాజనం పై ఆధారపడి ఉండగా, లఘు ప్రతిరూపాలలో అవి ఖచ్చిత ప్రతిరూప విభాజనాలైన t,F మరియు కై - వర్గ విభాజనాలను ఆధారం చేసుకొని ఉంటాయి. సార్థకతా పరీక్షలను గూర్చి తెలుసుకోవాలంటే, క్రింది భావనలను గూర్చిన అవగాహన అవసరమవుతుంది.

శూన్య ప్రాతిపదిక (Null Hypothesis)

సాంఖ్యక పరికల్పన (statistical hypothesis) ఒక జనాభా (population) యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాలను గూర్చిన ప్రవచనము (statement) . పెక్కుసార్లు ఒక సాంఖ్యక పరికల్పనను తిరస్కరించుటకు ప్రతిపాదిస్తారు.

మొదటిరకం మరియు రెండవ రకం దోషాలు (Type - I and Type - II Errors)

శూన్య ప్రాతిపదిక (Ho) నిజమైనప్పుడు దానిని తిరస్కరించడం, నిజంకానప్పుడు నిజమని అంగీకరించడాన్ని మొదటి మరియు రెండవ రకం దోషాలు అంటారు. ఈ రెండు దోషాల పర్యవసానము ఒకేమాదిరి ఉండనవసరం లేదు. ఉదాహరణకి ఒక వ్యాధి వున్న వ్యక్తి తనకు ప్లేగువ్యాధి ఉన్నది అనే అనుమానంలో వైద్యుడి దగ్గరకు వెళితే, అతనికి ఆ వ్యాధి ఉన్నప్పుడు వైద్యుడా, వ్యాధి లేదని అభిప్రాయపడతూ, ఆ జబ్బుకు సంబంధించని చికిత్స చేస్తే పర్యవసానం మృతి సంభవించవచ్చు. జబ్బులేనప్పుడు వైద్యుడు ఆ జబ్బు ఉంది అని చికిత్స చేయడం వలన సమయం, ధనం ఖర్చవుతాయి. దీని పర్యవసానం మృతి కాదు.

పరికల్పనల పరీక్షలలో ప్రతిరూప పరిమాణం మారనప్పుడు, ఒక దోషాన్ని కనిష్ఠం చేసే ప్రయత్నం చేస్తే రెండో దోషం గరిష్ఠమవుతుంది. ఈ కారణంగా మొదటి రకం దోషాన్ని స్థిరీకరించి, రెండవ రకం దోషాన్ని కనిష్ఠం చేసేందుకు ప్రయత్నం చేస్తాము.

సందిగ్ధ ప్రాంతము (Critical Regions)

శాంపుల్ ఆవరణాన్ని రెండు వియుక్త సమితులుగా విభజించి, ప్రతిరూప బిందువు ఏ సమితిలో పడితే మనం శూన్య ప్రాతిపదికను తిరస్కరిస్తామో ఆ సమితిని సందిగ్ధ ప్రాంతము, రెండవ సమితిని అంగీకార ప్రాంతము (acceptance region) అంటాము.

n : ప్రతిరూప పరిమాణం

σ : లోకం యొక్క క్రమ విచలనము

P : లోకం యొక్క సహ సంబంధతా గుణకము

σi : లోకం i యొక్క క్రమ విచలనము (i = 1,2)

P : లోకపు అనుపాతము

Q : 1 - P

P_i : లోకము i కి చెందిన అనుపాతం (i = 1,2)

$Q_i = 1 - P_i$

n_i : లోకం i కి చెందిన ప్రతిరూపం యొక్క పరిమాణం (i = 1,2)

'ఒక నాణెం సొష్ఠవమైనది' కాదు అన్న అనుమానం మనకున్నది అనుకుందాము. అది సొష్ఠవమైనది అన్న పరికల్పనను మనం ప్రతిపాదిస్తాము. ఈ పరికల్పనను p = 0.5 గా కూడా మనం వ్రాసుకోవచ్చు. ఇక్కడ p బొమ్మ వచ్చుటకు సంభావ్యతగా భావిస్తాము.

ఒక జబ్బును నయం చేసే రెండు ఔషదాలాలో ఒకటి రెండవ దాని కంటె మెరుగైనది అన్న అభిప్రాయం మనకు ఉంటే, ' జబ్బును నయం చేయడంలో రెండు ఔషధాల మధ్య సార్థకతా బేధం లేదు ' అనే పరికల్పనను ప్రతిపాదిస్తాము. అట్టి పరికల్పనను ' శూన్య ప్రాతిపదికలు ' అంటాము. శూన్య ప్రాతిపదికను Ho (null hypothesis) తో సూచిస్తాము.

ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదిక (Alternative Hypothesis)

శూన్య ప్రాతిపదికతో విబేధించే ప్రాతిపదికను ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదిక అంటూ దానిని H_1 తో సూచిస్తాము.

ఉదా (i) $H_1 : P = \frac{1}{2}$

$H_1 : P \neq \frac{1}{2}$

(ii) $H_0 : P = \frac{1}{2}$

$H_1 : P > \frac{1}{2}$

(iii) $H_0 : P = \frac{1}{2}$

$H_1 : P < \frac{1}{2}$

BRAOU

ఉంటాయి. ఈ అంచనాలు నిర్దేశించే పౌన : పున్య విభాజనాన్ని , ప్రతిరూప విభాజనము అంటారు.

లోకం* : $f(x,\theta)$

పరామితి : θ

ప్రతిరూపం : $x_1, x_2, \ldots, x_n$

యొక్క అంచనాధారం : $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

క్రమ దోషము (Standard Error)

ప్రతిరూప విభాజనం యొక్క క్రమ విచలనాన్ని ' క్రమ దోషము ' అని పిలుస్తారు. క్రమ దోషాన్ని S,E తో సూచిస్తాము.

బృహత్ర్పతి రూపం (Large Sample)

ప్రతిరూప పరిమాణం (n) 30 కంటే ఎక్కువ గాని సమానంగా గాని ఉన్నప్పుడు అట్టి ప్రతిరూపాన్ని ' బృహత్ర్పతి రూపం ' అంటాము. ప్రతిరూప ప్రమేయము యొక్క ఆకారం ప్రతిరూప పరిమాణం పై ఆధారపడి ఉంటుంది. ప్రతిరూప పరిమాణం పెరిగిన కొద్దీ ప్రతిరూప ప్రమేయం రూపంలో సామాన్య విభాజనానికి దగ్గర అవుతుంది.

లఘు ప్రతిరూపం (Small Sample)

ప్రతిరూప పరిమాణం (n) 30 కంటె తక్కువగాని ఉన్నప్పుడు, ఆ ప్రతిరూపాన్ని లఘు ప్రతిరూపం అంటారు. లఘు ప్రతిరూపాల నుండి ఉత్పన్నమయ్యే ప్రతిరూప ప్రమేయాన్ని ' కచ్చిత ప్రతిరూప విభాజనము' (exact sampling distribution) అంటాము.

BRAOU

బృహత్ర్పతి రూపాలలో వివిధ సాంఖ్యకాల క్రమదోషాలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

వరుస నం.	సాంఖ్యకము	క్రమదోషము
1.	$\overline{x}$ (అంకమధ్యమం)	
2.	p (అనుపాతము)	$\sigma/\sqrt{n}$
3.	β (క్రమ విచలనము)	$\sqrt{PQ/n}$
4.	r ప్రతిరూప సహసంబంధతా గుణకము	$\sigma/\sqrt{2n}$
5.	$\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ (రెండు ప్రతిరూప అంకమధ్యమాల భేదము)	$(1 - P^2)/\sqrt{n}$
6.	$s_1 - s_2$ (రెండు ప్రతిరూప క్రమ విచలనాల భేదం)	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$p_1 - p_2$ (రెండు ప్రతిరూప అనుపాతాల భేదం)	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n_1}+\frac{\sigma_2^2}{2n_2}}$

* $f(x,\theta)$ సంభావ్యతా సాంద్రత ప్రమేయం, లేదా సంభావ్యత ప్రమేయం.

21.0 ఉద్దేశాలు

పరామితి, దాని అంచనాధారము, ప్రతిరూపము, ప్రతిరూప విభాజనము, క్రమదోషములకు అర్థాలను చెబుతూ, సార్థకతా పరీక్షలను తెలియజేయడం ఈ భాగం యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశం.

ఈ భాగమును చదివిన తరువాత మీరు :

- పరామితి, దాని అంచనాధారములనగా ఏమో గ్రహించగలగాలి.
- ప్రతిరూప విభాజనం ఎలా ఉత్పన్నవుతుందో తెలుసుకొని ఉండగలగాలి.
- పరికల్పనలను వాటి పరీక్షలలో మనం చేసే మొదటి మరియు రెండవ రకం దోషాలను గూర్చిన అవగాహన కలిగి ఉండాలి.
- సార్థకతా పరీక్ష యొక్క సోపానాలను తెలుసుకొనగలిగి ఉండాలి.

21.1 పరిచయం

ఒక సాంఖ్యకలో కొన్ని మనం $f(x,\theta)$ గా వ్రాస్తే, f గణిత స్వరూపం తెలుసు, కాని θ విలువ తెలియదు అనుకొందాము. తెలియని θ విలువలను మనం ఊహిస్తాము. ఈ ఊహ దత్తాంశము పై ఆధారపడి ఉండవచ్చును, లేకనూ పోవచ్చును. దత్తాంశము పై ఆధారపడిన అట్టి ఊహను ఒక అంచనాధారంగా గ్రహిస్తాము. ఉదాహరణకు θ లోకం యొక్క అంకమధ్యమం అయితే, దత్తాంశంపై ఆధారపడిన అంచనాధారము ప్రతిరూప అంకమధ్యమవుతుంది. ఒక లోకం నుండి పెక్కు ప్రతిరూపాలను మనం ప్రతిరూప సిద్ధాంతాలకు లోబడి గ్రహిస్తే మనకు లోకం నుండి ఎన్ని ప్రతిరూపాలు వస్తాయో అన్ని అంచనాలు వీస్తాయి. వీటి విభాజనాన్ని ప్రతిరూప విభాజనమంటాము. సార్థకతా పరీక్షలలో ప్రతిరూప విభాజనము, దాని క్రమ విచలనం పాత్రను మనం ముందు తెలుసుకొంటాము.

BRAOU

21.2 పరామితి - సాంఖ్యకము - అంచనాధారము

ఒక లోకము యొక్క స్థిర రాశులను పరామితులు అంటారు. లోకము యొక్క అంక మధ్యమము, విస్తృతి, అసౌష్ఠవతా గుణకము మొదలగునవి పరామితుల ఉదాహరణలు. పెక్కు సన్నివేశాలలో ఈ పరామితుల విలువ తెలియదు. కాబట్టి, లోకము నుండి సిద్ధాంత పరంగా గ్రహించబడిన ప్రతిరూపాల నుపయోగించి వాటి విలువలను అంచనా వేస్తాము. ఉదాహరణకు లోకము యొక్క అంక మధ్యమాన్ని ప్రతిరూప అంకమధ్యమంతోను, లోకము యొక్క విస్తృతిని ప్రతిరూప విస్తృతితోను అంచనా వేయవచ్చు. ఒక పరామితి యొక్క అంచనాధారము ప్రతిరూప విలువల ప్రమేయంగా ఉంటూ 'సాంఖ్యకము ' (Statistics) అని పిలువబడుతుంది.

ప్రతిరూప విభాజనం (Sampling Distribution)

ఒక లోకం నుండి పెక్కు ప్రతిరూపాలను గ్రహించవచ్చు. ఆ లోకం పరామితికి ఒక అంచనాధారాన్ని మనం ఎంచుకొంటే, అది ప్రతిరూప విలువల పైన ఆధారపడి ఉంటుంది. కావున, ప్రతి ప్రతిరూపము ఒక అంచనాను ఇవ్వగలుగుతుంది. ఆ లోకం నుండి ఎన్ని ప్రతిరూపాలను మనం గ్రహించగలమో, పరామితి యొక్క అన్ని అంచనాలు వస్తాయి. ఈ అంచనాలు నిర్దేశించే పౌన : పున్య విభాజనాన్ని మనం '(ప్రతిరూప విభాజనం) ' అంటాము.

ఉదా (1) : ఒక లోకంలో N విలువలు ఉంటే, దాని నుండి సరళ యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప గ్రహణ ద్వారా వచ్చే n పరిణామం గల ప్రతి రూపాల సంఖ్య N_n కు ఎక్కువ కాకుండా ఉంటాయి. ఒక్కొక్క ప్రతిరూపం, ఒక్కొక్క విలువను అంచనాధారానికి ఆపాదించగలదు. కాబట్టి, పరామితి అంచనాలు కూడా N_n కు ఎక్కువ కాకుండా

ఖండిం - 21 : సార్థకతా పరీక్షలు (Tests of Significance)

విషయక్రమం

21.0 ఉద్దేశాలు

21.1 పరిచయం

21.2 పరామితి - సాంఖ్యకము - అంచనాధారము

21.3 సార్థకతా పరీక్షలు

21.4 బృహత్ప్రతిరూపాలు - సార్థకతా పరీక్షలు

21.5 సార్థకతా పరీక్షల సోపానాలు

21.6 ఒక అంక మధ్యమం యొక్క సార్థకతా పరీక్ష

21.7 రెండు ప్రతిరూప అంక మధ్యముల సార్థకతా పరీక్ష

21.8 ప్రతిరూప అనుపాతం సార్థకతా పరీక్ష

21.9 రెండు ప్రతిరూప అనుపాతాల భేదానికి సార్థకతా పరీక్ష

21.10 రెండు క్రమ విచలనాల మధ్య సార్థకతా భేదం పరీక్షించడం

21.11 స్టూడెంటు t - విభాజనము

21.12 ఒక ప్రతిరూప అంక మధ్యమానికి సార్థకత పరీక్ష

21.13 రెండు ప్రతిరూప అంక మధ్యమాల మధ్య సార్థకత భేదానికి పరీక్ష

21.14 అంక మధ్యమాల భేదాన్ని పరీక్షించుటకు జంట t - పరీక్ష

21.15 ప్రేక్షిత ప్రతిరూప సహసంబంధతా గుణకము యొక్క సార్థకతా పరీక్ష

21.16 కై - వర్గ విభాజనము

21.17 F - విభాజనము

21.18 సమిష్టి విస్తృతుల సమానత్వానికి పరీక్ష

21.19 సారాంశం

21.20 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

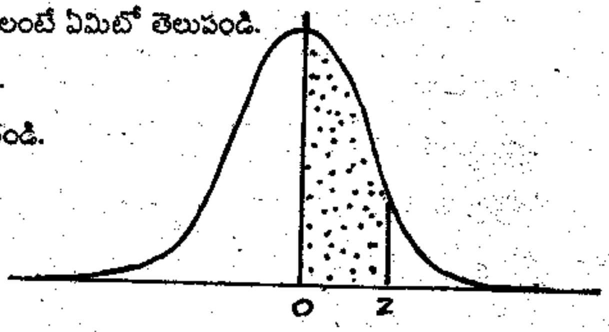
21.21 సిఫారసు చేసిన పుస్తకాలు

21.22 భావనలు

BRAOU

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా వివరించండి.

1. విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశులంటే ఏమిటో తెలుపండి.
2. ద్విపద విభాజనపు ధర్మాలను తెలుపండి.
3. సామాన్య విభాజనపు ధర్మాలను పేర్కొనండి.



Areas under the Standard Narmal Curve from 0 to z

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2424	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3521
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4562	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4808	0.4816	0.4825	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	9.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4937
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

BRAOU

3. P. S. Grewal " (Methods of Statistical Analysis, " Sterling Publishers Private Limited, New Delhi, 1990.

20.11 భావనలు

1. యాదృచ్ఛిక చలరాశి : శాంపుల్ ఆవరణంపై నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం.
2. విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి : విచ్ఛిన్న శాంపుల్ ఆవరణంపైన నిర్వచించబడిన యాదృచ్ఛిక చలరాశి.
3. అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి : ఒక అవిచ్ఛిన్న సమితిలోని అన్ని విలువలు తీసుకునే యాదృచ్ఛిక చలరాశి.

20.12 పదకోశం

(1) Random variable - యాదృచ్ఛిక చలరాశి

(2) Discrete random variable - విచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి

(3) Continuous random variable - అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి

(4) Distribution function - విభాజనా ప్రమేయం

(5) Probability function - సంభావ్యతా ప్రమేయం

(6) Probability density function - సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం

(7) Right continuous - కుడివైపు నుండి అవిచ్ఛిన్నంగా ఉండడం

(8) Binomial distribution - ద్విపద విభాజనం

(9) Poisson distribution - పాయిసన్ విభాజనం

(10) Normal distribution - సామాన్య విభాజనం

(11) Standard normal disribution - ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనము

(12) Mean - అంక మధ్యమము

(13) Variance - విస్తృతి

(14) Co - efficient of skewness - అసౌష్ఠవతా గుణకము

(15) Ordinate - ద్వితీయ నిరూపకము

(16) Large sample - బృహత్ప్రతి రూపము

(17) Small sample - లఘు ప్రతిరూపము

(18) Law of large numbers - బృహత్ సంఖ్యా న్యాయము

20.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

1. విభాజనా ప్రమేయాన్ని నిర్వచించి, దాని ధర్మాలను తెలపండి.
2. ద్విపద విభాజనాన్ని నిర్వచించి, దాని ధర్మాలను పేర్కొనండి.
3. పాయిసన్ విభాజనమనగా నేమి ? ద్విపద విభాజనం నుండి దానినెట్లా రాబట్టాలో వివరించండి.
4. సామాన్య విభాజనాన్ని నిర్వచించి, దాని ధర్మాలను, ఉపయోగాలను తెలుపండి.

B R A O U

20.8 సారాంశం

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగానికి చెందిన శాంపుల్ ఆవరణంపైని నిర్వచించబడిన ప్రమేయాన్ని యాదృచ్ఛిక చలరాశి అంటూ, దానిని X తో సూచిస్తాము. ఇది విచ్ఛిన్న లేదా అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి కావచ్చు. ఈ చలరాశి యొక్క విభజనాప్రమేయం మూడు ధర్మాలను కలిగి వుంటుంది. విచ్ఛిన్న విభాజనాలలో ముఖ్యమైనవి ద్విపద మరియు పాయిసన్ విభాజనాలు. వాటి సంభావ్యతా ప్రమేయాలు వరుసగా.

$$P(X = x) = (x^n)\, P^x\, (1-P)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$P(X - x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

కొన్ని నియమాలు తృప్తి పడినప్పుడు పాయిసన్ విభాజనాన్ని ద్విపద విభాజనం యొక్క అవధిగా రాబట్టవచ్చు. అవిచ్ఛిన్న విభాజనాలలో అతి ముఖ్యమైన సామాన్య విబాజనం యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం,

$$f(x)\, \frac{1}{\sigma\sqrt{2}\,\Pi} - e^{\frac{-(x-\mu)}{2r^2}},$$

$-\alpha < x < +\alpha$ గా వ్రాస్తాము. సాంఖ్యక శాస్త్రంలో సామాన్య విభాజనానికి విశిష్టమైన స్థానం ఉన్నది.

20.9 అవగాహన ప్రశ్నలు

1. ఒక బాంబు లక్ష్యాన్ని ఛేదించడానికి సంభావ్యత. ఒక వంతెనను కూల్చడానికి రెండు బాంబులు సరిపోతాయి. ఆరు బాంబులను వంతెనను కూల్చడానికి విసిరితే, వంతెన కూల్చబడడానికి సంభావ్యతను, ద్విపద సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

జవాబు : 0.345

2. $P(x=2) = 9.\, P(x=4) + 90.\, P(x=6)$ అయ్యేటట్లు X ఒక పాయిసన్ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, X యొక్క అంక మధ్యమమును కనుక్కోండి.

జవాబు : $\lambda = 1$.

3. అంకమధ్యమము 12, క్రమ విచలనము 4గా కలిగిన సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశి X అయితే, సామాన్య విభాజనం వైశాల్య పట్టికల నుపయోగించి క్రింది ఘటనలకు సంభావ్యత కనుగొనండి.

(a) (i) $X \geq 20$ (ii) $X \leq 20$ (iii) $0 \leq X \leq 12$

(b) $P[X > x] = 0.21$, అయితే x విలువ ఎంత ?

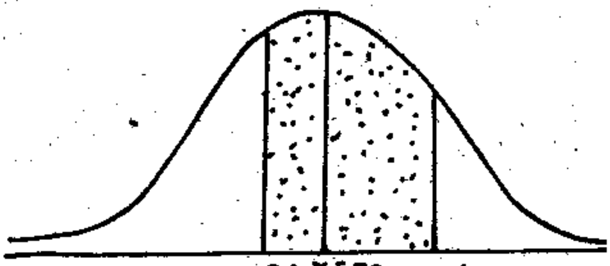
జవాబు : (a) (i) 0.0228 (ii) 0.9772 (iii) 0.49865 (b) x = 14.84

20.10 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. J. Medhi Statistical Methods - An Introductory Text, Wiley Eastern Limited, New Delhi - 1993.

2. B.S. Coel, Satya Prakash, Roshan lal : Mathematical Statistics, Pragathi Prakasan, Meerut, 1991.

B R A O U



(i) $X = 26 \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{26 - 30}{5} = -0.8$

$X = 40 \Rightarrow Z = \frac{40 - 30}{5} = 2.$

$P[26 \le X \le 40] = P[-0.8 \le Z \le 2]$

$= P[-0.8 \le Z \le 0] + P[0 \le Z \le 2]$

$= P[Z \le 0.8] + P(0 \le Z \le 2]$

$= 0.2881 + 0.4772$ (ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనం పట్టికల నుండి)

$= 0.7653$.

(ii) $X = 45 \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 30}{5} = 3$

$P[X \ge 45] = P[Z \ge 3] = 0.5 - P[0 \le Z \le 3]$

$= 0.5 - 0.49865$

$= 0.00135$

(iii) $P[\,|X - 30| \le 5] = P[-5 \le X - 30 \le 5]$

$= P[25 \le X \le 35]$

$= P\left[\frac{25 - 30}{5} \le \frac{X-30}{5} \le \frac{35-30}{5}\right]$

$= P[-1 \le Z \le 1]$

$= p[-1 \le Z \le 0] + p[0 \le Z \le 1]$

$= P[0 \le Z \le 1] + P[0 \le Z \le 1]$

$= 2P[0 \le Z \le 1] = 2 \times 0.3413$

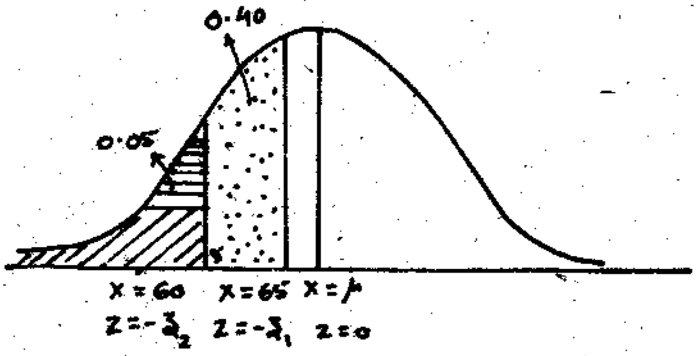
$= 0.6826.$

BRAOU

X : ఎత్తు (అంగుళములలో)

$P[X < 60] = 0.05$

$P[60 < X < 65] = 0.40 \Rightarrow P[X < 65] = 0.45$



$X = 65$ అయితే $Z = \dfrac{65 - \mu}{\sigma} = -z_1$ అనుకొందాము.

$X = 60$ అయితే $Z = \dfrac{60 - \mu}{\sigma} = -z_2$ అనుకొందాము.

$P[Z < -z_2] = P[Z > z_2] = 0.5 - P[0 > Z < z_2] = 0.05$

$\Rightarrow P[0 < Z < z_2] = 0.45$ ________ (1)

$P[Z < -z_1] = P[Z > z_1] = 0.5 - P[0 < Z < z_1] = 0.45$

$\Rightarrow P[0 < z < z_1] = 0.05$ ________ (2)

సామాన్య పట్టికల నుండి, (1) మరియు (2)

$\Rightarrow z_1 = 0.13, z_2 = 1.645$

$-z_1 = \dfrac{65 - \mu}{\sigma} = -0.13 \Rightarrow \mu + 0.13\sigma = 65$ __ (3)

$-z_2 = \dfrac{60 - \mu}{\sigma} = -1.645 \Rightarrow \mu + 1.645\,\sigma = 60$ __ (4)

(3) మరియు (4) లను సాధిస్తే ,

$\mu = 65.42, \sigma = 3.29$

ఉదా 22 : అంకమధ్యమం, క్రమ విచలనము 5గా కల్గిన ఒక సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశి X అయితే, (i) $26 \leq X \leq 40$ (ii) $X \geq 45$ మరియు (iii) $|X-30| \leq 5$ అనే ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

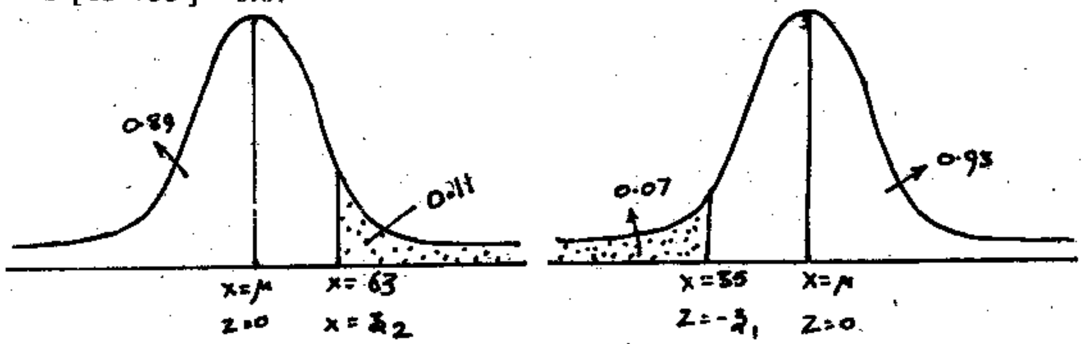
BRAOU

ఉదా 20 : ఒక సామాన్య విభాజనానికి, 7 % వస్తువులు 35లోపు మరియు 89% వస్తువులు 63లోపు ఉంటే ఆవిభాజనం యొక్క అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిని కనుగొనండి.

X యొక్క విభాజనము, $N(\mu, \sigma 2)$

$P[X < 63] = 0.89$

$P[X < 35] = 0.07$



ప్రామాణిక సామాన్య చలరాశి $Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

$X = 35 \Rightarrow Z = \dfrac{35 - \mu}{\sigma} = -z_1$ అనుకొందాము.

$X = 63 \Rightarrow Z = \dfrac{63 - \mu}{\sigma} = -z_2$ అనుకొందాము.

పై రెండు చిత్ర పటాల నుండి,

$P[0 \le Z \le z_2] = 0.39$

$P[-z_1 \le Z \le 0] = P[0 \le Z \le z_1] = 0.43$

ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనం యొక్క పట్టికల నుండి ;

$z_1 = 1.48 \Rightarrow \dfrac{\mu - 35}{\sigma} = 1.48 \Rightarrow \mu - 1.48\,\sigma = 35$

$z_2 = 1.23 \Rightarrow \dfrac{63 - \mu}{\sigma} = 1.23 \Rightarrow \mu + 1.23\,\sigma = 63$

సాధిస్తే $\mu = 50.3$

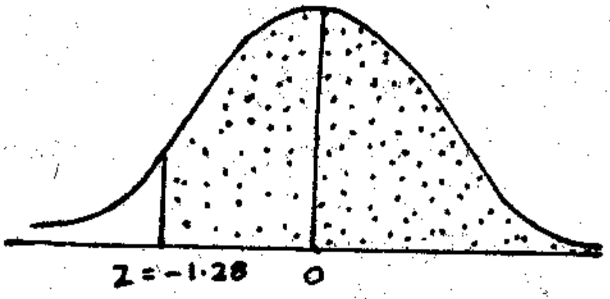
$\sigma = 10.33$

ఉదా 21 :

ఒక పెద్ద సమూహంలోని పురుషులలో 5% ఎత్తులు 60 అంగుళముల లోపు, 40% ఎత్తులు 60 నుండి 65 అంగుళముల లోపు ఉన్నాయి. ఎత్తుల విభాజనమును సామాన్య విభాజనంతో ఉజ్జాయింపు వేస్తే దాని అంకమధ్యమము మరియు విస్తృతిని కనుగొనండి.

B R A O U

ఉదా 17 : $Z = 1.28$ కు కుడివైపున సామాన్య వక్రానికి క్రింద వున్న వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

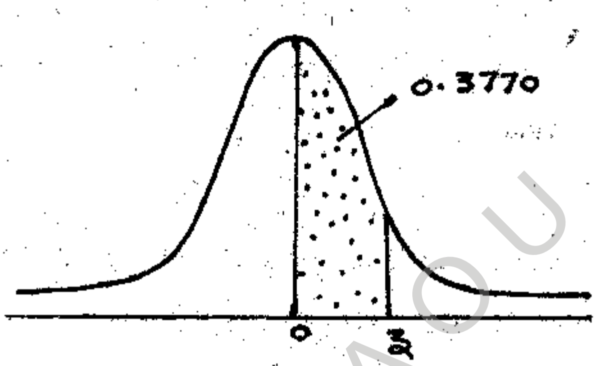


$P[Z \geq -1.28] = P[-1.28 \leq Z \leq 0] + P[Z \geq 0]$

$= P[0 \leq Z \leq 1.28] + P[Z \geq 0]$ (సౌష్ఠవత కారణంగా)

$= 0.3997 + 0.5 = 0.8997$

ఉదా 18 : సున్న మరియు Z లకు మధ్య సామాన్య విభాజనానికి క్రింద ఉన్న వైశాల్యము 0.3770 అయితే, అనుబంధం - 1 లో ఇవ్వబడిన పట్టికనుపయోగించి z విలువను కనుక్కోండి.



$P[0 \leq Z \leq z] = 0.3770$

$z = 1.16$ సౌష్ఠవత కారణంగా

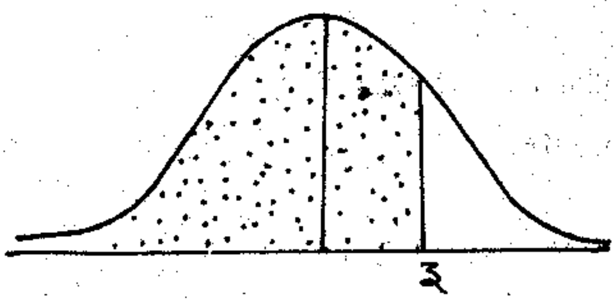
$P[-z \leq Z \leq 0] = 0.3770$

$z = -1.16$

ఉదా 19 : z నకు ఎడమవైపు సామాన్య విభాజనం క్రింద వైశాల్యము 0.862 ఐతే z విలువ కనుక్కోండి.

వైశాల్యము 0.5 కంటే ఎక్కువ కాబట్టి z ధనరాశి కావాలి.

$P[0 \leq Z \leq z] = 0.8621 - 0.5 = 0.3621$ $\qquad Z = 1.09$



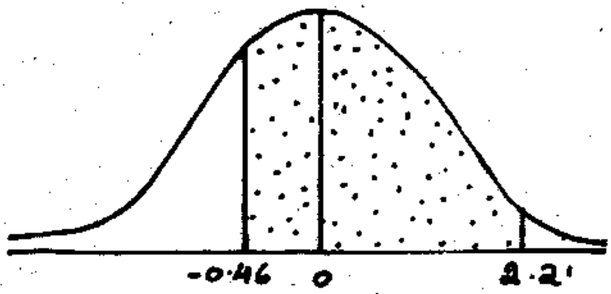
BRAOU

ఉదా 13 : $Z = -0.68$ మరియు $Z = 0$ ల మధ్యన సామాన్య వక్రానికి క్రింద వైశాల్యము కనుక్కోండి.

సౌష్ఠవత మూలంగా,

$P[-0.68 \le x \le 0] = P[0 \le x \le 0.68] = 0.2518$

ఉదా 14 : $Z = -0.46$ మరియు $Z = 2.21$ ల మధ్య సామాన్య వక్రమునకు క్రింది వైశాల్యము కనుక్కోండి.



$P[-0.46 \le Z \le 2.21] = P[-0.46 \le Z \le 0] + P[0 \le Z \le 2.21]$

$= P[0 \le Z \le 0.46] + P[0 \le Z \le 2.21]$ (సౌష్ఠవతకారణంగా)

$= 0.1772 + 0.4864 = 0.6636.$

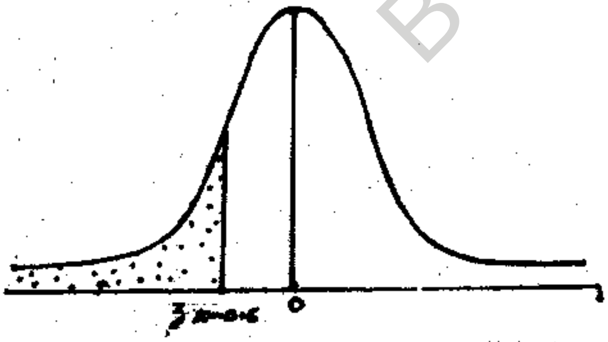
ఉదా 15 :

$Z = 0.81$ మరియు $Z = 1.94$ ల మధ్య, సామాన్య వక్రానికి క్రింది వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి.

$P[0.81 \le Z \le 1.94] = P[0 \le Z \le 1.94] - P[0 \le Z \le 0.81]$

$= 0.4738 - 0.2910 = 0.1828$

ఉదా 16 : $Z = 0.6$ కు ఎడమనైపు, సామాన్య వక్రానికి క్రింద వున్న వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



$P[X \le -0.6] = P[X \ge 0.6]$ (సౌష్ఠవత కారణంగా)

$= P[X \ge 0] - P[0 \le X \le 0.6]$

$= \frac{1}{2} - 0.2258 = 0.2742$

B R A O U

20.6.2 సామాన్య విభాజనం యొక్క ఉపయోగాలు

గణాంక శాస్త్రంలో సామాన్య విభాజనం యొక్క పాత్ర అతి ముఖ్యమైనదని క్రింది కారణాల వల్ల చెప్పవచ్చు.

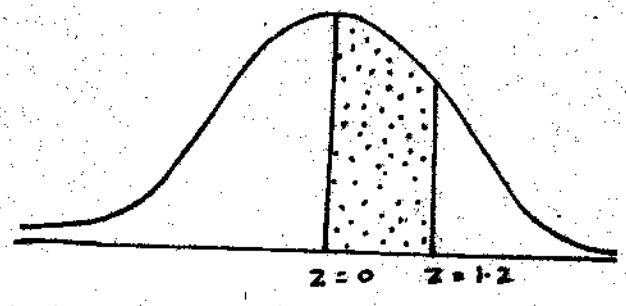
1. సైద్ధాంతిక సంభావ్యతా విభాజనాలలో పెక్కింటిని సామాన్య విభాజనంలో ఉజ్జాయింపు చేయవచ్చు.
2. బృహత్ ప్రతిరూప పరిమాణాలకు (for large sample sizes) అతి ముఖ్యమైన ప్రతిరూప విభాజనాలయిన (sampling distributions) స్టూడెంట్ - t, స్నెడెకార్ -F మరియు కై - వర్గ విభాజనాలను సామాన్య విభాజనంచే ఉజ్జాయింపు చేయవచ్చు.
3. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉండక పోయినప్పటికీ, సరళ స్వరూపాంతరాల ద్వారా (simple transformations) దానిని సామాన్య చలరాశిగా మార్చుటకు అవకాశమున్నది.
4. బృహత్ప్రతిరూప సిద్ధాంతం (law of large numbers) సామాన్య విభాజనంపై ఆధారపడి ఉన్నది.
5. t,F మరియు కై - వర్గ పరీక్షలు, ' ప్రతిరూపం సామాన్య విభాజనం నుండి వచ్చినది ' అనే ఉపకల్పన పైన ఆధారపడి వున్నది.

20.7 ద్విపద మరియు సామాన్య విభాజనాల మధ్య సంబంధం

బృహత్ప్రతి రూపాలలో p గాని, q గాని సున్నకు అతి దగ్గరగా నుండనప్పుడు, X ద్విపద విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటే, $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ విభాజనాన్ని ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనంతో ఉజ్జాయింపు చేయవచ్చు. "n" పెరిగిన కొద్దీ ఉజ్జాయింపు మెరుగుపడుతుంది.

గమనిక : సామాన్య పట్టికల నుండి ఏ రెండు పరిమితుల, మరియు సామాన్య వక్రము చే పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యాన్ని కనుగొనవచ్చు.

ఉదా 12 : అనుబంధం -1 లోని పట్టికనుపయోగించి $Z = 0$ మరియు $Z = 1.2$ ల మధ్యన సామాన్య వక్రానికి క్రింది వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.



$P[0 \leq Z \leq 1.2] = 0.3849.$

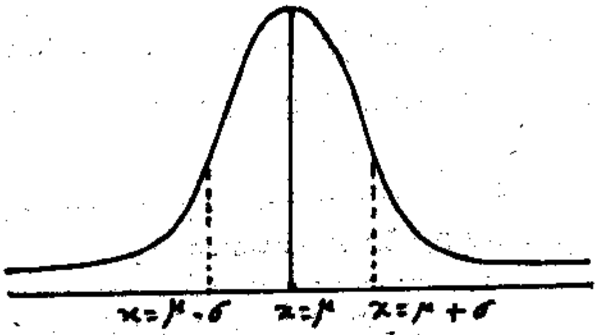
4. ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనం యొక్క అంకమధ్యమం సున్న, విస్తృతి ఒకటి అవుతాయి. ప్రామాణికం కాని సామాన్య వక్రానికి వాటిని వరుసగా μ మరియు σ^2 లతో సూచిస్తాము.

5. సామాన్య విభాజనానికి అంకమధ్యమము, మధ్యగతము మరియు బాహుళకములు సమానమవుతాయి.

6. సామాన్య విభాజనం యొక్క బేసి కేంద్రీయ ఘాతికలు ' సున్న ' అవుతాయి. ఈ ధర్మాన్ని, $\mu_{2r+1} = 0, r = 0,1,2....$తో సూచిస్తాము.

7. సామాన్య వక్రముతోను మరియు x అక్షముతోను పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యము ఒకటి అవుతుంది.

8. సామాన్య విభాజనం యొక్క నతిపరివర్తన బిందువులు (points of inflexion) $x = \mu+\sigma$ మరియు $x = \mu - \sigma$ అవుతాయి.

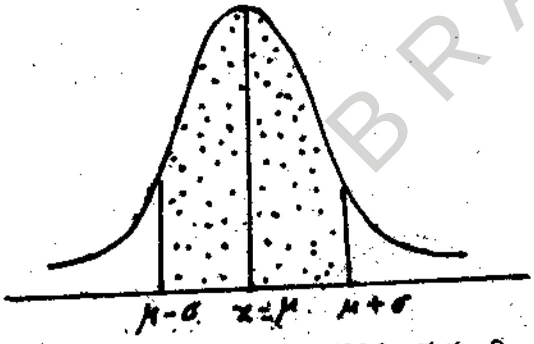


9. μ అంకమధ్యమము, σ^2 విస్తృతిగా గల్గిన సామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశి X అయితే,

$P[\mu - \sigma \le X \le \mu+\sigma] = 0.6826$

అంటే 68.26% విలువలు $\mu - \sigma$ మరియు $\mu + \sigma$ ల మధ్య ఉంటాయి.

B R A O U



చుక్కలు కలిగి ఉన్న ప్రదేశ వైశాల్యము 0.6826 అవుతుంది. అట్లే,

$P[\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma] = 0.9544$

$P[\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma] = 0.9973$

10. $x = \mu-\sigma, x = \mu$ మరియు సామాన్య వక్రములచే పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యము 0.3413 అవుతుంది. $x = \mu , x = \mu+\sigma$ మరియు సామాన్య వక్రములచే పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యము కూడా 0.3413 అవుతుంది.

ఇక్కడ Qo = 1-Po

శూన్య ప్రాతిపదిక నిజమైనప్పుడు, బృహత్ప్రతి రూపాలలో t ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

సార్థకతా స్థాయి : α

సార్థకతా పరీక్ష ద్విపార్శ్వ పరీక్ష కాబట్టి, సందిగ్ధవిలువ : $t_{\alpha/2}$

$|t| \geq t_{\alpha/2}$ అయినప్పుడు శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడుతుంది. కానిచో అంగీకరించ బడుతుంది.

సమస్య : ప్రతిరూప పరిమాణం 100గా కల్గిన ఒక రాష్ట్రం జనాభాలో 540 మంది అన్నమును, మిగిలిన వారు గోధుమ రొట్టెలను భుజిస్తారు. ' వరి అన్నమునకు మరియు గోధుమ రొట్టెలకు సమానమైన ఆదరణ ' లభించినది అనే పరికల్పనను, 1% సార్థకతా స్థాయి వద్ద పరీక్షించండి.

సాధన : $Ho : P = \frac{1}{2}$

$H_1 : P \neq \frac{1}{2}$

సార్థకత స్థాయి : 0.01

ద్విపార్శ్వ పరీక్ష :

ప్రతిరూప అనుపాతం : $p = \frac{540}{1000} = 0.54.$

పరీక్షా సాంఖ్యకం :

$$t = \frac{p - P}{\sqrt{PQ/n}}$$

$$t = \frac{0.54 - 0.50}{\sqrt{\frac{(0.5)^2}{1000}}} = \frac{0.04}{0.0138} = 2.532$$

గణించిన t - విలువ : 2.532

$|t| = 2.532$

సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.005} = 2.58$

$|t| < t_{0.005}$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక ఆమోదించబడుతుంది.

సమస్య : 36 ప్రతిరూప పరిమాణంగా గల ప్రతిరూపంలో, 7 శాతం లోపాలను కలిగిన వస్తువులుగా గుర్తించబడినవి.

P = 0.05 అనే శూన్య ప్రాతిపదికను, P > 0.05 అనే ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదికను పరీక్షించండి.

B R A O U

సాధన :

$H_o : P = 0.05$

$H_1 : P = P_1 \ (> 0.05)$

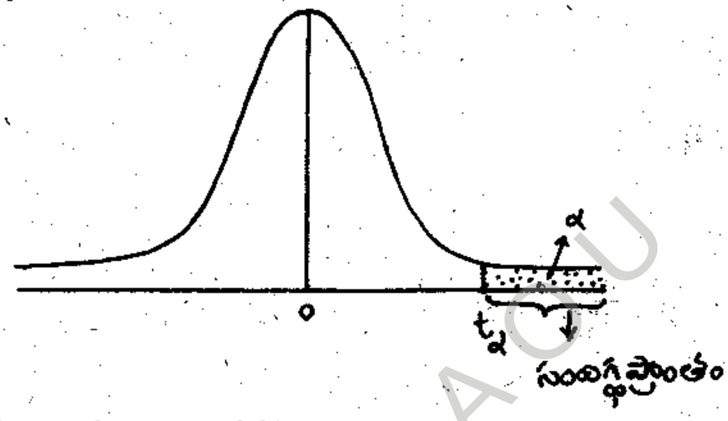
ప్రతిరూప పరిమాణం : 36

ప్రతిరూప అనుపాతం : $p = 0.07$

పరీక్షా సాంఖ్యకం : $t = \dfrac{p - P}{\sqrt{\dfrac{PQ}{n}}}$

కుడి పార్శ్వ పరీక్ష :

బృహత్ప్రతి రూపాలలో t ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.



సార్థకతా స్థాయి : $\alpha = 0.05$

సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.05} = 1.645$

$t \geq t_\alpha$ అయితే శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడుతుంది.

$$t = \frac{0.07 - 0.05}{\sqrt{\dfrac{0.05 \times 0.95}{36}}} = \frac{0.02 \times 6}{\sqrt{0.05 \times 0.95}} = 0.55$$

గణించిన t విలువ : 0.55

$t < t_{005}$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక అంగీకరించబడుతుంది.

21.9 రెండు ప్రతిరూప అనుపాతాల భేదానికి సార్థకతా పరీక్ష

మొదటి లోకం : $f(x_i, P_1)$

రెండవ లోకం : $g(y, P_2)$

P_1 మరియు P_2 లు వరుసగా మొదటి, రెండవ లోకాల అనుపాతాలు.

$H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 \neq P_2$

మొదటి ప్రతిరూపం : $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$

రెండవ ప్రతిరూపం : $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$

P_1 యొక్క అంచనా : p_1

P_2 యొక్క అంచనా : p_2

పరీక్షా సాంఖ్యకం : $t = \dfrac{p_1 - p_2}{SE(p_1 - p_2)}$

$$SE(p_1 - p_2) = PQ\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

$Q = 1 - P$

సార్థకతా స్థాయి : α

బృహత్ర్పతి రూపాలలో t ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

సందిగ్ధ విలువ : $t_{\alpha/2}$

$|t| \geq t_{\alpha/2}$ అయినప్పుడు శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడుతుంది.

సమస్య : A మరియు B అనే జిల్లాలలో జనాభాలోని అక్షరాశ్యత్య అనుపాతాలను, ఒక్కొక్క జిల్లాలో 100 పరిమాణంగా గల ప్రతిరూపాల అనుపాతాలలో అంచనా వేసినారు. జిల్లా - A లో 100 మందిలో 32 మంది, జిల్లా - B లో 100 మందిలో 40 మంది అక్షరాశ్యులు వున్నారు. పై రెండు ప్రతిరూపాల అనుపాతాల మధ్య భేదం సార్థకమవుతుందో, లేదో పరీక్షించండి.

సాధన :

జిల్లా A - అక్షరాశ్యుల అనుపాతం : P_1

జిల్లా B - లో అక్షరాశ్యుల అనుపాతం : P_2

$H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 \neq P_2$

జిల్లా A నుండి తీయబడిన ప్రతిరూప అక్షరాశ్యుల అనుపాతం :

$p_1 = \dfrac{32}{100} = 0.32$

జిల్లా B నుండి తీసిన ప్రతిరూప అక్షరాస్యుల అనుపాతం :

$$p_2 = \frac{40}{100} = 0.40$$

$$SE(p_1 - p_2) = \sqrt{PQ\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

P తెలియనప్పుడు దానిని, సగటు అనుపాతంలో అంచనా వేయవచ్చు. అప్పుడు

$$P = \frac{0.32 + 0.40}{2} = 0.36$$

$$SE(p_1 - p_2) = \sqrt{(0.36)(0.64)\left[\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right]}$$

$$Q = 1 - 0.36 = 0.64$$

$$\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)(2)}{100}} = 0.068$$

$$t = \frac{p_1 - p_2}{SE(p_1 - p_2)}$$

$$= \frac{0.32 - 0.40}{0.068} = \frac{-0.08}{0.068} = -1.18$$

$$|t| = 1.18$$

సార్థకతా స్థాయి : $\alpha = 0.05$

సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.025} = 1.96$

$|t| < t_{0.025}$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక ఆమోదించబడుతుంది.

21.10 రెండు క్రమ విచలనాల మధ్య సార్థకతా భేదం పరీక్షించడం

మొదటి లోకం : $f(x, \sigma_1)$

రెండవ లోకం : $g(x, \sigma_2)$

σ_1, σ_2 లు వరుసగా మొదటి, రెండవ లోకాల క్రమ విచలనాలు.

మొదటి ప్రతిరూపం : $x_1, x_2, \ldots, x_m$

రెండవ ప్రతిరూపం : $y_1, y_2, \ldots, y_n$

మొదటి ప్రతిరూపం యొక్క క్రమ విచలనము : s_1

B R A O U

రెండవ ప్రతిరూపం యొక్క క్రమ విచలనము : s_2

$$SE(s_1 - s_2) = \sqrt{\frac{\sigma x^2}{2m} + \frac{\sigma y^2}{2n}}$$

σx^2 మరియు σy^2 లు తెలియనప్పుడు వాటివి వరుసగా s_1 మరియు s_2 లలో అంచనా వేస్తారు.

(a) σ_1 మరియు σ_2 విలువలు తెలియనప్పుడు

పరీక్షా సాంఖ్యకం :

$$t = \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2m} + \frac{s_2^2}{2n}}}$$

(b) σ_1 మరియు σ_2 విలువలు తెలిసినప్పుడు,

పరీక్షా సాంఖ్యకం :

$$t = \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{\frac{\sigma 1^2}{2m} + \frac{\sigma_2^2}{2n}}}$$

బృహత్ప్రతి రూపాలలో t ప్రామాణిక సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

సార్థకత స్థాయి : α

సందిగ్ధ విలువ : $t_{\alpha/2}$

$|t| \geq t_{\alpha/2}$ అయితే శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడుతుంది.

లేనిచో అంగీకరించబడుతుంది.

సమస్య : వయసులో ఉన్న యువకుల ఎత్తుల వివరాలు రెండు దేశాలకు చెందిన రెండు ప్రతిరూపాలలో క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

	దేశం -A	దేశం -B
సగటు ఎత్తు (అంగుళాలలో)	67.42	67.25
క్రమ విచలనము	2.58	2.50
ప్రతిరూప పరిమాణం	1000	1200

రెండు ప్రతిరూప క్రమ విచలనాల మధ్య భేదము సార్థకమవుతుందో లేదో పరీక్షించండి.

B R A O U

సాధన : మొదటి లోకం : $f(x, \sigma_1)$

రెండవ లోకం : $g(y, \sigma_2)$

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

మొదటి ప్రతిరూప పరిమాణం (=m) = 1000.

రెండవ ప్రతిరూప పరిమాణం (=n) = 1200.

$s_1^2 = (2.58)^2$

$s_2^2 = (2.50)^2$

$$SE(s_1 - s_2) = \sqrt{\frac{s_1^2}{2m} + \frac{s_2^2}{2n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2.58)^2}{2000} + \frac{(2.50)^2}{2400}}$$

$$t = \frac{2.58 - 2.50}{\sqrt{\frac{(2.58)^2}{2000} + \frac{(2.50)^2}{2400}}}$$

$$= \frac{0.08}{0.07746} = 1.03$$

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.025} = 1.96$

$|t| < 1.96$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడదు.

21.11 స్టూడెంట్ t - విభాజనము (Student's t - Distribution)

(i) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, μ - అంకమధ్యమం, σ^2 విస్తృతిగా కలిగిన సామాన్య విభాజనం నుండి వచ్చిన యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపము.

(ii) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ లు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులు.

(iii) σ^2 విలువ తెలియదు అని అనుకొందాము.

(iv) $n < 30$ అయితే ప్రతిరూపము లఘు ప్రతిరూపం అవుతుంది.

ప్రతిరూప అంకమధ్యమము : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_1 / n$

BRAOU

ప్రతిరూప క్రమ విచలనము : $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_1 - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

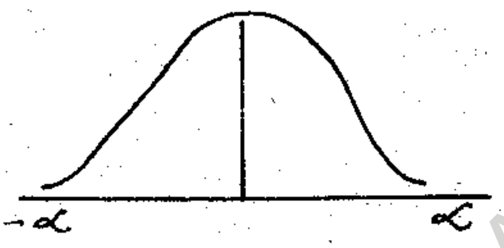
లఘు ప్రతిరూపాలలో t యొక్క ప్రతిరూప విభాజనాన్ని t – విభాజనం అంటూ దాని గణిత స్వరూపాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాస్తారు.

$$f(t) = C\left[1 + \frac{t}{n}\right]^{-\frac{(n+1)}{2}} \qquad -\alpha < t < +\alpha$$

పై గణిత స్వరూపాన్ని t యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం (probability density function) అంటారు.

t - విభాజనం యొక్క ధర్మాలు :

1. t – సంభావ్యతా వక్రము చుట్టూ సౌష్ఠవంగా ఉంటుంది.



2. t – అక్షము పై సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయానికి అనంత స్పర్శరేఖ అవుతుంది.
3. t – అక్షము మరియు, t సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయాలచే పరిబద్ధమైన ప్రదేశ వైశాల్యము ఒకటి అవుతుంది.
4. బృహత్ప్రతి రూపాలలో t విభాజనం సామాన్య విభాజనానికి చేరువ అవుతుంది.

BRAOU

t విభాజనం యొక్క అనువర్తనములు :

(i) ఒక ప్రతిరూప అంకమధ్యమమునకు, సమిష్ఠి (population) అంకమధ్యమమునకు భేదము, సార్థకమవుతుందా లేదా అన్న విషయ పరీక్ష లఘు ప్రతిరూపాలలో t విభాజనం పై ఆధారపడి ఉంటుంది.

(ii) రెండు ప్రతిరూప అంకమధ్యమాల భేదం యొక్క సార్థకతను t విభాజనం ద్వారా పరీక్షించవచ్చు.

(iii) ప్రేక్షిత సహసంబంధతా గుణకము, మరియు ప్రేక్షిత ప్రతిగమన గుణాంకముల సార్థకతను కూడా t-విభాజనం ద్వారా పరీక్ష చేయవచ్చు.

(iv) t విభాజనాన్ని ఉపయోగించి ప్రేక్షిత పాక్షిక మరియు బహుళ సహసంబంధ గుణకముల సార్థకతను పరీక్ష చేయవచ్చు.

21.12 ఒక ప్రతిరూప అంకమధ్యమానికి సార్థకతా పరీక్ష
(Test for the Significance of Single Sample Mean)

$H_o : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_1$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ లు $N(\mu_0, \sigma^2)$ నుండి వచ్చిన n స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులయితే, σ^2 తెలియనప్పుడు దానిని $S^2 = \frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ తో అంచనా వేస్తే

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

స్వాతంత్ర్యాంకము (degrees of freedom) n-1 గా గలిగిన t విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

స్వాతంత్ర్యాంకము (Degrees of Freedom) నిర్వచనం :

n పరిశీలనలలో స్వతంత్రంగా ఉండే పరిశీలనల సంఖ్యను స్వాతంత్ర్యాంకము అంటారు.

ఉదా : x_1, x_2 అనే జంట పరిశీలనలను తీసుకొంటే అది R^2లో ఏ బిందువుకైనా ప్రాతినిధ్యం వహించవచ్చు. అప్పుడు స్వాతంత్ర్యాంకము 2 అవుతుంది. $x_1 + x_2 = 2$ అనే నియమాన్ని x_1, x_2లు తృప్తి పరచవలసి వస్తే, ఒక పరిశీలన రెండవ పరిశీలన పై ఆధారపడి ఉండడం వలన x_1, x_2 , $x_1 + x_2 = 2$ అనే సరళరేఖపై బిందువు అవడం వలన స్వాతంత్ర్యాకము ఒకటి అవుతుంది.

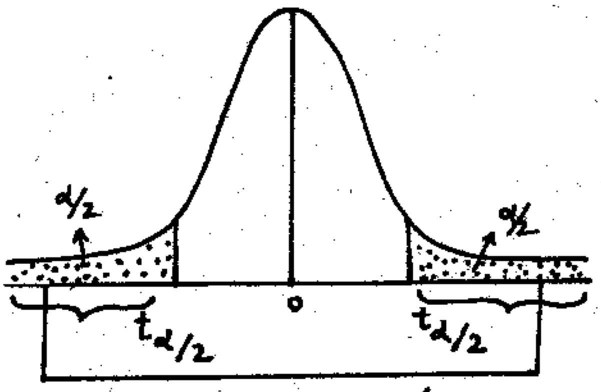
B R A O U

ఉదా : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ లు $N(\mu, \sigma^2)$ నుండి వచ్చిన n స్వతంత్ర పరిశీలనయితే స్వాతంత్ర్యాంకము n అవుతుంది. σ^2 విలువ తెలియదు అన్నప్పుడు దానిని మనం $S^2 = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ తో అంచనా వేస్తాము.

n పరిశీలనలు పై గణిత స్వరూపాన్ని తృప్తి పరచవలసి ఉన్నందున స్వాతంత్ర్యాంకము n–1 అవుతుంది.

సార్థకతా స్థాయి α అనుకొంటే, సందిగ్ధ ప్రాంతము

$\{t : -t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}\}$ అవుతుంది. $t_{\alpha/2}$, t యొక్క సందిగ్ధ విలువ అవుతుంది.



సందిగ్ధప్రాంతం

$|t| \leq t_{\alpha/2}$ అయితే శూన్య ప్రాతిపదిక అంగీకరించబడుతుంది, కానిచో తిరస్కరించబడుతుంది.

ఉదా : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపములోని 10 మంది విద్యార్థుల బుద్ధిశాలి గుణకములు (intelligent co-efficients) క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

70, 120, 110, 101, 88, 83, 95,98,107, 100.

బుద్ధిశాలి గుణకముల సమిష్ఠి అంకమధ్యమం 100 అవునో కాదో పరీక్షించండి.

$H_0 : \mu = 100$

$H_1 : \mu \neq \mu o$

$$\overline{X} = \frac{\sum Xi}{n} = 97.2$$

$$S^2 = \frac{\Sigma (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{1833.60}{9} = 203.73$$

$$t = \frac{97.2 - 100}{\sqrt{203.73} / \sqrt{10}} = \frac{-2.8}{\sqrt{20.37}} = 0.62$$

సార్థకతా స్థాయి : $\alpha = 0.05$

స్వాతంత్ర్యాంకము : $n-1 = 9$.

t విభాజనం యొక్క పట్టికలనుపయోగించి $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9)$ విలువలను కనుగొనవచ్చు. $t_{\alpha/2}(n-1)$, సార్థకతా స్థాయి, t పరీక్ష ద్విపార్శ్వ పరీక్ష, స్వాతంత్ర్యాంకము n-1 అయినప్పుడు t విభాజనం పట్టికల నుండి మనకు లభ్యమయ్యే సందిగ్ధ విలువ, పై సమస్యలలో $t_{0.025}(9) = 2.262$ అవుతుంది.

$|t| < 2.262$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక ఆమోదించబడుతుంది.

ఉదా : ఒక ప్రాంతంలోని 10 మంది పురుషుల ఎత్తులు (అంగుళాలలో) క్రింది విధంగా వున్నాయి.

70, 67, 62, 68, 61, 68, 70, 64, 64,66. వారి సగటు ఎత్తు 64 అంగుళముల కంటే ఎక్కువగా భావించవచ్చునో లేదో పరీక్షించండి.

$Ho : \mu = 64$

$H_1 : \mu > 64$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{660}{10} = 66$$

$$S^2 = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{90}{9} = 10$$

BRAOU

పరీక్షా సాంఖ్యకము : $t = \dfrac{\bar{x} - \mu 0}{S / \sqrt{n}}$

$= \dfrac{66 - 64}{\sqrt{10 / \sqrt{10}}} = 2$

సార్థకతా స్థాయి : $\alpha = 0.05$

స్వాతంత్ర్యాంకము : 9

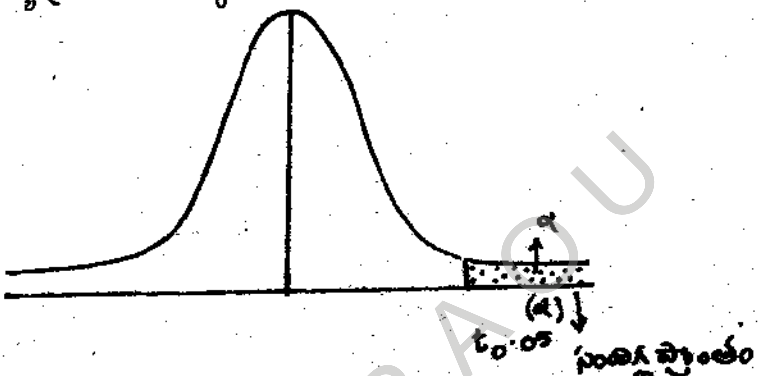
t - పరీక్ష : కుడి పార్శ్వ పరీక్ష

t యొక్క సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.05}(9) = 1.833$

$t (=2) > t_{0.05}(9)$

$t (=2) > t_{0.05}(9)$

శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడుతుంది.



గమనిక : t సందిగ్ధ విలువలు సార్థకతా స్థాయి మరియు స్వాతంత్ర్యాంకాలు ఇచ్చినపుడు, అనుబంధంలో ఇవ్వబడిన t – పట్టికలనుపయోగించి సందిగ్ధ విలువలను కనుగొంటాము.

BRAOU

21.13 రెండు ప్రతిరూప అంకమధ్యమాల మధ్య సార్థకతా భేదానికి పరీక్ష

$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $N(\mu, \sigma_1 2)$ అనే సామాన్య విభాజనం నుండి గ్రహించబడిన యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపమవుతూ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ లు స్వతంత్రాలవుతాయి.

$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ అనే యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపం $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ నుండి గ్రహించబడినవి. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ లు స్వతంత్ర చలరాశులు అవుతాయి. రెండు ప్రతిరూపాలు కూడా స్వాతంత్ర్య ప్రతిరూపాలనుకుందాము. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

σ^2 విలువ తెలియదు అనుకుందాము.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

మొదటి ప్రతిరూప అంకమధ్యమం : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n_1} x_i / n_1$

రెండవ ప్రతిరూప అంకమధ్యమం : $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n_2} y_i / n_2$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_j - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

పరీక్షా సాంఖ్యకము :

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

t యొక్క విభాజనము $n_1 + n_2 - 2$ స్వాతంత్ర్యాంకాన్ని కలిగిన t విభాజనమవుతుంది.

పరీక్ష : ద్విపార్శ్వ పరీక్ష

సార్థకతా స్థాయి : α

స్వాతంత్ర్యాంకము : $n_1 + n_2 - 2$

$t \leq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ అయినప్పుడు శూన్యపరికల్పన ఆమోదించబడుతుంది. లేదా తిరస్కరించబడుతుంది.

ఉదా : A అనే ఆహారాన్ని ఒక గుంపులోని 12 పశువులకు, B అనే ఆహారాన్ని రెండవ గుంపులోని 15 పశువులకు ఇవ్వడం వలన వాటి బరువు పెరుగుదలలు క్రింద ఇవ్వబడినవి :

బరువు పెరుగుదల

ఆహారం : A 25, 32, 30, 34, 24, 14, 32, 24, 30, 31, 35, 25

ఆహారం : B 44, 34, 22, 10, 47, 31, 40, 30, 32, 35, 18, 21, 35, 29, 22.

బరువు పెరుగుదల దృష్ట్యా రెండు ఆహారాల మధ్య సార్థకమైన భేదమున్నదో లేదో పరీక్షించండి.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

B R A O U

$$\bar{x} = \frac{25 + 32 + 30 + 34 + 24 + 14 + 32 + 24 + 30 + 31 + 35 + 25}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{336}{12} = 28$$

$$\bar{y} = \frac{44 + 34 + 22 + 10 + 47 + 31 + 40 + 30 + 32 + 35 + 18 + 21 + 35 + 29 + 22}{15}$$

$$\bar{y} = \frac{450}{15} = 30$$

$$\sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2 = 380$$

$$\sum_{i=1}^{15} (y_i - \bar{y})^2 = 1410$$

$$S^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 + \Sigma (y_i - \bar{y})}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{380 + 1410}{25} = 71.6$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{30 - 28}{\sqrt{71.6 \frac{1}{12} + \frac{1}{17}}} = \frac{2}{\sqrt{10.74}} = 0.609$$

$$= 0.099$$

స్వాతంత్ర్యాంకము : 15

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

$t_{0.025}(15) = 2.06$

$|t| < 2.06$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక అంగీకరించబడుతుంది.

ఉదా : రెండు రకాల విద్యుద్దీపాల ప్రతిరూపాలలోని విద్యుద్దీపాల జీవితకాలాలను పరీక్షించిన తరువాత క్రింది దత్తాంశము వచ్చినది :

	మొదటిరకం విద్యుద్దీపాలు	రెండవ రకం విద్యుద్దీపాలు
ప్రతరూప పరిమాణం :	$n_1 = 8$	$n_2 = 7$
ప్రతిరూప అంకమధ్యమాలు :	$x = 1234$ గంటలు	$y = 1036$ గంటలు
ప్రతిరూప క్రమ విచలనం :	$s_1 = 36$ గంటలు	$s_2 = 40$ గంటలు

BRAOU

మొదటి రకం విద్యుద్దీపాలు రెండవ రకం వాటి కంటే 'ఉత్తమ మైనవి' అన్న పరికల్పనను పరీక్షించండి.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

μ_1 మరియు μ_2 లు వరుసగా మొదటి మరియు రెండవ సమిష్ఠుల అంకమధ్యమములు

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{8x\,(36)^2 + 7\,x\,(40)^2}{13} = 1659.08$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S^2\left|\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right|}}$$

$$= \frac{1234 - 1036}{\sqrt{1659.08\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7}\right)}} = \frac{198}{\sqrt{1659.08 \times 0.2679}} = 9.39$$

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

స్వాతంత్ర్యాకము : 13

పరీక్ష : కుడి పార్శ్వ పరీక్ష

$t_{0.05}^{(13)} = 1.77.$

$t > 1.77$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక తిరస్కరించబడుతుంది.

21.14 అంకమధ్యమాల భేదాన్ని పరీక్షించుటకు జంట t– పరీక్ష (Paired t-Test for Testing Difference of Means)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ లు n జంట పరిశీలనలయితే $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ మరియు $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ల అంకమధ్యమాల మధ్య తేడా సార్థకమవుతుందా లేదా అన్న విషయాన్ని పరీక్షించడానికి మనం జంట t - పరీక్షను ఉపయోగిస్తాము. ఇక్కడ (x_i, y_i), ప్రతిరూప, i - వ యూనిట్ పైన జంట పరిశీలన అవుతుంది.

B R A O U

$d_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)}{n}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum x_i}{n} - \frac{\sum y_i}{n} = \bar{x} - \bar{y}$$

Ho : $\bar{d}$ మరియు సున్న మధ్య భేదం సార్థకం కాదు.

H_1 : $\bar{d}$ మరియు సున్న మధ్య భేదం సార్థకమవుతుంది.

పరీక్షా సాంఖ్యకం : $t = \frac{\bar{d}}{S / \sqrt{n}}$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d}) / n-1$$

పరీక్షా సాంఖ్యకమైన t, స్టూడెంటు t – విభాజనాన్ని (n-1 స్వాతంత్ర్యాంకంతో) కలిగి ఉంటుంది.

ఉదా : కొందరు వ్యక్తులకు ఒక ఉత్ప్రేరకమును ఉపయోగించిన తరువాత రక్తపు పోటులో వచ్చిన పెరుగుదల క్రింది దత్తాంశ రూపంలో ఇవ్వబడినవి.

5,2,8, -1, 3, 0, -2, 1, 5, 0, 4 మరియు 6

' పై ఉత్ప్రేరకమును ఉపయోగించడం వలన రక్తపు పోటులో పెరుగుదల వస్తుంది ' అన్న పరికల్పన నిజమా కాదా పరీక్షించండి.

Ho : $\mu_x = \mu_y$

$H_1 : \mu_x < \mu_y$

d_i = 5, 2, 8, -1, 3, 0, -2, 1, 5, 0, 4, 6.

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{12} = \frac{31}{12} = 2.58$$

$$S^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1} = 9.5382.$$

$$t = \frac{\bar{d}}{S / \sqrt{n}} = \frac{2.58 \times \sqrt{12}}{\sqrt{9.5382}}$$

$$t = \frac{2.58 \times 3.464}{3.09} = 2.39$$

B R A O U

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

స్వాతంత్ర్యాంకము : 11

పరీక్ష : కుడి పార్శ్వ పరీక్ష

t యొక్క సందిగ్ధ విలువ : $t_{0.05}(11) = 1.80$

$t > 1.80$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదికను తిరస్కరిస్తాము.

21.15 ప్రేక్షిత - ప్రతిరూప సహ సంబంధిత గుణకము యొక్క సార్థకతా పరీక్ష (Significance Test of an Observed Correlation Co-efficient)

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ లు ఒక ద్విచల సామాన్య విభాజనం నుండి వచ్చిన n పరిమాణముగా గల యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపము. ఆ ప్రతిరూప సహ సంబంధతా గుణకాన్ని r తో సూచిస్తాము.

Ho : ప్రతిరూప సహ సంబంధ గుణకము r నకు మరియు సున్నకు మధ్య భేదం సార్థకము కాదు.

H_1 : r కు సున్నకు మధ్య భేదము సార్థకమవుతుంది.

పరీక్షా సాంఖ్యకము : $t = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

పరీక్షా సాంఖ్యకము t స్టూడెంటు విభాజనాన్ని (n-2 స్వాతంత్ర్యాంకంతో) కలిగి ఉంటుంది.

ఉదా : 27 జంట పరిశీలనలతో కూడిన ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపం ఒక ద్విచల సామాన్య విభాజనం నుండి గ్రహించబడినది. ఆ యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూప సహ సంబంధతా గుణకము 0.6 అయితే దాని సార్థకతను పరీక్షించండి.

Ho : P = 0 (P : సమిష్టి యొక్క సహ సంబంధతా గుణకము)

$H_1 : P \neq 0$

$$t = \frac{0.6\sqrt{25}}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = \frac{4}{\sqrt{0.64}} = 3.75$$

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

స్వాతంత్ర్యాంకము : 25

పరీక్ష : ద్విపార్శ్వ పరీక్ష

$t_{0.05}(25) = 2.06$

$|t| > 2.06$ కాబట్టి మనం శూన్య ప్రాతిపదికను తిరస్కరిస్తాము.

21.16 కై - వర్గ విభాజనము (χ^2 - Distribution)

కై - వర్గ చలరాశి (Chi - Square Variate) : నిర్వచనం

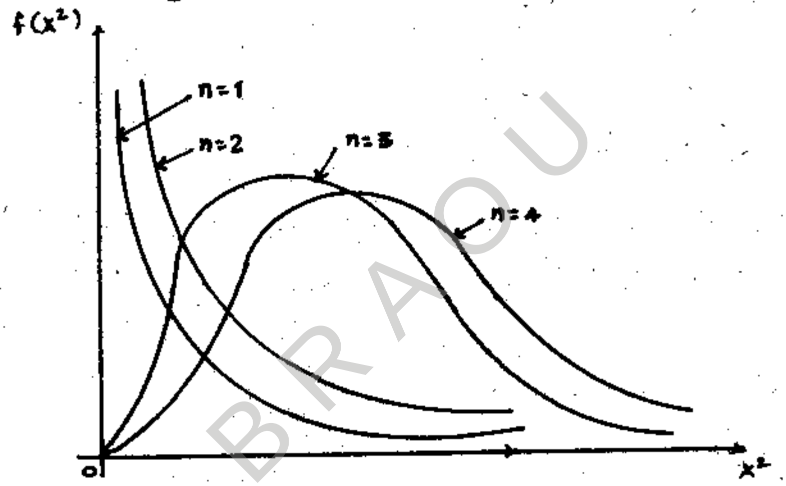
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ల అంకమధ్యమం μ గా, విస్తృతి σ^2 గా గలిగిన n స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశులైతే,

$$\chi^2 = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} \right)^2$$

n స్వాతంత్ర్యాంకముగా గలిగిన కై - వర్గ చలరాశి అవుతుంది.

కై - వర్గ విభాజనం : n స్వాతంత్ర్యాంకముగా గలిగిన కై - వర్గ చలరాశి సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం:

$$f(\chi^2) = c \exp - \frac{\chi^2}{2} (\chi^2)^{\frac{n}{2} - 1}, 0 < \chi^2 < \alpha$$



కై - వర్గ విభాజనం ఆకృతి స్వాతంత్ర్యాంకము (n) పై ఆధారపడి ఉండడాన్ని పై రేఖా చిత్రంలో మనం గమనించవచ్చు.

21.17 F- విభాజనము

F చలరాశి నిర్వచనం :

n_1 మరియు n_2 లు వరుసగా స్వాతంత్ర్యాంకాలుగా గలిగిన రెండు స్వతంత్ర కై - వర్గ చలరాశులు χ_1^2 మరియు χ_2^2 అయితే.

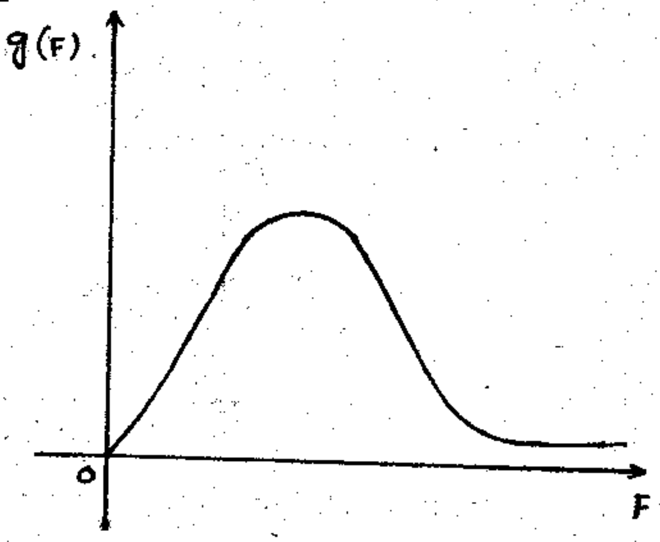
$$F = \frac{\chi_1^2 / n_1}{\chi_2^2 / n_2}$$ ఒక F - చలరాశి అవుతుంది.

BRAOU

F - విభాజనం :

చలరాశి -F యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం క్రింద ఇవ్వబడినది.

$$g(F) = C \frac{F^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left[1+\frac{n_1}{n_2}\right]^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \quad , 0 < F < +\alpha$$



F యొక్క సంభావ్యతా సాంద్రతా ప్రమేయం పై రేఖా చిత్రంలో ఇవ్వబడినది.

గమనిక : (1) F– విభాజనం ఆకృతి జంట విచలనాంకాలు (n_1, n_2) ల పైన ఆధారపడి ఉంటుంది.

(2) F- చలరాశి యొక్క సందిగ్ధ విలువలు అనుబంధంలోని F – పట్టిక నుండి గ్రహించవచ్చు.

21.18 సమిష్టి విస్తృతుల సమానత్వానికి F - పరీక్ష (F - Test for Equalities of Population Variances)

$(X_1, X_2, \ldots, X_{n1}), (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n2})$ అనే రెండు స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపాలు, సమానమైన విస్తృతి గలిగిన రెండు సామాన్య విభాజనాల నుండి వచ్చినవా ? లేదా ? అని తెలుసుకోవడానికి F - పరీక్షను ఉపయోగిస్తారు.

$Ho : \sigma x^2 = \sigma y^2$

$H_1 : \sigma x^2 > \sigma y^2$

σx^2 మరియు σy^2 లు వరుసగా మొదటి, రెండవ సామాన్య విభాజనాలు.

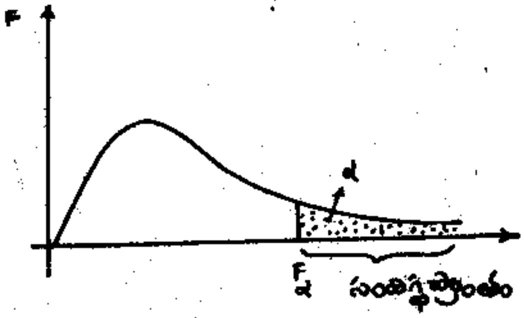
పరీక్షా సాంఖ్యకము : $F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2}{n_1 - 1}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2}{n_2 - 1}$$

శూన్య పరికల్పన నిజమైనప్పుడు $F,(n_1 - 1, n_2 - 1)$ జంట స్వాతంత్ర్యాంకాలతో కూడిన F విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

గమనిక : రెండు ప్రతిరూప విస్తృతులలో పెద్ద విలువను $S^2{}_x$ గా భావించి F యొక్క లవము గాను, చిన్న విలువను $S^2{}_y$ గా భావించి హారము గాను తీసుకొంటాము.



ఉదా : రెండు వేరు వేరు ప్రయోగ పరిస్థితులలో గుమ్మడి కాయలను పండించినారు. 11 మరియు 9 పరిమాణములుగా గలిగిన రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపము ల ద్వారా గణించి గుమ్మడి కాయల బరువుల విస్తృతులు వరుసగా 0.8 మరియు 0.5 బరువుల విభాజనాలను సామాన్య విభాజనాలుగా భావించి రెండు సమిష్టుల విస్తృతులు సమానము అన్న పరికల్పనను పరీక్షించండి.

$$Ho : \sigma x^2 = \sigma y^2$$

$$H_1 : \sigma x^2 > \sigma y^2$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow n_1 s_x^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_x^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} s_y^2 \qquad S_y^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} s_y^2$$

$$n_1 = 11 \; s_x^2 = (0.8)^2$$

$$n_2 = 11; s_y^2 = (0.5)^2$$

$$S_x^2 = \frac{11}{10} x\,(0.8)^2 = 0.704$$

$$S_y^2 = \frac{9}{8} x\,(0.5)^2 = 0.2813$$

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{0.704}{0.2813} = 2.5$$

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

స్వాతంత్ర్యాంకాలు : (10,8).

F - సందిగ్ధ విలువ : $F_{0.05}(10,8) = 3.29$

$F < 3.29$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదిక అంగీకరించబడుతుంది.

ఉదా : రెండు యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపాలు క్రింది సమాచారాన్ని ఇచ్చినవి.

ప్రతిరూపము	పరిమాణము	ప్రతిరూప విస్తృతి
1.	$10 (= n_1)$	$s_1^2 = 9$
2.	$12 (= n_2)$	$s_2^2 = 9$

సమిష్టుల విస్తృతులు సమానము అనే పరికల్పనను పరీక్షించండి.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$S_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2 = \frac{10}{9} x 9 = 10$$

$$S_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2$$

$$= \frac{12}{11} x 9 = \frac{108}{11} = 9.82$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{10}{9.82} = 1.018$$

సార్థకతా స్థాయి : 0.05

స్వాతంత్ర్యాంకాలు : (9,11)

F - సందిగ్ధ విలువ : $F_{0.05}(9,11) = 2.90$

$F < 2.90$ కాబట్టి శూన్య ప్రాతిపదికను తిరస్కరించలేము.

21.19 సారాంశం

సార్థకతా పరీక్ష నిర్వచనానికి అవసరమైన భావనలు : (i) లోకం లేదా సమిష్ఠి (Population) (ii) ప్రతిరూపం (iii) అంచనా ధారము (iv) ప్రతిరూప విభాజనం (v) క్రమదోషం (vi) శూన్య ప్రాతిపదిక (vii) ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదిక (viii) పరికల్పనల పరీక్షలలో దోషాలు (ix) దోషాల సంభావ్యతలు (x) పరీక్షా శక్తి

(xi) సందిగ్ధ ప్రాంతం (xii) సందిగ్ధ విలువలను నిర్వచించడమే కాకుండా, సార్థకతా పరీక్ష ముఖ్య సోపానాలను కూడా పైన ఇచ్చాం. పలు సార్థకతా పరీక్షలు, సంబంధిత సాధించబడిన సమస్యలను కూడా పైన పొందుపరిచాం.

21.20 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

(1) ఒక జబ్బు వచ్చిన 20 మందిలో 18మంది బ్రతికినారు, ఇద్దరు మరణించినారు. ఈ జబ్బు చేసిన వ్యక్తి బ్రతుకుటకు సంభావ్యత 0.85 అని, 0.05 సార్థకతా స్థాయి వద్ద ఒప్పుకుంటామా ? పరీక్షించండి.

(2) తేయాకు పైన ఎక్సయిజ్ పన్ను వేయకముందు జనాభా నుండి 1000 మందిని ఒక ప్రతిరూపంగా తీసుకుంటే అందులో 800 మందిని తేనీరు త్రాగువారిగా గుర్తించడం జరిగింది. పన్ను పెంచిన తరువాత జనాభా నుండి 1200 వ్యక్తులతో కూడిన ప్రతిరూపం తీసుకొంటే 800 మంది తేనీరు త్రాగువారని తెలిసింది. పన్ను వేసిన తరువాత తేనీరు త్రాగువారి తగ్గుదల సార్థకమవునో కాదో పరీక్షించండి.

(3) ఒక సామాన్య విభాజనం యొక్క అంకమధ్యమం 0.1 మరియు క్రమ విచలనము 2.1. పరిమాణం 900 గా గల్గిన ప్రతిరూప అంకమధ్యమం 0.08 అయితే దానికి లోకం అంకమధ్యమానికి గల్గ భేదం యొక్క సార్థకతను పరీక్షించండి.

(4) 1000 మరియు 2000 పరిమాణంగా గలిగిన రెండు ప్రతిరూపాల అంకమధ్యమాలు వరుసగా 67.5 మరియు 68.0 అంగుళాలుగా ఇవ్వబడినవి. ఈ రెండు ప్రతిరూపాలు 2.5 క్రమ విచలనముగా గల్గిన ఒకే విభాజనం నుండి వచ్చిన వేమో పరీక్షించండి.

గమనిక : $\sigma_1 = \sigma_2 = 2.5 = \sigma$.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

21.21 సిఫారసు చేసిన పుస్తకాలు

1.	C.V. Seshachalapati., K. Narasimham	-	సాంఖ్యక అనుమతి (తెలుగు అకాడమి)
2.	E. Ramabhadra Sarma ., S.V. Subrahmanya Sastri	-	సంభావ్యత, సాంఖ్యక పద్ధతులు (తెలుగు అకాడమి)
3.	S.C. Gupta & V.K. Kapur	-	Fundamentals of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons Delhi

21.22 భావనలు

(1) ప్రతిరూపం (Sample) : లోకంలోని ఒక భాగము

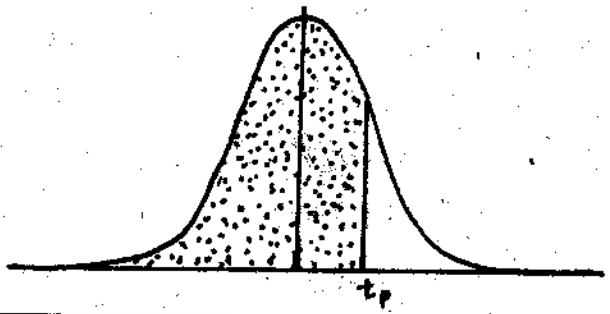
(2) పరామితి : లోకంలోని ఒక స్థిర సంఖ్య

(3)	అంచనాధారము	:	పరామితి విలువ తెలియనప్పుడు దానిని అంచనా వేయుటకు ఉపయోగించు పరిశీలనల ప్రమేయం
(4)	ప్రతిరూప విభాజనం (Sampling Distribution)	:	పరామితి అంచనాల విభాజనం
(5)	క్రమదోషం (Standard Error)	:	ప్రతిరూప విభాజనం యొక్క క్రమ విచలనము
(6)	బృహత్ప్రతిరూపం (Large Sample)	:	పరిమాణం 30 కంటె ఎక్కువగా గలిగిన ప్రతిరూపం.
(7)	శూన్య ప్రాతిపదిక (Null Hypothesis)	:	Ho
(8)	ప్రత్యామ్నాయ ప్రాతిపదిక (Alternative Hypothesis)	:	H_1
(9)	మొదటి రకం దోషం (Type I Error)	:	Ho నిజమైనప్పుడు దానిని తిరస్కరించడం.
(10)	రెండవ రకం దోషం (Type II Error)	:	H_1 నిజమైనప్పుడు దానిని తిరస్కరించడం
(11)	సందిగ్ధ ప్రాంతము (Critical Region)	:	శాంపుల్ ఆవరణంలోని ఏ భాగంలో ప్రతిరూపం ఉంటే మనం H_0 ను తిరస్కరిస్తామో ఆ భాగం.
(12)	సార్థకతా స్థాయి (Level of Significance)	:	మొదటి రకం దోషం చేసేందుకు సంభావ్యత
(13)	ద్వి పార్శ్వ పరీక్ష (Two Tailed Test)	:	ఒక విభాజనంలోని కుడి, ఎడమ కొసల క్రింద వచ్చు x విలువల సమూహాన్ని సందిగ్ధ ప్రాంతంగా ఎంచుకొంటే అది ద్విపార్శ్వ పరీక్ష అవుతుంది.
(14)	ఎడమ పార్శ్వ పరీక్ష (Left Tailed Test)	:	ప్రతిరూప విభాజనం యొక్క ఎడమ కొస క్రింద ఉండే x విలువల సముదాయాన్ని సందిగ్ధ ప్రాంతంగా తీసుకొంటే అది ఎడమ పార్శ్వ పరీక్ష అవుతుంది.

B P A O U

APPENDIX PERCENTILE VALUES (t_p) for STUDENTS DISTRIBUTION

with v degrees of freedom (shaded area = p)



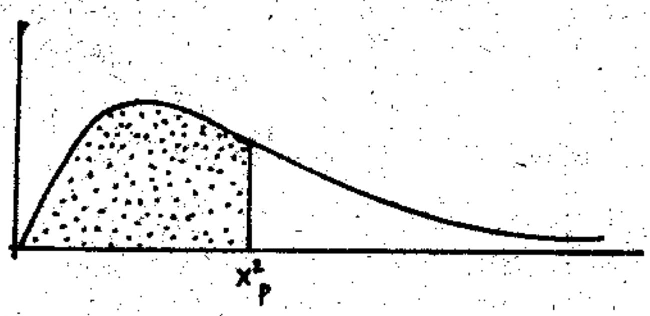
V	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4.	4.06	3.75	2.78	2.13	1.53	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6.	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7.	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8.	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	0.886	0.706	0.546	0.262	0.130
9.	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	0.889	0.703	0.543	0.261	0.129
10.	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	0.658	0.685	0.532	0.256	0.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	0-.856	0.684	0.531	0.256	0.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.683	0.531	0.256	0.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.217
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	130	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126
8	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	0.844	0.674	0.524	0.253	0.126

BRAOU

source : R.A. Fisher and F. Yates, Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research (5th edition), Table III, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, by persmission of the authors and publishers.

APPENDIX

PERCENTILE VALUES (χ^2_p) for THE CHI- SQUARE DISTRIBUTION with v degree of freedom (shaded area = p)



V	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.75}$	$\chi^2_{0.50}$	$\chi^2_{0.25}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.005}$
1.	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0. 102	0.0158	0.0039	0.0010	0. 0002	0.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575	0.211	0.103	0.0506	0.0201	0.0100
3.	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.584	0.352	0.216	0.115	0.072
4.	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.711	0.484	0.297	0.207
5.	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.831	0.554	0.412
6.	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.872	0.676
7.	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.989
8.	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9.	23.6	21.7	19.0	16.9	13.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11.	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12.	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13.	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14.	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16.	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17.	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18.	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19.	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20.	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22.	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23.	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24.	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25.	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26.	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27.	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28.	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29.	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30.	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60.	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70.	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80.	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90.	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

source : Catherine M. Thompson, Table of percentage points of the χ 2 distribution. Biometrika, Vol, 32 (1941) , by permission of the author and publisher.

BRAOU

APPENDIX
TABLE OFF - DISTRIBUTION

RATIO VARIANCE - continued 5 Per Cent. Points of e^{2z}

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	α
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4.	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5.	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6.	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7.	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8.	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9.	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10.	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11.	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12.	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13.	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14.	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15.	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16.	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17.	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96
18.	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19.	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20.	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21.	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22.	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23.	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24.	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25.	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26.	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27.	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28.	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29.	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	190	1.64
30.	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40.	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60.	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120.	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
α	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.75	1.52	1.00

Lower 5 per cent, points are found by interchange of n_1 and n_2, i.e, n_1 must always correspond with the greater mean square.

BRAOU

ఖండం - 7

సహ సంబంధం, ప్రతి గమనం

ఏక చలరాశి దత్తాంశ విశ్లేషణకు వాడే వివిధ కొలమానాలను ఐదవ ఖండంలో చర్చించాం గదా ! ఈ ఖండంలో రెండు చలరాశులు గాని అంతకు మించిన చలరాశులు గాని ఉన్నప్పుడు ఉపయోగించే పద్ధతులను తెలుసుకొందాం. ఏవైనా రెండు చలరాశుల మధ్య సంబంధం ఉందో లేదో తెలుసుకోవడానికి సహ సంబంధపు మదింపు పద్ధతిని వాడతారు. రెండు చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధమున్నప్పుడు, ఒక రాశి విలువను బట్టి రెండవ రాశి విలువను అంచనా వేయడానికి ప్రతిగమన పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు. ఈ ఖండపు మొదటి భాగంలో రెండు చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధాన్ని, ప్రతి గమనాన్ని చర్చించుకొందాం. రెండు కంటే ఎక్కువ చలరాశులున్నప్పుడు వాడే బాహుళక సహ సంబంధం, బాహుళక ప్రతిగమనం, పాక్షిక సహ సంబంధం, ప్రతిగమన గుణకం వంటి పద్ధతులను రెండవ భాగంలో తెలుసుకొందాం.

ఈ ఖండంలో గల రెండు భాగాలు :

భాగం - 22 : సహ సంబంధం, ప్రతిగమనం

భాగం - 23 : బాహుళక సహ సంబంధం, బాహుళక ప్రతిగమనం

B R A O U

ఖండం - 22 : సహ సంబంధము, ప్రతిగమనము

విషయక్రమం

22.0 ఉద్దేశాలు

22.1 పరిచయం

22.2 సహ సంబంధం - నిర్వచనాలు

22.3 వ్యాపక పటం

22.4 సహ సంబంధ గుణకము

22.4.1 సహ సంబంధ గుణకం ధర్మాలు

22.4.2 సహ సంబంధ గుణకం వివరణ

22.4.3 సహ సంబంధ గుణకం పరిమితులు

22.4.4 వర్గీకృత విభాజనానికి సహసంబంధ గుణకం

22.5 కోటి సహ సంబంధం

22.6 సహ సంబంధ గుణకం సార్థకతా పరీక్ష

22.7 ప్రతిగమన విశ్లేషణ

22.8 సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి

22.8.1 X మీద Y, Y మీద X ప్రతిగమనాల సంబంధం

22.8.2 సాంప్రదాయ సరళ రేఖాత్మక ప్రతిగమనంలో ప్రమేయాలు

22.8.3 కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాల విస్తృతులు, క్రమదోషాలు

22.8.4 కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాల ధర్మాలు

22.9 సంధాన సఫలత - నిర్ధారక గుణకం (Goodness of fit and coefficient of deter - mination)

22.10 అంచనాల సంభావ్యతా విభాజనాలు

22.11 అంతరం/అంచనా

22.12 పరికల్పనా పరీక్ష

22.13 ప్రతిగమన ఫలితాల నివేదిక

BRAOU

22.14 సారాంశము

22.15 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

22.16 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

22.17 పదకోశం

22.1 ఉద్దేశాలు

రెండు చలరాసుల మధ్యగల సహసంబంధాన్ని మదింపడం, వివరించడం ఈ భాగంలో నేర్చుకుంటారు. ఇందు చలరాశులకు నిర్దిష్ట విలువలు లేకుండా కోటులు మాత్రమే వున్నప్పుడు సహసంబంధాన్ని కనుగొనడం, వర్గీకృత విభాజనానికి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనడం కూడా నేర్చుకుంటారు.

ఒక ప్రతి రూపం ద్వారా సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొన్న తర్వాత దీన్ని వాడి చలరాసుల మధ్య లోకం (Population) లో వీటి మధ్య సహసంబంధం వుందా లేదా అనే విషయాన్ని నిర్ణయించడం నేర్చుకుంటారు.

ప్రతిగమన భావన, అంచనా వేయడం, పరికల్పనా పరీక్షలను సల్పి అంచనా వేయబడిన పరామితుల ప్రాధాన్యతను కనుగొనడం కూడా ఈ భాగంలో లో నేర్చుకుంటారు.

22.1 పరిచయం

ఒక చలరాశి స్వభావాన్ని తెలుసుకోవడానికి కేంద్రీయ విలువ, విస్తరణ మొదలగు కొలమానాలు వాడుతాము. ఇలాకాక రెండు లక్షణాలను సూచించే చలరాశుల విలువలున్నచో వాటి పరస్పర సంబంధం తెలుసుకోవడం అవసరం. కొన్ని అంశాలకు రెండు చలరాశుల విలువలున్నచో ఈ వివరాలను ద్విచల విభాజనమంటాము. ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థికి గణితంలోను, గణాంక శాస్త్రంలోను వచ్చిన మార్కులను ద్విచల విభాజన మంటాము. ఇట్టి విభాజనాన్ని తీసుకున్నప్పుడు రెండు చలరాశుల మధ్య సంబంధం ఉందా లేదా అనే విషయం చాలా ప్రాధాన్యత వహిస్తుంది. గణితంలో మార్కులు పెరుగుతున్నప్పుడు గణాంక శాస్త్రంలో మార్కులు పెరుగుతున్నాయా, తగ్గుతున్నాయా లేక రెండింటికి సంబంధం లేదా అనే ప్రశ్నకు జవాబు తెలుసుకోవాలి. సహసంబంధపు మదింపు ద్వారా ఈ ప్రశ్నలకు జవాబు చెప్పవచ్చు. రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధమున్నప్పుడు, ఒక రాశి విలువను బట్టి రెండవ రాశి విలువను అంచనా వేయడం చాలా అవసరం. దీనికి ప్రతిగమన పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాం. ఈ పాఠంలో సహసంబంధాన్ని గూర్చి ప్రతిగమనాన్ని గూర్చి తెలుసుకుందాం. ఈ విశ్లేషణను రెండు చల రాశులకు మాత్రమే పరిమితం చేద్దాం. రెండు కంటె ఎక్కువ చలరాశులున్నప్పుడు ఉపయోగించే పద్ధతులను తరువాతి పాఠంలో చర్చిద్దాం.

22.2 సహ సంబంధం - నిర్వచనాలు

ఒక చలరాశిలో మార్పు మరొక చలరాశిలో మార్పుకు కారణమైనప్పుడు వాటి మధ్య సహ సంబంధముందంటాము. ఈ పరస్పర ఆధార చలరాశులు కొంత అనుపాతంలో మార్పు చెందినపుడు వీటి మధ్య గల సహ సంబంధాన్ని సరళ రేఖీయ సహ సంబంధమంటాం.

రెండు చలరాశుల మధ్య పరస్పర సంబంధం రెండు విధాలుగా ఉండవచ్చు. రెండు చలరాశుల విలువలు ఒకే దిశలో మార్పు చెందవచ్చు. ఉదాహరణకు విద్యార్థుల ఎత్తు పెరిగినప్పుడు వారి బరువు కూడా పెరుగుతుంది. అదేవిధంగా ఒక వస్తువు ధర పెరిగినపుడు దాని సప్లయ్ పెరుగుతుంది. ఇటువంటి సహ సంబంధాన్ని ధనాత్మక సహ సంబంధమంటాం.

ఒక చలరాశి విలువ పెరిగినప్పుడు రెండవ చలరాశి విలువ తగ్గిపోవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు ధర పెరిగినపుడు దాని డిమాండ్ తగ్గుతుంది. ఇటువంటి సహ సంబంధాన్ని ఋణాత్మక సహ సంబంధ మంటాం.

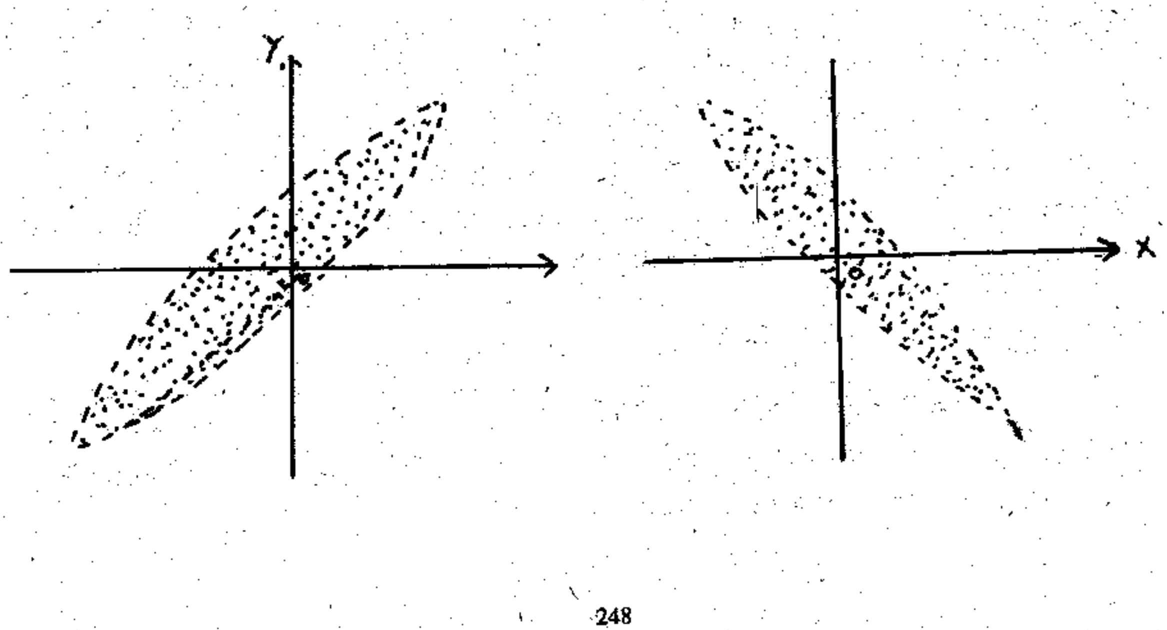
ఒక్కొక్కప్పుడు రెండు చలరాశుల మధ్య ఎట్టి సంబంధం లేకపోవచ్చు. అనగా ఒక చలరాశిలోని మార్పు వల్ల ఇంకొక చలరాశిలో మార్పు రాకపోవచ్చు. ఇట్టి చలరాశులను సంబంధ రహిత చలరాశులంటాము.

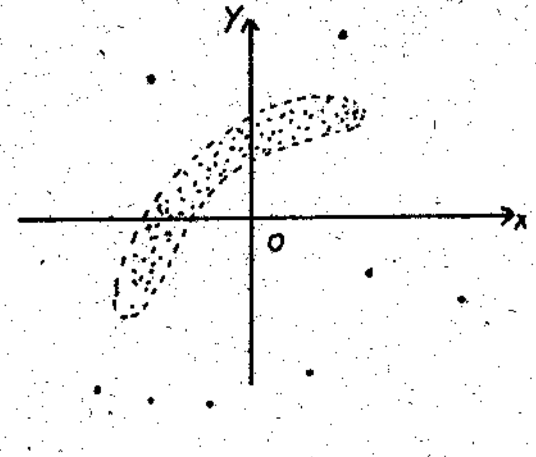
సహ సంబంధాన్ని గూర్చి తెలుసుకునేటప్పుడు రెండు ముఖ్యమైన అంశాలను గమనించాలి. (1) రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉందా లేదా ? (2) సహ సంబంధం ఉందని తెలుసుకుంటే దాన్ని సంఖ్యాత్మకంగా మదించడం ఎలా ? మొదటి అంశాన్ని గూర్చి తెలుసుకొనేందుకు వ్యాపక పటాన్ని, రెండవ అంశాన్ని గూర్చి తెలుసుకొనేందుకు సహసంబంధ గుణకాన్ని వాడతాము.

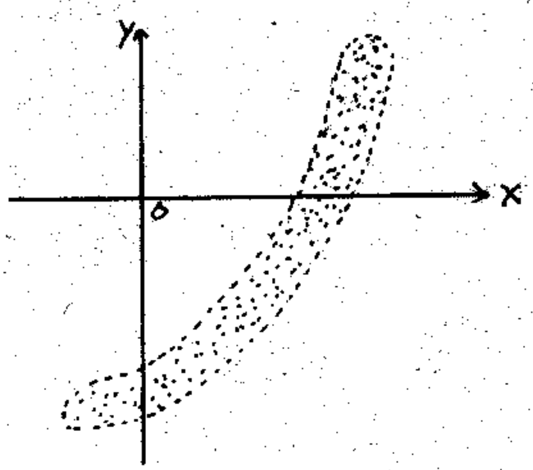
22.3 వ్యాపక పటము (Scatter Diagram)

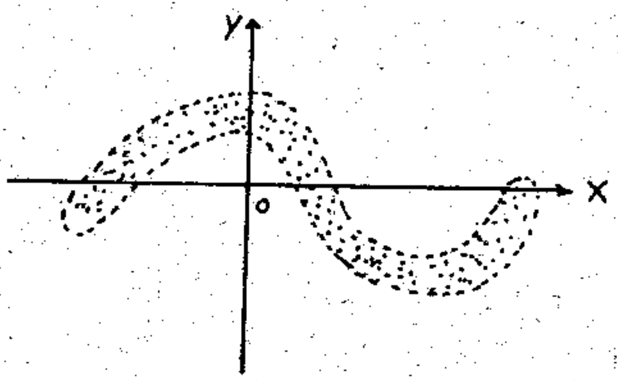
రెండు చలరాశుల విలువలను రేఖాపటంలో చూపవచ్చు. ఒక అక్షంపై ఒక చలరాశిని రెండవ అక్షంపై ఇంకొక చలరాశిని తగిన స్కేలును ఎంచుకొని గుర్తించాలి. ఈ రేఖా పటాన్ని వ్యాపక పటం అంటాం. ఈ వ్యాపక పటాన్ని పరిశీలిస్తే చలరాశుల మధ్య గల సహ సంబంధ రూపం తెలుస్తుంది. రెండు చలరాశులను X,Y లు అనుకుందాం. వీటిపై n విలువలను సేకరించామనుకుందాం. అనగా n జంట విలువలు (x_1, y_1) $(x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ ఉన్నాయి. ప్రతి జంట విలువ రేఖా పటం పై ఒక బిందువు నిస్తుంది. కాబట్టి ఈ జంట విలువల్ని రేఖా పటంపై చూపితే n బిందువులు వస్తాయి. ఈ బిందువుల క్రమాన్ని బట్టి రాశుల మధ్యగల సహ సంబంధాన్ని తెలుసుకోగలం. ఈ క్రింది రేఖా పటాలను గమనించండి.

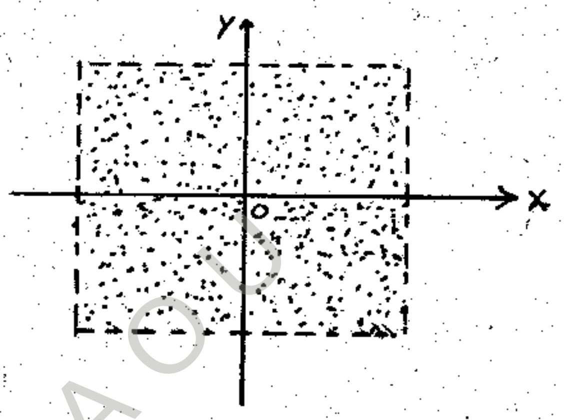
BRAOU











1) 22.1 నుండి 21.5 వరకు గల రేఖా పటాల్లో X,Y ల మధ్య సహసంబంధం కనబడుతోంది. X,Y ల విలువల మార్పులు పరస్పరాధారంగా ఉన్నాయి. అనగా వీటి మధ్య సహసంబంధం ఉంది.

2) 22.6 రేఖా పటంలో X,Y ల మధ్య సంబంధం లేదు. అనగా X,Y లు సంబంధ రహిత చలరాశులు.

3) 22.1, 22.2 పటాలలో బిందువలు సరళరేఖ చుట్టూ కేంద్రీకృతమై ఉన్నాయి. కావున వీటి మధ్యగల సహసంబంధం సరళరేఖాత్మకంగా ఉందంటాము. ఇందు 22.1వ పటంలో రెండు చలరాశులు ఒకే దిశలో మార్పు చెందుతున్నాయి. కనుక దానిని ధనాత్మక సహ సంబంధమంటాము. కాని 22.2వ పటంలో రెండు చలరాశులు వ్యతిరేక దిశల్లో మార్పు చెందుతున్నాయి. అనగా వీటి మధ్య ఋణాత్మక సహసంబంధముంది.

4) 22.3 నుండి 22.5 వరకు చూపబడిన పటాల్లో X,Y ల మధ్య సహ సంబంధం ఉంది కాని అది సరళరేఖాత్మకం కాదు. దీనిని అసరళరేఖీయ సహ సంబంధం మంటాము.

ఈవిధంగా వ్యాపక పటాల సహాయంతో రెండు చలరాశుల మధ్యగల సహ సంబంధ స్వభావాన్ని గుర్తించవచ్చు. ఇప్పుడు సహ సంబంధాన్ని మదించే పద్ధతిని తెలుసుకుందాం.

B R A O U

22.4 సహసంబంధ గుణకము (Correlation Co -efficient)

రెండు చలరాశుల మధ్యగల సరళ రేఖీయ సహ సంబంధాన్ని సంఖ్యాత్మకంగా తెలిపే పరిమాణాన్ని కార్ల్ పియర్సన్ (1857 - 1936) అనే బ్రిటిష్ జీవ శాస్త్రవేత్త ప్రతిపాదించాడు. దీనినే సహసంబంధ గుణకం అంటారు. దీనిని గూర్చి తెలుసుకునే ముందు సహ విస్తృతి (Covariance) ని గూర్చి తెలుసుకోవాలి. విస్తృతిని గూర్చి ఇదివరకే తెలుసుకున్నారు. n విలువలు గల X,Y చలరాశుల విస్తృతులను (Variance) ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$\text{Var}(X) = \sigma X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$\text{Var}(Y) = \sigma X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

ద్విచలరాశి విభాజనంలో X,Y ల జంట విలువలు $(X_1, Y_1) \ldots (X_N, Y_N)$ అయితే సహ విస్తృతిని (Covariance) ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

పై కొలతలను అంశాల (expectations) ప్రకారం ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2$$

$$\text{Var}(Y) = E[Y - E(Y)]^2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X-E(X)][Y-E(Y)]$$

సహ విస్తృతి విలువను బట్టి సరళరేఖీయ సహ సంబంధం ధనాత్మకమో ఋణాత్మకమో తెలుసుకోవచ్చు. సహ విస్తృతి ధనాత్మకమైతే ధనాత్మక సంబంధం వుందని, ఋణాత్మకమైతే ఋణాత్మక సంబంధం వుందని అర్థం. అయితే, సహ విస్తృతి విలువ X,Y ల యూనిట్లను బట్టి మారుతుంది. ఇలా మారకుండా వుండడానికి దీనిని X,Y ల క్రమ విచలనాలతో భాగిస్తాము. సహ విస్తృతిని X,Y ల క్రమ విచలనాలతో భాగించగా వచ్చిన విలువనే కార్ల పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకం అంటాము. దీనిని $r_{X,Y}$ అని రాస్తాము.

$$r_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma X \ \sigma Y} \qquad \text{———— (1)}$$

సహ విస్తృతి క్రమ విచలనాల సూత్రాలను ప్రతిక్షేపిస్తే $r_{X,Y}$ క్రింది రూపాన్ని పొందుతుంది.

$$r_{X,Y} = \frac{\frac{1}{n}\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\ \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}} \quad \text{—— (2)}$$

ఇందు $x_i = X_i - \overline{X}$; $y_i = Y_i - \overline{Y}$. అనగా x_i, y_iలు X_i, Y_i ల సగటు విలువల నుండి విచలనాలు. చలరాశుల సగటు నుండి తీసుకోబడిన విచలనాల జాత్యంతర లబ్ధాల మొత్తం వర్గాల మొత్తం యిచ్చినపుడు సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనాలంటే ఈ సూత్రం వాడుకోవాలి. $\sum x_i y_i, \sum x_i^2, \sum y_i^2$ లను విస్తరిస్తే క్రింది రూపాలొస్తాయి.

$$\begin{aligned}
\sum x_i y_i &= \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) \\
&= \sum X_i Y_i - \overline{X}\sum Y_i - \overline{Y}\sum X_i + \sum \overline{X}\,\overline{Y} \\
&= \sum X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y} - n\overline{X}\,\overline{Y} + n\overline{X}\,\overline{Y} \\
&= \sum X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y} \\
&= \sum X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum X_i \sum Y_i
\end{aligned}$$

y_i స్థానంలో x_i ని తీసుకొంటే $\sum x_i^2$ వస్తుంది.

$$\therefore \sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum X_i\right)^2$$

ఇదే విధంగా

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum Y_i\right)^2$$

పై విలువలను (2)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$r_{XY} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum X_i \sum Y_i}{\sqrt{\sum X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum X_i\right)^2}\sqrt{\sum Y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum Y_i\right)^2}}$$

లవ హారాలను n చే గుణించగా

$$r_{XY} = \frac{\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{\sqrt{\sum X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum X_i\right)^2}\sqrt{n\sum Y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum Y_i\right)^2}} \quad \text{—— (3)}$$

సహసంబంధ గుణకపు సూత్రం మూడు రూపాల్లో యివ్వబడింది. ఏ రూపాన్ని ఎప్పుడు వాడుకోవాలో తెలుసుకోవాలి. సహ విస్తృతి, క్రమ విచలనాల విలువలు ఇవ్వబడినచో 1వ రూపాన్ని, విచలనాల జాత్యంతర లబ్ధాల మొత్తం వర్గాల మొత్తాలు యివ్వబడినచో 2వ రూపాన్ని చలరాశుల విలువలిచ్చి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనమంటే మూడవ రూపాన్ని వాడతాము.

B R A O U

ఉదా : కొందరు తండ్రులను వారి కుమారులను తీసుకొని ఎత్తులు కనుగొనగా క్రింది ఫలితాలను పొందాము. తండ్రుల ఎత్తుకు కుమారుల ఎత్తుకు గల సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొని వివరించండి.

$\sum x_i y_i = 40 \qquad \sum x^2 = 84 \qquad \sum y^2 = 38$

ఇందు $x = (X - \overline{X})$; $y = (Y - \overline{Y})$

సాధన : $r_{XY} = \frac{\sum x y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$

$= \frac{40}{\sqrt{84}\ \sqrt{38}}$

$= 0.70$

ధనాత్మక సహసంబంధం వుంది కనుక తండ్రుల ఎత్తు పెరిగితే కుమారుల ఎత్తుకూడ పెరుగుతోందని అర్థం.

ఉదా : 24 కుటుంబాల నుంచి నెలసరి మొత్తం వ్యయాలను ఆహారంపై వ్యయాన్ని కనుగొనగా క్రింది మొత్తాలను పొందాము. ఈ రెండు చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

$\sum X_i = 24\ 07 \qquad \sum Y_i = 1712$

$\sum X_i^2 = 301121 \qquad \sum Y_i^2 = 146569$

$\sum X_i Y_i = 204330$

సాధన : $r_{XY} = \frac{n \sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{\sqrt{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^1}\ \sqrt{n \sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2}}$

$= \frac{24 \times 204330 - 2407 \times 1712}{\sqrt{24 \times 301121 - 2407 \times 2407}\ \sqrt{24 \times 146569 - 1712 \times 1712}}$

$= \frac{783136}{1197.19 \times 765.97} = 0.854$

పై సహ సంబంధ గుణకాన్ని బట్టి మొత్తం వ్యయం పెరుగుతూంటే ఆహార వ్యయం కూడా పెరుగుతోందనీ, మొత్తం వ్యయం తగ్గుతూంటే ఆహార వ్యయం కూడా తగ్గుతోందని చెప్పవచ్చు.

ఉదా : ఒక తరగతిలో 11 మంది విద్యార్థులకు గణితము, సాంఘిక శాస్త్రములలో లభించిన మార్కులు దిగువ ఇవ్వబడినవి. ఈ రెండు విషయాల సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

B R A O U

గణితము :	45	55	56	58	60	65	68	70	75	80	85
సాంఫిక : శాస్త్రము	56	50	48	60	62	64	65	70	74	82	90

సాధన: గణితము, సాంఫిక శాస్త్రములలో లభించిన మార్కులను వరుసగా X,Y లతో సూచించాలి. r_{XY} పై మూలబిందువు మార్పిడి ప్రభావం లేదు. కాబట్టి X,Y లను U,V లుగా, $U = X - 65$, $V = Y - 70$ ల ద్వారా పరివర్తన చేస్తే,

$$r_{XY} = r_{UV} = \frac{Cov(U,V)}{[Var(U).\ Var(V)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{n\sum U_iV_i - \left(\sum U_i\right)\left(\sum V_i\right)}{\left[\left\{n U_i^2 - \left(\sum U_i\right)^2\right\}\left\{n V_i^2 - \left(\sum V_i\right)^2\right\}\right]^{1/2}}$$

X	Y	U= X-65	V = Y-70	U^2	V^2	UV
45	56	- 20	- 14	400	196	280
55	50	- 10	- 20	100	400	200
56	48	- 9	- 22	81	484	198
58	60	- 7	- 10	49	100	70
60	62	- 5	- 8	25	64	40
65	64	0	- 6	0	36	0
68	65	3	- 5	9	25	-15
70	70	5	0	25	0	0
75	74	0	4	100	16	40
80	82	15	12	225	144	180
85	90	20	20	400	400	400
		2 $= \sum U$	- 49 $= \sum V$	1414 $\sum U^2$	1865 $= \sum V^2$	1393 $= \sum UV$

వీటిని పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$r_{XY} = r_{UV} = \frac{11 \times 1369 - (2)(-49)}{\left[\left\{11 \times 1414 - (2)^2\right\}\left\{11 \times 1865\ \ (-49)^2\right\}\right]^{1/2}}$$

$$\therefore r_{XY} = \frac{15421}{[15550 - 18114]^{1/2}} = 0.9188$$

గణితంలో ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులకు సాంఫీక శాస్త్రంలో ఎక్కువ మార్కులు వచ్చాయని, గణితంలో తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులకు సాంఫీక శాస్త్రంలో కూడా తక్కువ మార్కులు వచ్చాయని వివరించవచ్చు.

BRAOU

22.4.1 సహసంబంధ గుణకం ధర్మాలు(Properties of the Correlation Co-eficient)

1) చలరాశుల మూల బిందువును కాని స్కేలును కాని మార్చడం వల్ల సహ సంబంధ గుణకం విలువ మారదు.

ఉపపత్తి : X చలరాశిని మూల బిందువు నుండి a యూనిట్లు జరిపి, స్కేలును h యూనిట్లు మార్చుదాము. Y చలరాశిని మూల బిందువు నుండి b యూనిట్లు జరిపి స్కేలును k యూనిట్లు మార్చుదాము. ఇలా మార్చబడిన చలరాశులను క్రమంగా U,V అని పిలుద్దాము.

$$U = \frac{X - a}{h} \quad \therefore X - hU + a$$

$$V = \frac{Y - b}{k} \quad \therefore Y = kV + b$$

$$\overline{X} - h\overline{U} + a \quad ; \overline{Y} = k\overline{V} + b$$

$$X - \overline{X} = h(U - \overline{U}) \quad ; Y - \overline{Y} = r(V - \overline{V})$$

$$\therefore r_{XY} = \frac{\frac{1}{n}\Sigma\ (X_i - \overline{X})\ (Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\ (X_i - \overline{X})}\ \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\ (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\Sigma h(V_i - \overline{V})\ k(V_i - \overline{V})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma h^2 (U_i - \overline{U})}\ \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma k^2 (V_i - \overline{V})}}$$

$$= \frac{hk\frac{1}{n}\Sigma\ (U_i - \overline{U})\ (V_i - \overline{V})}{hk\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\ (U_i - \overline{U})^2}\ \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\ (V_i - \overline{V})^2}}$$

$$= r_{UV}$$

కాబట్టి, X,Y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం విలువ వీటి మూల బిందువును స్కేలును మార్చగా వచ్చిన U,V ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం విలువ ఒక్కటే.

2) రెండు స్వతంత్ర చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధ గుణకము శూన్యము.

ఉపపత్తి : సహ సంబంధ గుణకం శూన్యం కావాలంటే సహ విస్తృతి శూన్యం కావాలి. అశంశల ప్రకారం సహ విస్తృతిని నిర్వచిస్తే సులభంగా రుజువు చేయవచ్చు. ఇక్కడ ఒక సూత్రాన్ని వాడతాము. X,Y లు స్వతంత్ర చలరాశులైతే E (XY) = E (X) E (Y) అవుతుంది.

$$Cov\ (X,Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

$$= E[XY - Y E(X) - X E(Y) + E(X) E(Y)]$$

BRAOU

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$$

$$= 0.$$

దీని విపర్యం సత్యం కాకపోవచ్చు. అనగా సహసంబంధ గుణకం శూన్యమైనంత మాత్రాన స్వతంత్ర చలరాశులు కానవసరం లేదు. దీనికి ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాము.

X చలరాశి -1, 0, 1 విలువలు తీసుకుంటోంది. వీటి సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ అనుకుందాము. ఇప్పుడు X, X^3 ల అశంసిత విలువలు శూన్యమని గమనించండి.

$$E(X) = (-1)\frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0$$

$$E(X^3) = (-1)^3\frac{1}{4} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{4} = 0$$

X ను ఒక చలరాశిగాను X^2 ను రెండవ చలరాశిగాను తీసుకుందాము. అనగా రెండు చలరాశులు స్వతంత్రాలు కావు. కాని X, X^2 ల మధ్య సహ విస్తృతి శూన్యమని గమనించవచ్చు.

$$Cov(X, X^2) = E[(X - E(X))]\left[(X^2 - E(X^2)\right]$$

$$= E(X^2) - E(X^2)E(X) - E(X)E(X^2) + E(X)E(X^2) = 0$$

కాబట్టి సహ సబంధ గుణకం శూన్యమైనంత మాత్రాన స్వతంత చలరాశులు కానవసరంలేదు. దీనికి కారణం సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు. స్వతంత్ర చలరాశులంటే సహసంబంధం లేనివి. అనగా సరళరేఖీయ సహ సంబంధంగాని అసరళరేఖీయ సహ సంబంధంగాని లేనివి. సహసంబంధ గుణకం శూన్యమైనపుడు సరళరేఖీయ సహసంబంధం లేదని అర్థం. అంత మాత్రాన అసరళరేఖీయ సహ సంబంధం లేదని చెప్పలేము.

BRAOU

(3) సహ సంబంధ గుణకం కనిష్ఠ విలువ -1 ; గరిష్ఠ విలువ 1. అనగా సహ సంబంధ గుణకం (-1,1) హద్దులలో వుంటుంది.

ఉపపత్తి : ఇక్కడ స్వార్జ్ అసమానతను వాడతాము. దీని ప్రకారం $a_1, a_2, \ldots, a_n$ అనునవి n వాస్తవ సంఖ్యలై $b_1, b_2, \ldots, b_n$ కూడా a వాస్తవ సంఖ్యలైతే

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

అనగా $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

సమానత ధర్మం $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ అయినప్పుడు వర్తిస్తుంది.

$$r_{XY}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

$$\sum x_i y_i = \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$\sum x_i^2 = \sum (X_i - \overline{X})^2$$

$$\sum y_i^2 = \sum (Y_i - \overline{Y})^2$$

$$r^2_{XY} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

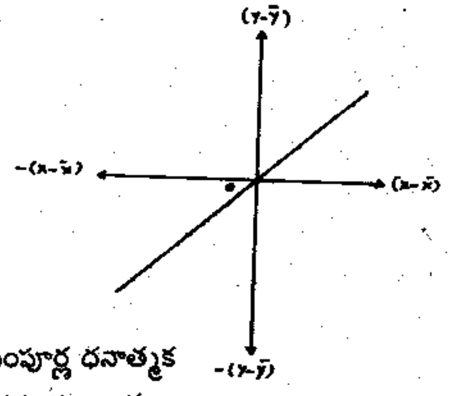
≤ 1 (స్వార్జ్‌అసమానత వల్ల)

$\therefore$ r_{XY} సాపేక్ష విలువ ≤ 1

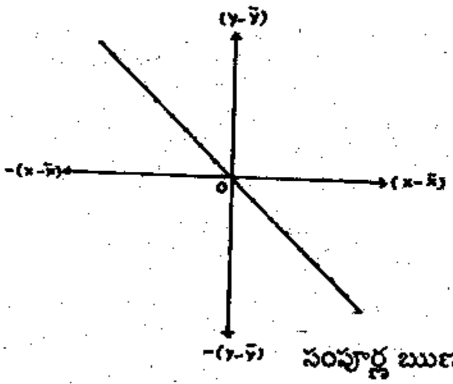
$\therefore -1 \leq r_{XY} \leq 1$

BRAOU

గమనిక : $r_{XY} = \pm 1$ అయినచో (X_i, Y_i) లను సూచించే బిందువులన్నీ సరళరేఖపై వుంటాయి. ఎందుకంటే $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}= \dots = \frac{x_n}{y_n}$ అయినప్పుడే $r_{XY} = \pm 1$ అవుతుంది. అనగా $y_i = m x_i$, $i = 1,2,\dots,n$. కనుక (x_i, y_i) బిందువులు m వాలు గల సరళరేఖపై వుంటాయి. ఇట్టి సహ సంబంధాన్ని పరిపూర్ణ సహ సంబంధం అంటాము. m ధనాత్మకమైతే సహ సంబంధగుణకం 1 అవుతుంది. దీనిని పరిపూర్ణ ధనాత్మక సహ సంబంధం (perfect positive correlation) అంటాము. ఇదే విధంగా $r_{XY} = -1$ అయినచో బిందువులన్నీ ఋణాత్మక వాలుగాల సరళ రేఖపై వుంటాయి. దీనిని పరిపూర్ణ ఋణాత్మక సహ సంబంధం (perfect negative correlation) అంటాము. ఈ విషయాలను కింది వ్యాపక పటాల్లో గమనించండి.



సంపూర్ణ ధనాత్మక సహ సంబంధం



సంపూర్ణ ఋణాత్మక సహ సంబంధం

22.4.3 సహసంబంధ గుణకం వివరణ

సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనడంలో ముఖ్యోద్దేశం రెండు చలరాసుల మధ్యగల సంబంధపు దృఢత్వాన్ని కనుగొనడం. ఈ విలువను బట్టి ఒక సిద్ధాంతానికి సంఖ్యాపరమైన ఋజువును కనుగొనడం లేదా సంఖ్యాపరమైన ఆధారాలను బట్టి కొత్త సిద్ధాంతాలను కనుగొనడం. కార్ల్ పియర్సన్ గుణకాన్ని కనుగొన్న తర్వాత ఆ గుణకాన్ని వివరించడం చాలా ముఖ్యం. ఉదాహరణకు ఎరువు వాడకానికి, పంట దిగుబడికి సహ సంబంధ గుణకం 0.6 అనుకుందాం. ఉన్ని వస్త్రాల అమ్మకానికి ఉష్ణోగ్రతకు సహ సంబంధ గుణకం - 0.95 అనుకుందాం. ఈ ఫలితాలను వివరించే పద్ధతి తెలుసుకుందాం.

సహసంబంధ గుణకాన్ని వివరించేటప్పుడు రెండు అంశాలను గమనించాలి. ఒకటి గుణకపు సంకేతము. ఇది ధనాత్మకమైతే రెండు చలరాసుల్లోని మార్పు ఒకే దిశలో ఉందని అర్థం. అనగా ఒక చలరాసిలోని విలువలు పెరుగుతూంటే (తగ్గుతూంటే) రెండవ దానిలోని విలువలు కూడా పెరుగుతున్నాయని (తగ్గుతున్నాయని) అర్థం. మొదటి ఉదాహరణలో సహసంబంధ గుణకం ధనాత్మకం. కనుక ఎరువు వాడకం పెరుగుతూంటే (తగ్గుతూంటే) పంట దిగుబడి పెరుగుతోందని (తగ్గుతోందని) వివరించాలి. సహ సంబంధ గుణకం ఋణాత్మకమైతే ఒక చలరాసి విలువ పెరుగుతోంటే (తగ్గుతోంటే) మరొక చలరాసి విలువ తగ్గుతోందని (పెరుగుతోందని) అర్థం. కనుక రెండవ ఉదాహరణలో సహ సంబంధ గుణకం ఋణాత్మకం. ఉష్ణోగ్రత పెరుగుతోంటే ఉన్ని వస్త్రాల గిరాకీ తగ్గుతోందని వివరిస్తాం.

సహ సంబంధ గుణకపు సంకేతంలో రెండు చలరాసులలోని సంబంధపు స్వభావాన్ని మాత్రమే తెలుసుకున్నాం. ఈ సంబంధపు దృఢత్వాన్ని తెలుసుకోవాలంటే గుణకపు విలువను పరిశీలించాలి. ఈ విలువ 1 లేదా -1కి దగ్గర అవుతుంటే సంబంధం దృఢమౌతోందని అర్థం. అలాకాక శూన్యానికి దగ్గరవుతూంటే సంబంధ బలహీనమౌతోందని అర్థం. పై ఉదాహరణలో ఎరువు, పంట దిగుబడుల సంబంధం కంటె ఉన్ని వస్త్రాల అమ్మకాలకు ఉష్ణోగ్రతకు గల సంబంధం ఎక్కువ దృఢమైంది.

22.4.3 సహ సంబంధ గుణకం - పరిమితులు

సహ సంబంధ గుణకాన్ని బట్టి కార్యకారణ సంబంధాన్ని నిర్ణయించలేము. ఈ నిర్ణయం సిద్ధాంత పరమైంది. సహ సంబంధ గుణాకాన్ని బట్టి ఎరువుకు పంట దిగుబడికి గల సంబంధ స్వభావాన్ని , దృఢత్వాన్ని తెలుసుకున్నాం. కాని ఎరువు వల్ల పంట దిగుబడి మారుతోందని ఈ గుణకాన్ని బట్టి చెప్పలేము. ఈ విషయం మనకు సిద్ధాంతపరంగా తెలుసు. కనుక అలా నిర్ణయించవచ్చు. ఇంకొక ఉదాహరణ తీసుకొందాం. శ్రామిక ఉత్పాదకతకు ఆహార వినియోగానికి ధనాత్మక సంబంధ గుణకం 0.6 వచ్చిందనుకుందాం. దీనినిబట్టి ఆహార వినియోగం పెరుగుతుంటే శ్రామిక ఉత్పాదకత పెరుగుతోందని మాత్రమే చెప్పగలం. ఏది కారణమో , ఏదీ ఫలితమో అంచనా వేయలేము. తక్కువ ఉత్పాదకత వల్ల తక్కువ వినియోగం కావచ్చు. లేదా తక్కువ వినియోగం వల్ల తక్కువ ఉత్పాదకత కావచ్చు. ఈ విషయాన్ని సిద్ధాంతపరంగానే తెల్పుకోవాలి.

కేవలం సహసంబంధ గుణకం విలువను బట్టి సహ సంబంధాన్ని పూర్తిగా నిర్ధారణ చేయలేము. ఒక్కొక్కప్పుడు సంబంధంలేని రాశులమధ్య గుణకం విలువ శూన్యం కాకపోవచ్చు. దానిని అర్థ రహిత సహ సంబంధం (spurious correlation)అంటాము. ఉదాహరణకు వర్షపాతానికి శ్రామిక ఉత్పత్తికి సహ సంబంధ గుణకం 0.4 వచ్చిందనుకుందాం. దానిని బట్టి వర్షపాతం పెరుగుతుంటే పారిశ్రామిక ఉత్పత్తి పెరుగుతుందని చెప్పలేము.

B R A O U

సహసంబంధ గుణకం శూన్యమైనంత మాత్రాన రెండు చలరాశులు సంబంధ రహితాలని చెప్పలేము. ఎందుకంటే మనం కనుగొన్నది సరలరేఖాత్మక సహ సంబంధం మాత్రమే. అసరళరేఖాత్మక సంబంధం ఉండవచ్చు. కారల్ పియర్సన్ సహ సంబంధ గుణకం ఇట్టి సందర్భాన్ని వివరించదు.

22.4.4 వర్గీకృత ద్విచల విభాజనానికి సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనడం

సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనవలసిన చలరాశులు వర్గీకృతమై వుండవచ్చు. X చలరాశి n వర్గాలుగాను y చలరాశి m వర్గాలు గాను విభజించబడితే ద్విచలరాశి పట్టిక లేదా సహ సంబంధ పట్టిక కింది విధంగా వుంటుంది.

Y / X	y_1 y_2 .... y_j .... y_m	మొత్తం = X ఉపాంత పౌన : పున్యాలు
x_1	f_{11} f_{12} .... f_{1j} .... t_{1m}	$f_{1.}$
x_2	f_{21} f_{22} .... f_{2j} .... t_{2m}	$f_{2.}$
.	.	.
.	.	.
x_i	f_{i1} f_{i2} .... f_{ij} .... t_{im}	$f_{i.}$
.	.	.
.	.	.
x_n	f_{n1} f_{n2} .... f_{nj} .... f_{nm}	$f_{n.}$
మొత్తం = y ఉపాంత పౌన పున్యాలు	$f_{.1}$ $f_{.2}$ .... $f_{.j}$ .... $f_{.m}$	N

BRAOU

పై పట్టికలో $x_1 \ldots x_n$ లు X చలరాశికి చెందిన తరగతుల మధ్య విలువలు. ఇదే విధంగా $y_1 \ldots \ldots y_m$ లు Y చలరాశికి చెందిన తరగతుల మధ్య విలువలు. పట్టిక లోని n x m గదులలో పౌన : పున్యాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఉదాహరణకు X చలరాశి i వ తరగతిలోను Y చలరాశి j వ తరగతిలోను f_{ij} సార్లు వుంటోంది. ప్రతి అడ్డువరుసలోని పౌన : పున్యాలను కూడగా X చలరాశి ఉపాంత పైన : పున్యం వస్తుంది. అనగా $\sum_{j=1}^{m} f_{ij}$. X చలరాశి i వ తరగతి ఉపాంత పౌన : పున్యం . దీనిని f_{i1} తో సూచిస్తాము. ఇదేవిధంగా Y చలరాశి j వ తరగతి ఉపాంత పౌన : పున్యాన్ని తెలుసుకోగలము.

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ij} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$$

పౌన : పున్యాల మొత్తం జంట విలువల సంఖ్యకు సమానం.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} = \sum_{i=1}^{n} f_{.j} = \sum_{j=1}^{n} f_{i.} = N$$

ఇప్పుడు సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొందాము.

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij} X_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{i.} \; X_i$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_{ij} Y_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} f_{.j} \; Y_j$$

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_{i.} X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$Var(\;Y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m} f_{.j} Y_j - \overline{Y}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i}\sum_{j} f_{ij} X_i Y_j - \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$\therefore r_{XY} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i}\sum_{j} fij\, X_i x_j - \overline{X}\,\overline{Y}}{\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_{i.} X_i^2 - \overline{X}^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f_{.j} Y_j^2 - \overline{Y}^2\right)\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{N\sum_{i}\sum_{j} f_{ij} X_i X_j - \overline{X}\,\overline{Y}}{\left[\left(N\sum_{i} f_{i.} X_i^2 - \overline{X}^2\right)\left(N\sum f_{.j} Y_j^2 - \overline{Y}^2\right)\right]^{1/2}}$$

ఉదా : ఒక తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థుల మానసిక సామర్థ్యం వారి వయస్సు , వారు పొందిన మార్కుల గణాంకాలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

వయస్సు సం ॥లలో	18	19	20	21	మొత్తం
మార్కులు					
10 - 20	4	2	2	-	8
20 - 30	5	4	6	4	19
30 - 40	6	8	10	11	35
40 - 50	4	4	6	8	22
50 - 60	-	2	4	4	10
60 - 70	-	2	3	1	6
మొత్తం	19	22	31	28	100

BRAOU

సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

సహ సంబంధ పట్టిక

V	Y	u/x	-1	0	1	2	మొత్తం f(v)	vf(v)	$vf^2(v)$	Σuv f(u,v)
		మార్కులు	18	19	20	21				
-2	15	10 - 20	4 (8)	2 (0)	2 (-4)		8	-16	32	4
-1	25	20 - 30	5 (5)	4 (0)	6 (-6)	4 (-8)	10	-19	19	-9
0	35	30 - 40	6 (0)	8 (0)	10 (0)	11 (0)	35	0	0	0
1	45	40 - 50	4 (-4)	4 (0)	6 (6)	8 (16)	22	22	22	18
2	55	50 - 60		2 (0)	4 (8)	4 (16)	10	20	40	24
3	65	60 - 70		2 (0)	3 (9)	1 (6)	6	18	54	15
		మొత్తం f(u)	19	22	31	28	100	25	167	52
		uf (u)	-19	0	31	56	68			
		u2 f(u)	19	0	31	112	162			
		u Σ v f(u,v)	9	0	13	30	52			

$$U = X - 19, \ V = \frac{Y - 35}{10}$$

$$\overline{U} = \frac{1}{N} \sum_u uf(u) = \frac{68}{100} = 0.68$$

$$\overline{V} = \frac{1}{N} \sum_u vg(v) = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$Cov(u,v) = \frac{1}{N} \sum_u \sum_v UVf(u,v) - \overline{U}\,\overline{V}$$

$$= \frac{1}{100} \times 52 - 0.68 \times 0.25 = 0.35$$

$$\sigma U^2 = \frac{1}{N} \sum_U U^2 f(u) - \overline{U}^2$$

$$= \frac{162}{100} - (0.68)^2 = 1.1576$$

$$\sigma v^2 = \frac{1}{N} \sum_v v^2 g(v) - \overline{V}^2$$

BRAOU

$$= \frac{167}{100} - (0.25)^2 = 1.6075$$

$$\therefore r_{UV} = \frac{Cov\,(U,V)}{\sigma U\ \sigma V}$$

$$= \frac{0.35}{\sqrt{1.1576 \times 1.6075}} = 0.25$$

సహ సంబంధ గుణకము మూల బిందువు మార్పుచేత గాని స్కేలు మార్పు చేత గాని మారదు.

$\therefore r_{XY} = r_{UV} = 0.25$

గమనిక : సహ సంబంధ పట్టికలో సున్న చుట్టి ఉన్న అంకెలు UVf (u,v).

222.5 కోటి సహ సంబంధము (Rank Correlation)

ఒక్కొక్కప్పుడు ఒక అంశానికి చెందిన లక్షణాన్ని ఖచ్చితంగా తెలుపలేము. కాని ఇతర అంశాలతో పోల్చి ఏ అంశం ఎక్కువో ఏ అంశం తక్కువో నిర్ణయించవచ్చు. అనగా కోటులను నిర్ణయించగలము. ఈ కోటులను వాడి కూడా సహ సంబంధ గుణాన్ని కనుగొనవచ్చు. X,Y చలరాశుల కోటుల జంట విలువలు

$(X_1, Y_1) \ldots (X_n, Y_n)$ అనుకుంటే సహ సంబంధ గుణకం r

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}}$$

ఇందు $x_i = X_i - \overline{X}$ మరియు $y_i = Y_i - \overline{Y}$. కోటుల ఆధారంగా కనుగొన్న ఈ సహ సంబంధాన్ని స్పియర్‌సన్ కోటి సహ సంబంధ గుణకం అంటారు. చలరాశుల విలువలకు బదులు కోటులను తీసుకోవడం తప్ప కార్ల్ పియర్సన్ సహ సంబంధ గుణకానికీ దానికీ ఏమీ తేడా లేదు. అయితే ఈ సూత్రాన్ని సూక్ష్మీకరించి వ్రాయవచ్చు. కోటుల వ్యత్యాసాలను $d_1, d_2, \ldots, d_n$ లతో సూచిస్తే

$$r = 1 - \frac{6 \sum d i^2}{n (n^2-1)}$$

ఉదా 1 : 16 మంది విద్యార్థులకు గణితము, భౌతికశాస్త్రాలలో ఈ క్రింది విధంగా కోటులు నిర్ణయింపబడెను. కుండలీకరణంలో గల రెండు అంకెలు గణితము, భౌతిక శాస్త్రాలలో కోటులను తెలుపుతాయి.

(1,1) (2,10) (3,3) (4,4) (5,5) (6,7) (7,2) (8,6) (9,8) (10,11) (11,15) (12,9) (13,14) (14,12) (15,16) (16,13)

గణితము , భౌతిక శాస్త్రాలలో వారి సామర్థ్యాల మధ్యగల కోటి సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన :

గణితములో కోటులు (X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	మొత్తం
భౌతిక శాస్త్రంలో కోటులు (Y)	1	10	3	4	5	7	2	6	8	11	15	9	14	12	16	13	
d = X - Y	0	-8	0	0	0	-1	5	2	1	-1	-4	3	-1	2	-1	3	0
d^2	0	64	0	0	0	1	25	4	1	1	16	9	1	4	1	9	136

కోటి సహ సంబంధ గుణకము = r_{xy}

$$r_{xy} = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 136}{16 \times 255} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

ఉదా 2 : ఒక సంగీత పోటిలో 10 మంది పోటీదారుల కోటులను A,B,C అనే న్యాయనిర్ణేతలు ఈ క్రింది పద్ధతిలో నిర్ణయించారు.

A ఇచ్చిన కోటులు :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
B ఇచ్చిన కోటులు :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
C ఇచ్చిన కోటులు :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

కోటి సహ సంబంధ పద్ధతిని ఉపయోగించి సంగీతంలో ఏ ఇద్దరు న్యాయ నిర్ణేతల అభిరుచులు దగ్గరగా ఉన్నాయో చర్చించండి.

BRAOU

సాధన : ఇక్కడ n = 10

A ఇచ్చిన కోటులు (X)	B ఇచ్చిన కోటులు (Y)	C ఇచ్చిన కోటులు (Z)	d_1 = X-Y	d_2 = X-Z	d_3 = Y - Z	d_1^2	d_2^2	d_3^2
1	3	6	-2	-5	-3	4	25	9
6	5	4	1	2	1	1	4	1
5	8	9	-3	-4	-1	9	16	1
10	4	8	6	-2	-4	36	4	16
3	7	1	-4	2	6	16	4	36
2	10	2	-8	0	8	64	0	64
4	2	3	2	1	-1	4	1	1
9	1	10	8	-1	-9	64	1	81
7	6	5	1	2	1	1	4	1
8	9	7	-1	1	2	1	1	4
మొత్తం			$\Sigma d_1 = 0$	$\Sigma d_2 = 0$	$\Sigma d_3 = 0$	$\Sigma d_1^2 = 200$	$\Sigma d_2^2 = 60$	$\Sigma d_3^2 = 214$

$$r(X, Y) = 1 - \frac{6 \Sigma d_1^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 200}{10 \times 99} = 1 - \frac{40}{30} = -\frac{7}{33}$$

$$r(X, Z) = 1 - \frac{6 \Sigma d_2^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 60}{10 \times 99} = 1 - \frac{4}{11} = -\frac{7}{11}$$

$$r(Y, Z) = 1 - \frac{6 \Sigma d_3^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 214}{10 \times 99} = -\frac{49}{165}$$

r (X,Z) ల మధ్య సహ సంబంధం గరిష్ఠంగా ఉంది కాబట్టి A,C లు ఒకే రకమైన అభిరుచి కలవారని నిర్ణయించవచ్చు.

ఉదా 3 : ఈ క్రింది దత్తాంశాలకు కోటి సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

X : 68, 64, 75, 50, 64, 80, 75, 40, 55, 64.

Y : 62, 58, 68, 45, 81, 60, 68, 48, 50, 70.

B R A O U

సాధన :

X	Y	కోటి X (x)	కోటి Y (y)	d = x - y	d^2
68	62	4	5	-1	1
64	58	6	7	- 1	1
75	68	2.5	3.5	- 1	1
50	45	9	10	- 1	1
64	81	6	1	5	25
80	60	1	6	- 5	25
75	68	2.5	3.5	- 1	1
40	48	10	9	1	1
55	50	8	8	0	0
64	70	6	2	4	16

$\Sigma d = 0 \quad \Sigma d^2 = 72$

పై శ్రేణులలో 75 రెండుసార్లు వచ్చింది. ఈ రెండు విలువలకు సామాన్యకోటి అయిన 2.5 అనగా 2,3ల సగటును ఇచ్చాము. 64 మూడుసార్లు వచ్చింది. ఈ మూడింటికి 5,6,7ల సరాసరి అయిన 6ను కోటిగా ఇచ్చాము. అలాగే పై శ్రేణులలో 68 రెండుసార్లు వచ్చింది. కనుక 3,4 సరాసరైన 3.5 ను కోటిగా ఇచ్చాము. ఈ సామాన్య కోటుల వల్ల కోటి సహసంబంధ సూత్రాన్ని సరిదిద్దాలి. Σd^2 కు

$$\frac{2\,(4\text{-}1)}{12} + \frac{3\,(9\text{-}1)}{12} + \frac{2\,(4\text{-}1)}{12} = 3 \text{ కలపాలి}$$

$$\therefore r_{XY} = 1 - \frac{6(\Sigma d^2 + 3)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\,(72+3)}{10\,(99)} = 0.545.$$

22.6 సహసంబంధ గుణకపు ప్రాధాన్యతల పరీక్ష

దత్తాంశాలను బట్టి సహ సంబంధపు గుణకాన్ని కనుగొన్న తర్వాత ఆ విలువ ఆధారంగా రాశుల మధ్య సంబంధముందో లేదో నిర్ణయించాలి. గుణకం విలువ శూన్యం కానంత మాత్రాన రాశుల మధ్య సంబంధముందని చెప్పలేము. ఎందుకంటే ప్రతిరూప చాంచల్యాల వల్ల గుణకం విలువ శూన్యం కాకపోవచ్చు. అందుచే సాంఖ్యకపరంగా పరీక్షించి గుణకం విలువ శూన్యం కంటే ప్రముఖంగా వేరవుతోందో లేదో నిర్ణయిస్తాడు. ఈ పరీక్షకు రెండు పద్ధతులున్నాయి. మొదటి పద్ధతిలో ప్రతిరూప దత్తాంశాల నుండి వచ్చిన గుణకం విలువను తీసుకుని లోక సంబంధ గుణకం ఏ హద్దుల్లో ఉంటుందో నిర్ణయిస్తాము. అనగా లోక సంబంధ గుణకం విలువ ఈ హద్దుల్లో ఏ విలువైనా కావచ్చని అర్థం. అందుచే శూన్యం కూడా ఈ హద్దులో ఉంటే మనం గణించిన సహ సంబంధ గుణకం విలువ సాంఖ్యకపరంగా శూన్యంకంటే వేరుకాదని నిర్ణయిస్తాము. ఈ హద్దులను కనుగొనడానికి సహ సంబంధ చార్టును వాడతాము. రెండవ పద్ధతిలో సహ సంబంధ గుణకం విలువ నుంచి t విలువను కింది విధంగా గణిస్తాము.

BRAOU

$$t = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/n-2}}$$

ఇందు n దత్తాంశాల సంఖ్య, r సహ సంబంధ గుణకం. n-2 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు 5 శాతం ప్రాధాన్యతకు t విభాజన పట్టిక నుండి క్లిష్ట విలువను తీసుకుంటాం. పై సూత్రం ప్రకారం వచ్చిన విలువ పట్టిక విలువ కంటె హెచ్చుగా నున్నచో విలువ శూన్యం కాదని నిర్ణయిస్తాము. తక్కువగా ఉన్నచో విలువ శూన్యంగా భావిస్తాము.

ఉదా : ప్రతిరూప దత్తాంశాల నుండి విలువ 0.2గా గ్రహించాము. అంశాల సంఖ్య 10. దాని సాంఖ్యక ప్రాధాన్యతను గుణించండి.

సాధన : $n = 10$ $r = 0.2$

$$t = \frac{0.2}{\sqrt{(1 - 0.04)/8}} = 0.577$$

ఆ స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు 5% ప్రాధాన్యత వద్ద t పట్టిక విలువ 2.306. సూత్రం ప్రకారం వచ్చిన విలువ (0.577) పట్టికలోని విలువ కంటే తక్కువ కనుక సహ సంబంధ గుణకాన్ని శూన్యంగానే తీసుకోవాలి.

ఉదా : 100 అంశాలను తీసుకున్నప్పుడు సహ సంబంధ గుణకం 0.2 అయితే సాంఖ్యాత్మకంగా ప్రాధాన్యమైనదా ? కాదా.?

సాధన : $n = 100$ $r = 0.2$

$$t = \frac{0.2}{\sqrt{(1 - 0.04)/98}} = 2.021$$

98 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు 5% ప్రాధాన్యత వద్ద t విలువ 1.99 పై సూత్రం ప్రకారం గణించిన t విలువ పట్టిక విలువ కంటే ఎక్కువ ఉంది. కనుక సహ సంబంధ గుణకం శూన్యం కాదు. అనగా రెండు చల రాశులకు మధ్య సాంఖ్యాత్మకంగా ప్రధానమైన సంబంధం ఉంది.

B R A O U

గమనిక : పై రెండు ఉదాహరణలను బట్టి సహ సంబంధ గుణకం ప్రాధాన్యత అంశాల సంఖ్యపై ఆధారపడు తుందని తెలుస్తోంది. అంశాల సంఖ్య తక్కువగా ఉన్నప్పుడు (10 ఉన్నప్పుడు) 0. 2 విలువను శూన్యం కంటె వేరుకాదని నిర్ణయించాము. అంశాల సంఖ్య 100 అయినప్పుడు 0.2 విలువ ప్రధానమైనదని గమనించాము. కాబట్టి అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు సహ సంబంధం గుణకం విలువ తక్కువగా ఉన్నా ప్రధానమైనది గానే భావించాలి గాని శూన్యంగా భావించరాదు.

మీ అవగాహనను పరీక్షించుకోండి - I

1) $r_{XY} = 0$ అయితే X,Y లు స్వతంత్ర చలరాసులా ?

2) $r_{XY} > 0$ అయినచో E(XY) కు E(X) E(Y) కు గల సంబంధమేమి ?

3) X, Y చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం 0.6 అయిన $\frac{X-5}{2}, \frac{Y-9}{5}$ ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం ఎంత?

4) సహ సంబంధ గుణకం హద్దు లేవి ?

5) $r_{XY} > 0$ అయినపుడు X తగ్గుతూంటే Y విలువ ఏమౌతుంది ?

6) X,Yలు స్వతంత్ర చలరాశులు కావు. కాని $r_{XY} > 0$ అని కనుగొనబడినది. దీనికి కారణమేమి ?

7) $r_{XY} = 0$ అయితే Cov (X,Y) ఎంత ?

8) సహ సంబంధ స్వభావాన్ని తెలుసుకొనేందుకు వ్యాపక పటం ఎలా ఉపయోగపడుతుంది ?

9) రైలు ప్రమాదాలకు, పిల్లల పుట్టుకకు మధ్య సహ సంబంధ గుణకం 0.7 అని కనుగొవబడినది. ఈ ఫలితాన్ని ఎలా వివరిస్తాము.

10) కోటులను నిర్ణయించేటప్పుడు ఒక విలువ 3సార్లు వస్తే కోటులను ఎలా నిర్ణయిస్తాము.

11) 5 శాతం ప్రాధాన్యత వద్ద d.f = 12 ; d.f. = 30 ; d.f. = 80 కి విభాజనపు పట్టిక విలువలను కనుగొనండి. దీనిని బట్టి d.f. పెరుగుతుంటే t పట్టిక విలువలు ఏమౌతాయో తెలపండి.

22.7 ప్రతిగమన విశ్లేషణ

ప్రతి గమన భావనను ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ 1886లో పరిచయం చేసాడు. పొడవైన తల్లిదండ్రుల పిల్లలు పొడవుగాను, పొట్టిగా వున్న తల్లిదండ్రుల పిల్లలుపొట్టిగాను వున్నప్పటికీ ఒక నిర్ణీత పొడవు గల తల్లిదండ్రుల పిల్లల పొడవు మొత్తం జనాభా సగటు పొడవు వైపుకు మొగ్గుతుందని కనుగొన్నాడు. ఈ సిద్ధాంతాన్ని కార్ల్ పియర్సన్ నిర్ధారించాడు. దీనినే మధ్య స్థాయికి ప్రతి గమనం అంటారు.

ఇప్పుడు ప్రాచుర్యంలో ఉన్న ప్రతిగమన భావన ఇది కాదు. కొన్ని స్వతంత్ర చలరాసుల వల్ల ఆధారిత చలరాసి ఎలా నిర్ధారింపబడుతుందో అంచనా వేయడాన్నే ప్రతిగమనం అంటాము. స్వతంత్ర చలరాసుల నిర్ణీత విలువలకు ఆధారిత చలరాసి సగటు విలువను అంచనా వేయడం ప్రతిగమన విశ్లేషణ ముఖ్యోద్దేశం. ప్రతిగమన విశ్లేషణను గూర్చి తెలుసుకునే ముందు కొన్ని అంశాలను చర్చిద్దాం.

22.7.1 సాంఖ్యాత్మక నిర్ధారక సంబంధాలు

సంబంధాలను నిర్ధారక, సాంఖ్యాత్మక సంబంధాలని రెండు విధాలుగా విభజించవచ్చు. నిర్ధారక సంబంధాల్లో చలరాసుల మధ్య ఖచ్చితమైన ప్రమేయ సంబంధముంటుంది. దీనివల్ల స్వతంత్ర చలరాసి విలువ తెలిస్తే ఆధారిత చలరాసి విలువను ఖచ్చితంగా తెలుసుకోగలము. ఉదాహరణకు వృత్త వైశాల్యానికి, వ్యాసార్ధానికి గల సంబంధం నిర్ధారక సంబంధం. వ్యాసార్థం తెలిస్తే వైశాల్యాన్ని తెలుసుకోగలము. మరొక ఉదాహరణ $y = 2x+3$ అనే సంబంధం నిర్ధారకమైనది. x విలువ తెలిస్తే y విలువను ఖచ్చితంగా తెలుపగలము.

సాంఖ్యాత్మక సంబంధంలో స్వతంత్ర చలరాసి యాదృచ్ఛికంగా ఉంటుంది. ఉదాహరణకు పంట దిగుబడి ఎరువుల వాడకం, వర్షపాతాలపై ఆధారపడుతుంది. కాని వీటి విలువలను బట్టి పంట దిగుబడిని

ఖచ్చితంగా అంచనా వేయలేము. దానికి కారణం దిగుబడిని ప్రభావితం చేసే చలరాసులు మరెన్నో ఉండవచ్చు. లేదా తీసుకున్న చలరాసుల మదింపులో దోషాలుండవచ్చు. అందుచేత ఆధారిత చలరాసి సంభావ్యతా విభాజనాన్ని కలిగి వుంటుంది. ఇట్టి సంబంధాలను సంఖ్యాత్మక సంబంధాలంటాము. ప్రతిగమన విశ్లేషణలో సాంఖ్యాత్మక సంబంధాలనే చర్చిస్తాం. కాని నిర్ధారక సంబంధాలను తీసుకోము.

ప్రతిగమనము, కార్యకారణ సంబంధము

ప్రతిగమనంలో స్వతంత్ర చలరాసి కారణాన్ని ఆధారిత చలరాసి ఫలితాన్ని తెల్పుతాయి. అయితే, ఏది స్వతంత్ర చలరాసి, ఏది ఆధారిత చలరాసి అనే అంశాన్ని సిద్ధాంత పరంగానే నిర్ణయించాలి. ప్రతి గమనం ద్వారా నిర్ణయించలేము.

ప్రతిగమనం, సహ సంబంధం

సహ సంబంధ గుణకం రెండు చలరాసుల మధ్య సరళరేఖాత్మక సంబంధాన్ని మదిస్తుంది. ప్రతిగమనం స్వతంత్ర చలరాసుల విలువలకు ఆధారిత చలరాసి సగటు విలువ నిస్తుంది. అయితే, వీటి మధ్య కొన్ని మౌలిక తేడాలున్నాయి. సహ సంబంధంలో రెండు చలరాసులను యాదృచ్ఛిక విభాజనాలుగానే తీసుకుంటాము. ప్రతి గమనంలో స్వతంత్ర చలరాశి యాదృచ్ఛికంకాక నిర్ణీత విలువలను పొందుతోందని భావిస్తాము. అయితే, స్వతంత్ర చలరాసి యాదృచ్ఛిక విభాజనాన్ని పొందినప్పటికీ ప్రతిగమన విశ్లేషణకు కొన్ని కొత్త పద్ధతులున్నాయి. వాటిని మనం చర్చించము.

22.7.2 రెండు చలరాసుల ప్రతిగమనం - విపుల వివరణ

ప్రతిగమనాన్ని ఎందుకు వాడతామో తెలుసుకుందాము. ఒక గ్రామంలో 1000 కుటుంబాలున్నాయనుకుందాము. వీరి వినియోగ వ్యయాలకు ఆదాయానికి గల సంబంధాన్ని తెలుసుకోవాలనుకోండి. మనం అన్ని కుటుంబాల నుండి సమాచారాన్ని సేకరించవలసిన అవసరం లేదు. ఒక ప్రతిరూపాన్ని ఎంచుకొని దత్తాంశాలను సేకరిస్తాము. ఈ దత్తాంశాల నుండి ఆదాయాన్ని స్వతంత్ర చలరాసిగాను, వినియోగ వ్యయాన్ని ఆధారిత చలరాసిగాను తీసుకొని ప్రతిగమనాన్ని అంచనా వేస్తాము. ఈ అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన సమీకరణం లేదా ప్రతిగమన రేఖ ప్రతి స్వతంత్ర చలరాసి విలువకు ఆధారిత చలరాసి సగటు విలువనిస్తుంది. దీని నుండి లోకంలో అనగా ఆ గ్రామంలో ఆదాయ వినియోగ వ్యయాల సంబంధాన్ని గూర్చి తెలుసుకుంటాము. అంతేకాక, మనం ఒక ప్రతిరూపం ఆధారంగానే ఈ సంబంధాన్ని తెలుసుకున్నాము. కనుక ప్రతి రూపం మారినప్పుడు ఈ సంబంధం మారుతుంది. ప్రతిరూప చాంచల్యాల వల్ల ఫలితాలు ఎలా మారతాయో పరిశీలిస్తాము. అనగా, అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన గుణకాలు, అంచనా వేయబడిన రేఖలపై ప్రాధాన్యతా పరీక్షలను జరుపుతాము.

ఒక ఉదాహరణను తీసుకుందాము. ఒక చిన్న గ్రామంలో 60 కుటుంబాలున్నాయి. వారి నెలసరి ఆదాయాలు (X), వినియోగవ్యయాలు (Y) క్రింది పట్టికలో చూపబడ్డాయి.

BRAOU

నెలసరి ఆదాయం రూ. X	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600
నెలసరి వినియోగం వ్యయం రూ. Y	550	650	790	800	1020	1100	1200	1350	1370	1500
	600	700	890	930	1070	1150	1360	1370	1450	1520
	650	740	900	950	1100	1200	1400	1400	1550	1750
	700	800	940	1030	1160	1300	1440	1520	1650	1780
	750	850	980	1080	1180	1350	1450	1570	1750	1800
	--	880	--	1130	1250	1400	--	1600	1890	1850
	--	--	--	1150	--	--	--	1620	--	1910
మొత్తం	3250	4620	4450	7070	6780	7500	6850	10430	9660	12110

నెలకు రూ. 800 ఆదాయం గల కుటుంబాలు 5. వారి వినియోగ వ్యయాలు రూ. 550 - 750 మధ్య వ్యాప్తి చెందాయి. అదేవిధంగా 7 కుటుంబాలు రూ. 2600ల నెలసరి ఆదాయాన్ని పొందుతున్నాయి. వీరి నెలసరి వ్యయాలు రూ. 1500 - 1910 మధ్య వ్యాప్తి చెందాయి. మిగిలిన నిలువు వరుసలను కూడా ఇలాగే అర్థం చేసుకోవాలి. ప్రతినిలువు వరుస ఒక నిర్ణీత ఆదాయానికి చెందిన కుటుంబాల వ్యయ విభాజనాన్నిస్తుంది. వీటిని వ్యయం షరతు విభాజనాలంటాం. ఈ పట్టిక నుంచి షరతు సంభావ్యతలను కనుగొనగలం. ఆదాయం రూ 800అయితే వ్యయం రూ. 550 కావడానికి సంభావ్యత $\frac{1}{5}$ ఎందుకంటే, రు. 800 ఆదాయాన్ని పొందుతున్న 5 కుటుంబాల్లోను ఒక కుటుంబపు వ్యయం రూ. 550. ఇదే విధంగా మిగిలిన షరతు సంభావతలను కూడా కనుగొనగలము. వీటిని క్రింది పట్టికలో గమనించండి.

X	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600
P (Y) (Xi)	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/7$
	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/7$
	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/7$
	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/7$
	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/6$	$1/5$	$1/7$	$1/6$	$1/7$
	---	$1/6$	---	$1/7$	$1/6$	$1/6$	---	$1/7$	$1/6$	$1/7$
	---	---	---	$1/7$	---	---	---	$1/7$	---	$1/7$
సగటువ్యయాలు E(Y/Xi)	650	770	890	1010	1130	1250	1370	1490	1610	1730

BRAOU

ప్రతి ఆదాయ స్థాయికి కుటుంబాల వ్యయాలను సంభావ్యతను తీసుకుని షరతు సగటు వ్యయాలను కనుగొన గలము. ఉదాహరణకు రూ. 800 ఆదాయం గల కుటుంబాల సగటు వ్యయం

$$550 \times \frac{1}{5} + 600 \times \frac{1}{5} + 650 \times \frac{1}{5} + 700 \times \frac{1}{5} + 750 \times \frac{1}{5} = 650.$$

దీనిని షరతు సగటు వ్యయం అంటాము. వ్యయం షరతు సంభావ్యతలను $P(Y/X_i)$ అనియు వ్యయం షరతు సగటు విలువలను $E(Y/X_i)$ అనియు సూచిస్తాయి. ఉదాహరణకు $E(Y/X_i = 800) = 650$.

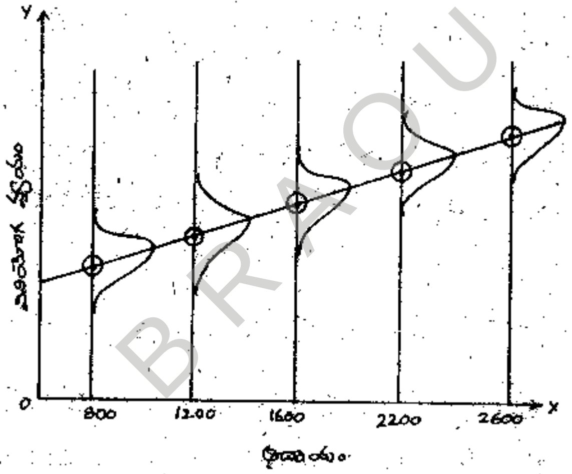
పై పట్టికలో ఆదాయం, షరతు సగటు వ్యయాలను రేఖా చిత్రంలో చూపవచ్చు. స్వతంత్ర చలరాశి (ఆదాయం) ని క్షితిజ సమాంతర అక్షంపైనా, ఆధారిత చలరాశి (వినియోగ వ్యయం) ని క్షితిజ లంబ అక్షం పైనా చూపుతాం. షరతు సగటు వినియోగ వ్యయాల బిందు పథాన్ని చూపే రేఖనే ప్రతిగమన రేఖ అంటాము.

పై గణాంకాల ఆధారంగా వచ్చిన ప్రతిగమన రేఖను క్రింది పటంలో చూడండి. ఈ రేఖా పటాన్నుంచి మూడు విషయాలను గమనిచండి.

1) ఆదాయంతో పాటు సగటు వ్యయం పెరుగుతోంది.

2) ఆదాయానికి, వ్యయానికి గల సంబంధం సరళరేఖాత్మకంగా వుంది.

3) ప్రతి ఆదాయ స్థాయికి గల వ్యయాల విభాజన రేఖ, వ్యయ విభాజన సగటు విలువలు (. గుర్తు) రేఖా పటంలో చూపబడ్డాయి.



ఈ ప్రతిగమన రేఖ గ్రామంలోని అన్ని కుటుంబాల ఆదాయాలను తీసుకోగా వచ్చింది. కనుక, దీన్ని లోక ప్రతిగమన రేఖ అంటాము. షరతు సగటు వ్యయాలకు ఆదాయాలకు గల సంబంధాన్ని ప్రమేయంగా రాస్తే లోక ప్రతిగమన ప్రమేయం వస్తుంది.

ప్రతి ఆదాయ విలువకు (X_i) ఒకే ఒక షరతు సగటు వ్యయం $(E(Y/X_i)$ వుంది కనుక ఈ సంబంధాన్ని ప్రమేయంగా రాయువచ్చు.

$$E(YL E_i) = f(X_i)$$

ఈ ప్రమేయం సరళరేఖాత్మకమైతే

$$E(Y/X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

ఇందు β_1, β_2 లు ప్రతిగమన గుణకాలు. β_1 విలువ క్షితిజ లంబ అక్షంపై అంతర ఖండాన్ని, β_2 సరళరేఖ వాలును తెలుపుతాయి. ఇట్టి ప్రతిగమన నమూనాను సరళరేఖాత్మక ప్రతిగమన నమూనా అంటాము. ఈ నమూనాలో ఆధారిత చలరాశి వ్యయం యొక్క సగటు విలువను తెలుపుతోంది. అలాకాక, వ్యయం అసలు విలువలతో ప్రమేయాన్ని సూచించాలంటే సగటు విలువను అసలు భేదాన్ని సగటు విలువ భేదాన్ని కలపాలి. ఇప్పుడు సమీకరణం క్రింది విధంగా వుంటుంది. అనగా

$$Y_i = E(Y/X_i) + u_i$$

$$= \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

ఇందు u_i : అసలు సగటు విలువల భేదం. దీనిని దోష పదం (error term) అంటాము.

27.7.3 దోషపద ప్రాధాన్యత

ప్రతిగమన సమీకరణలో దోషపద ప్రాధాన్యతను తెలుసుకుందాం. ఆధారిత చలరాసిని నమూనాలోని స్వతంత్ర చలరాసులేగాక ఎన్నో ఇతర చలరాసులు కూడా ప్రభావితం చేయవచ్చు. వీటి ప్రభావం విడివిడిగా చాలా తక్కువ ఉండవచ్చు ; కాని, వాటి సమష్టి ప్రభావం ఎక్కువ ఉండవచ్చు. వీటి ప్రభావాన్ని నమూనాలోకి తీసుకునేందుకు దోషపదాన్ని (u_i) ప్రవేశపెడతాము.

27.7.4 సరళరేఖాత్మక అర్థం (Meaning of Linearity)

ఒక ప్రతిగమన సమీకరణం పరామితుల్లో సరళరేఖీయం కావచ్చు లేదా చలరాసుల్లో సరళరేఖీయం కావచ్చు. రెండింటిలోనూ సరళరేఖీయం కావచ్చు. ఉదాహరణకు $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ అనే సమీకరణం పరామితుల్లోను చలరాసుల్లోను కూడా సరళ రేఖీయం . ఎందుకంటే ప్రతి పదంలోను పరామితి ఘాతం ఒకటి మాత్రమే ఉంది. అదేవిధంగా చలరాసి ఘాతం కూడా ఒకటి మాత్రమే ఉంది.

$Y_i = \beta_1 + \sqrt{\beta_2}\, X_i + u_i$ అనే సమీకరణం పరామితుల్లో సరళరేఖీయం కాదు. β_2 యొక్క ఘాతం $\frac{1}{2} \neq 1$. కాని చలరాసుల్లో సరళ రేఖీయమే. అయినప్పటికీ దీన్ని సరళరేఖీయ ప్రతిగమనం అనము. మరొక ఉదాహరణ : $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 + u_i$. ఇక్కడ పరామితులు సరళరేఖీయంగానే ఉన్నాయి. కాని X చలరాసి అసరళ రేఖీయంగా ఉంది. దానిని మనం సరళరేఖీయ ప్రతిగమనం గానే తీసుకుంటాము. కాబట్టి , సరళరేఖీయ ప్రతిగమనం అంటే పరామితుల్లో సరళ రేఖీయం కావాలి.

పై ఉదాహరణలో ఒక లోకానికి చెందిన అన్ని గణంకాలను తీసుకున్నాము. వాస్తవానికి ఇది సాధ్య పడదు. లోక గణాంకాల పరిమాణం చాలా ఎక్కువ ఉండవచ్చు. లేదా మనం గమనించలేనివి కావచ్చు. ఇట్టి స్థితిలో ఒక ప్రతి రూపాన్ని తీసుకుని దాని నుంచి వచ్చిన ప్రతి గమనం నుంచి లోక ప్రమేయాన్ని అంచనా వేస్తాము. కాని, ప్రతిరూప చాంచల్యాల వల్ల ప్రతిరూపానికి ఒక్కొక్క ప్రతిగమన సమీకరణం వస్తుంది. ప్రతిరూప ప్రతిగమన సమీకరణం నుంచి లోక ప్రతి గమన ప్రమేయాన్ని గూర్చి తెలుసుకోవడమే ప్రతిగమన విశ్లేషణ ముఖ్యోద్దేశము.

B R A O U

22.7.5 ప్రతిరూప ప్రతిగమన ప్రమేయం

ప్రతిరూప ప్రతిగమన ప్రమేయాన్ని క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$$

ఇందులో $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ లు వరుసగా β_1, β_2 ల అంచనాలు. $\hat{Y}_i$ విలువలు $E(Y_i/X_i)$ కి అంచనాలు. ఈ ప్రమేయాన్ని కూడా యాదృచ్ఛిక రూపంలో రాయవచ్చు.

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 Xi + e_i ______ (1)$$

ఇందులో e_i పదం లోక ప్రమేయంలోని u_i పదాన్ని పోలినదే. దీనిని అవశిష్టము అంటాము. ఇది ఆధారిత చలరాసి దత్త విలువకు ప్రతిగమనం ద్వారా వచ్చిన అంచనా విలువకు గల భేదాన్ని తెలుపుతుంది.

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i$$

ప్రతిరూప ప్రతిగమన రేఖను అంచనా వేయడంలో ముఖ్యోద్దేశం లోక ప్రతిగమనానికి అంచనాను రాబట్టడం కాదా! అనగా $\hat{\beta}_1$ విలువ β_1 కు, $\hat{\beta}_2$ విలువ β_2 కు దగ్గరగా ఉండాలి. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేయబడిన ప్రతిరూప ప్రతిగమన రేఖ, లోక ప్రతిగమన రేఖకు అతి దగ్గరగా వుంటుంది.

22.13 సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి

ఈపద్ధతి ప్రకారం అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తాన్ని కనిష్టం చేసే $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ విలువలను నిర్ణయిస్తాము. కలన గణిత పద్ధతి ద్వారా ఈ కనిష్ఠీకరణను గావించి $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ లలో రెండు సామాన్య సమీకరణాలను (normal equations) పొందుతాము.

$$\Sigma Y_1 = N\hat{\beta}_1 + \beta_2 \Sigma X_i \quad (1)$$

$$\Sigma X_i Y_i = \hat{\beta}_1 \Sigma X_i + \hat{\beta}_2 \Sigma X_i^2 \quad (2)$$

పై సమీకరణాలను రాసే పద్ధతిని తెలుసుకొందాం. ప్రతి రూప ప్రతిగమన సమీకరణంలోని విలువలన్నీ కలపగా 1వ సమీకరణం వస్తుంది. ప్రతి గమన సమీకరణాన్ని X_i చే గుణించి విలువలన్నిటినీ కలుపగా రెండవ సమీకరణం వస్తుంది. ఇక్కడ $\Sigma e_i = o$, $\Sigma e_i X_i = 0$ అనే ఫలితాలను వాడుతున్నామని గమనించాలి.

పై రెండు సామాన్య సమీకరణాలను సాధించి $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ లను పొందుతాము. సూక్ష్మీకరణల తర్వాత $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ ల సూత్రాలు క్రింది విధంగా వుంటాయి.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2} \qquad \hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}$$

ఇందులో $x_i = X_i - \overline{X}$; $y_i = Y_t - \overline{Y}$

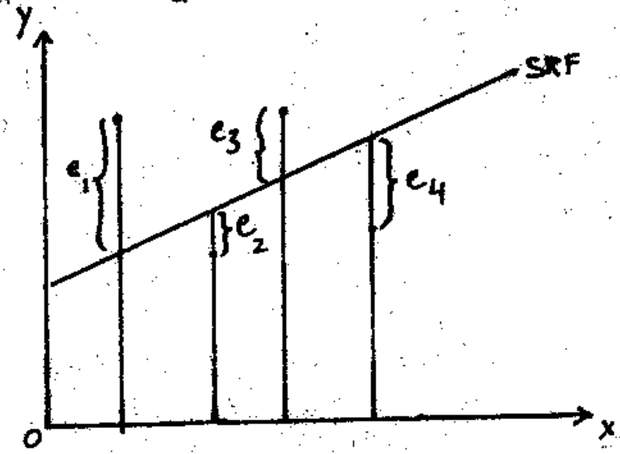
B R A O U

$\widehat{\beta_2}$ సూత్రాన్ని క్రింది విధంగా కూడా రాయగలము.

$$\widehat{\beta_2} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$\widehat{\beta}_1 , \widehat{\beta}_2$ లను కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలంటారు. వీటి విలువలను తీసుకొని కనిష్ఠ వర్గాల ద్వారా పొందిన X మీద Y (Y on X) ప్రతి గమన సమీకరణాన్ని రాస్తాము.

$$\widehat{Y} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 X$$



కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతినిపై రేఖా పటం ద్వారా వివరించవచ్చు. (X,Y) దత్తాంశ విలువలను రేఖా పటంలో బిందువులుగా గుర్తించండి. ఈ బిందువులన్నింటి నుంచి పోయేటట్లు ఏ సరళరేఖను గీయలేము. అందుచే వీటికి అతి సన్నిహితంగా వుండే సరళరేఖను కనుగొంటాము. దీనికి క్రింది పద్ధతిని వాడతాము. ఈ బిందువుల గుండా పోయే రేఖలన్నిటినీ కనుగొంటాము. ప్రతి రేఖను తీసుకొని దత్తాంశ విలువలకు రేఖకు గల క్షితిజ లంబ దూరాలను కనుగొంటాము. వీటిని అవశిష్టాలంటాము. పై పటంలో e_1, e_2, e_3, e_4 లు అవశిష్టాలు. ప్రతి సరళ రేఖకు ఈ అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తాన్ని కనుగొంటాము. ఏ సరళరేఖకు ఈ వర్గాల మొత్తం కనిష్ఠంగా వుంటుందో ఆ సరళరేఖకు కనిష్ఠ వర్గాల రేఖ అంటాము . ఈ పద్ధతిని కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి అంటాము. ఈ పద్ధతి ద్వారా సాధించిన అంచనాలను $\left(\widehat{\beta}_1 , \widehat{\beta}_2\right)$ కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలంటాము.

BRAOU

ఉదా : ఒక గ్రామంలోని కుటుంబాల నుంచి 10 కుటుంబాల ప్రతిరూపాన్ని తీసుకొని ఒక వారంలో వారి తలసరి ఆదాయ వినియోగ వ్యయాలపై దత్తాంశాలు సేకరించబడ్డాయి.

వినియోగ వ్యయం (Y) :	70	65	90	95	110	115	120	140	155	150
ఆదాయం (X) :	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260

పై దత్తాంశాల నుండి X మీద Y ప్రతిగమన రేఖను కనుక్కోండి.

సాధన : X,Y చలరాసులను తీసుకొని వాటి వర్గాలను, జాత్యంతర లబ్ధాలను కనుగొనాలి. క్రింది పట్టికలో చూడండి.

	Y_i	X_i	X_iY_i	X_i^2	$x_i = X_i - \bar{X}$	$y_i = Y_i - \bar{Y}$	x_i^2	x_iy_i
	70	80	5600	6400	-90	- 41	8100	3690
	65	100	6500	10000	- 70	- 46	4900	3220
	90	120	10800	14400	- 50	- 21	2500	1050
	95	140	13300	19600	- 30	- 16	900	480
	110	160	17600	25600	- 10	- 1	100	10
	115	180	20700	32400	10	4	100	40
	120	200	24000	40000	30	9	900	270
	140	220	30800	48400	50	29	2500	1450
	155	240	37200	57600	70	44	4900	3080
	150	260	39000	67600	90	39	8100	3510
మొత్తం	1110	1700	205500	322000	0	0	33000	16800
సగటు	111	170			0	0		

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{16800}{33000} = 0.509$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} = 111 - 0.509 \times 170 = 24.47$$

$\hat{\beta}_2$ కనుగొనడానికి రెండవ సూత్రాన్ని వాడదాము.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{n\sum XY - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \frac{10 \times 205500 - 1700 \times 1110}{10 \times 322000 - 1700 \times 1700}$$

$$= \frac{168000}{330000} = 0.509$$

$$\hat{Y}_i = 24.47 + 0.509\,X_i$$

అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన రేఖను క్రింది విధంగా వివరిస్తాము. వారపు తలసరి ఆదాయం 1 రూ. పెరిగితే వినియోగ వ్యయం సగటు విలువ రూ 0.509 పెరుగుతుంది. విలువ 24.47 అంతర ఖండాన్ని తెలుపుతుంది. ఇది ఆదాయం విలువ శూన్యమైనపుడు వినియోగ వ్యయం సగటు విలువను తెలుపుతుంది. అయితే ఇది అంతర ఖండనానికి యాంత్రిక వివరణ. ప్రతిగమన విశ్లేషణలో ఇట్టి వివరణ కొన్ని సందర్భాల్లో సరిపోదు. అంతర ఖండాన్ని ప్రతి గమన నమూనాలోకి తీసుకోబడని చలరాసుల సగటు ప్రభావంగా వివరించడం మంచిది.

B R A O U

22.8.1 X మీద Y, Y మీద X ప్రతిగమనాల సంబంధం

X మీద Y ప్రతిగమనాన్ని అంచనా వేసినట్లే Y మీద X ప్రతి గమనాన్ని కూడా అంచనా వేయగలము. కాని దేనిని తీసుకోవాలి అనే అంశాన్ని సిద్ధాంత పరంగానే నిర్ణయించాలి. అంతేకాక ఈ రెండింటికి ఒక నిర్ణీత సంబంధం వుంది. దీనిని తెలుసుకునేందుకు రెండు ప్రతిగమనాలను క్రింది విధంగా రాద్దాము.

$Y = a + b_{YX} X$

$X = a^1 + b_{XY} Y$

పై ప్రతిగమన నమూనాల్లో వాలు గుణకాల సూత్రాలు క్రింది విధంగా వుంటాయి.

$$b_{YX} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum y_i^2}}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

$$= r_{XY} \cdot \frac{\sigma y}{\sigma x}$$

ఇందులో r_{YX} సహ సంబంధగుణకం : $\sigma Y, \sigma X$ లు Y,X ల క్రమ విచలనాలు. క్రమ విచలనాలు ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకం కనుక r_{XY} సంకేతాన్నే r_{YX} కూడా కలిగి వుంటుంది. కనుక సహసంబంధ గుణకం, ప్రతిగమన గుణకం ఒకే సంకేతాన్ని కలిగి వుంటాయి.

$$b_{YX} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{\sqrt{\sum y_i^2}}$$

$$= r_{XY} \cdot \frac{\sigma X}{\sigma Y}$$

ఇందలో ఒక ముఖ్య విషయాన్ని గమనించాలి. $r_{XY} = r_{YX}$, మరియు $\sigma X, \sigma Y$ ధనాత్మకాలు కనుక b_{XY}, b_{YX} లు ఒకే సంకేతాన్ని కలిగి వుంటాయి. అనగా Y మీ X ప్రతి గమనంలోని వాలు గుణకం, X మీద Y ప్రతి గమనంలోని వాలు గుణకం ఒకే సంకేతాన్ని కలిగి వుంటాయి. అనగా ఒకటి ధనాత్మకమైతే (రుణాత్మకమైతే) రెండవది కూడా ధనాత్మకమే (రుణాత్మకమే).

B R A O U

రెండు ప్రతిగమన వాలు గుణకాల లబ్దాన్ని తీసుకుందాము.

$$b_{YX} \cdot b_{XY} = r_{YX}\frac{\sigma Y}{\sigma X} \cdot r_{XY}\frac{\sigma X}{\sigma Y}$$

$$= r_{YX}\, r_{XY}$$

$$= r_{XY}^2$$

X on Y మరియు Y on X ప్రతిగమనాల వాలు గుణకాల లబ్దం సహ సంబంధ గుణకపు వర్గానికి సమానము.

పై విశ్లేషణ సారాంశమేమంటే X,Y చలరాశుల సహ సంబంధ గుణకం, Y on X ప్రతిగమన వాలు గుణకం, X on Y ప్రతి గమన వాలు గుణకం ఒకే సంకేతాన్ని కలిగి వుంటాయి. అంతేకాక ప్రతిగమన గుణకాల లబ్దం సహసంబంధ గుణకపు వర్గానికి సమానము. సహ సంబంధ గుణకపు వర్గ వివరణను తర్వాత విభాగంలో తెలుసుకుంటారు.

పై ఉదాహరణలోని దత్తాంశాలను ఉపయోగించి Y మీద X ప్రతి గమన రేఖను కూడా కనుగొందాము. ఇందుకు $\sum y_i^2$ విలువలు కావాలి.

y_i^2: 1681 116 441 256 1 16 81 841 1936 1521

$$\widehat{b}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2} = \frac{16800}{8890} = 1.8897$$

$$\widehat{b}_1 = \overline{X} - \widehat{b}_2\,\overline{Y}$$

$= 170 - 1.8897 \times 111$

$= -39.76$

∴ Y మీద X ప్రతి గమనరేఖ

$X = -39.76 + 1.8897\,Y$

X,Y ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొందాము.

$$r_{XY} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$$

$$= \frac{16800}{\sqrt{33000}\,\sqrt{8890}}$$

$= 0.981.$

B R A O U

ప్రతి గమన వాలు గుణకాల లబ్ధం

$$\hat{\beta}_2 \hat{b}_2 = 0.509 \times 1.8897$$

$$= 0.9618 \simeq 0.962$$

$r^2_{XY} = 0.962$ (ఇది $(0.981)^2$ కి సమానము)

∴ ప్రతి గమన గుణకాల లబ్ధము సహ సంబంధ గుణకపు వర్గానికి సమానము.

22.8.2 సాంప్రదాయ సరళరేఖాత్మక ప్రతిగమనంలో ప్రమేయాలు

ప్రతిరూప ప్రతిగమనాన్ని అంచనావేసి లోక ప్రతిగమనాన్ని అర్థం చేసుకుంటాము. Y చలరాశిని X,u లు నిర్ణయిస్తున్నాయి కనుక u గూర్చి కొన్ని ప్రమేయాలను చేసుకుంటే గాని Y పై X ప్రభావాన్ని కనుగొనలేము. అందుచే దోష పదాన్ని గూర్చి ఈ క్రింది ప్రమేయాలు చేసుకుంటాము.

1వ ప్రమేయం : u_i సగటు విలువ శూన్యం

$$E(u_i / X_i) = 0$$

ప్రతి X_i విలువకు చెందిన u_i విలువలు కొన్ని Y సగటు విలువ కంటే హెచ్చుగాను కొన్ని తక్కువగాను వుండి అనగా కొన్ని ధనాత్మకంగాను కొన్ని ఋణాత్మకంగాను వుండి వాటి మొత్తం శూన్యమౌతుంది.

2వ ప్రమేయం : u_i ల మధ్య స్వయం సహసంబంధం (Auto - correlation)శూన్యం. అనగా x_i, u_i ల మధ్య సహ విస్తృతి శూన్యం.

$$\text{Cov}(u_i, u_j) = E[u_i - E(u_i)][u_j - E(u_j)]$$

$$= E(u_i u_j) \qquad E(u_i) = E(u_j) = 0$$

అనగా ఒక x_i కి చెందిన దోషాలు ఒకదాని వల్ల మరొకటి ప్రభావితం కారాదు.

3వ ప్రమేయం : ప్రతి X_i కి కొన్ని U_i విలువలుంటాయి కదా ! వాటి విస్తృతి (variance) అన్ని X_i లకు సమానంగా వుండాలి. అనగా X_i లను మార్చినా విస్తృతి మార కూడదు. దీనినే సమ విస్తృతి (homosced-staicity) ప్రమేయం అంటాము.

$$E[u_i - E(u_i)]^2 = E(u_i)^2 = \sigma^2$$

4వ ప్రమేయం: X_i, u_i ల మధ్య సహ విస్తృతి శూన్యం.

$$Cov\ (u_i, X_i) = 0$$

X విలువలు యాదృచ్ఛికాలు కాకుండా స్థిర విలువలయితే ఈ షరతు సంతృప్తి చెందుతుంది. ఈ ప్రమేయం చేసుకుంటేగాని Y మీద X ప్రభావాన్ని అంచనా వేయలేము.

22.8.3 కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాల విస్తృతులు, క్రమదోషాలు

కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు ప్రతిరూప దత్తాంశాలు ప్రమేయాలుకదా! ప్రతిరూపం మారినప్పుడల్లా ఈ అంచనాలు మారతాయి. కాబట్టి అంచనాల విశ్వసనీయత (reliability) కి కొలత అవసరం. గణాంక శాస్త్రంతో అంచనా విశ్వసనీయతను క్రమదోషం (standard error) తో కొలుస్తాము. కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలకు విస్తృతులు (Var) క్రమ దోషాలు (Se) క్రింది విధంగా వుంటాయి.

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{\sigma^2}{\Sigma x_1^2} \qquad Se\ (\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma}{\Sigma x_i^2}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\Sigma X_i^2}{N \Sigma x_1^2}\sigma^2 \qquad Se\ (\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\Sigma X_i^2}{N \Sigma x_i^2}}\ \sigma$$

పై సూత్రాల్లో σ తప్ప మిగిలిన అన్ని పరిమాణాలను దత్తాంశాల నుండి పొందగలము. σ విలువను మాత్రం పొందలేము. ఎందుకంటే ఇది ప్రతిరూప దత్తాంశాలపై ఆధారపడదు. కాని ప్రతిరూప దత్తాంశాలను వాడి σను అంచనా వేయగలము. దీనిని $\hat{\sigma}$ గా సూచిస్తాము.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\Sigma e\,i}{N-2} \quad \text{లేదా} \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma\, ei}{N-2}}$$

Σe_i^1 అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం. దీనిని చలరాసుల వర్గాల మొత్తం నుండి పొందగలము.

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_2^2 \Sigma x_i^2$$

$$= \Sigma y_i^2 - \frac{\left(\Sigma x_i y_i\right)}{\Sigma x_i^2}$$

$\hat{\sigma}$ ను అంచనా క్రమదోషం (standard error of estimate) అంటాము. ఇది ప్రతిగమన రేఖ నుండి విచరణాలను తీసుకోగా వచ్చిన Y విలువల క్రమ విచలనము. దీనిని అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన రేఖ సంధాన సఫలతకు కొలతగా వాడతాము.

ఉదా: వెనుకటి ఉదాహరణలోని ప్రతిగమన ఫలితాలకు క్రమదోషాలను కనుగొనండి.

BRAOU

సాధన :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{N-2}}$$

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \frac{\left(\sum x_i y_i\right)^2}{\sum x_i^2}$$

$$= 8890 - \frac{(16800)^2}{33000} = 337.27$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2 = \frac{333.27}{8} = 42.16$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{42.16} = 6.49$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{\hat{\sigma} 2}{\sum x_i^2} = \frac{42.16}{33000} = 0.0013$$

$$Se\,(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2}} = 0.0357$$

$$Var\,(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2} . \hat{\sigma}^2 = \frac{322000}{10 \times 33000} \times 42.16 = 41.137$$

$$Se\,(\hat{\beta}_1) = \sqrt{41.137} = 6.4138.$$

22.8.4 కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాల ధర్మాలు

కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా సాధించిన $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ అంచనాలు మూడు ధర్మాలను కలిగి వుంటాయి.

1) ఈ అంచనాలు నిష్పాక్షికమైనవి (unbiased)

అనగా $E\,(\hat{\beta}_1) = \beta_i ; E\,(\hat{\beta}_2) = \beta_2$

అనగా అంచనా విలువ యదార్థ విలువకు సమానం కాకపోయినా అంచనా ఆశంశిత విలువ యదార్థ విలుకు సమానం.

2) ఈ అంచనాలు యాదృచ్ఛిక చలరాశిలో సరళరేఖాత్మకాలు .

3) సరళరేఖాత్మక నిష్పాక్షిక అంచనాలన్నిటిలోను ఈ అంచనాలు కనిష్ఠ విస్తృతి (minimum variance)ని కలిగి ఉంటాయి.

ఈ మూడు ధర్మాలను ఒకే మాటలో చెప్పాలంటే కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు ఉత్తమ సరళరేఖాత్మక నిష్పాక్షిక అంచనాలు (BLUE).

22.9 సంధాన సఫలత-నిర్ధారక గుణకం (Goodness of Fit -Coefficient of Determinaion)

దత్తాంశాలన్నీ సంధాన రేఖపై పడితే పరిపూర్ణ సంధానాన్ని పొందుతాం. ఇది చాల అరుదుగా జరుగుతుంది. అందుచేత అవశిష్టాలు సాధ్యమైనంత తక్కువ విలువలు కలిగి వుండాలని ఆశిస్తాము ? దానికి మదింపు నిర్ధారక గుణకం (coefficient of determinaion) .

ఇక్కడ యాదృచ్ఛిక చలరాశిని స్వతంత్ర చలరాశిని విచలన రూపంలో రాస్తాము. అనగా

$y_i = Y_i - \overline{Y}$; $x_i = X_i - \overline{X}$

$\sum y i^2$ ని అసలు వర్గాల మొత్తం (TSS) అనీ,

$\sum \hat{y} i^2$ ని అంచనా వర్గాల మొత్తం (ESS) అనీ

$\sum e i^2$ ని అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం (RSS) అనీ అంటాము. అంచనా వర్గాల మొత్తానికి అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం కలిపితే అసలు వర్గాల మొత్తం వస్తుంది.

$$\sum y^2 i = \sum \hat{y} i^2 + \sum ei^2$$

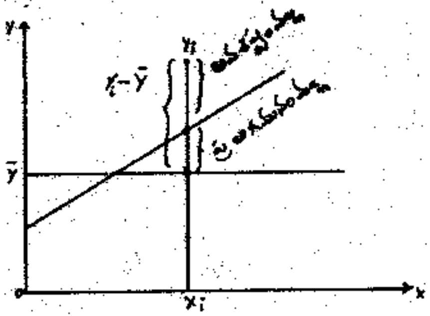
$$= \hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2 + \sum e_i^2$$

$$TSS = ESS + RSS$$

దాని ప్రకారం Y విలువల విస్తృతిని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తున్నాము. ఒక భాగం ప్రతిగమనం వివరించగలిగినది. రెండవ భాగం యాదృచ్ఛిక శక్తుల ప్రభావం. ఈ విషయాన్ని పటంలో గమనించండి.

రెండు వైపులా TSS తో భాగించగా

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} + \frac{\sum e_i^2}{\left(\sum Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$



$\frac{ESS}{TSS}$ ను సంధాన సఫలత గుణకం అంటాము. దీనికి r^2 ను సంకేతంగా వాడతాము. దీని గరిష్ఠ విలువ 1, కనిష్ఠ విలువ 0. ఇది యాదృచ్ఛిక చలరాసి విస్తృతిలో ప్రతిగమనం వివరించిన భాగాన్ని తెలుపుతుంది. దానిని సులభంగా లెక్కించడానికి క్రింది సూత్రాన్ని వాడతాము.

B R A O U

$$r^2 = \hat{\beta}_2^2 \frac{\Sigma x_i^2}{\Sigma y_i^2} = \hat{\beta}_2^2 \left(\frac{S^2 x}{S^2 y}\right) = \frac{\left(\Sigma x_i y_i\right)^2}{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2}$$

$$\therefore r = \hat{\beta}_2 \frac{S_x}{S_y}$$

ఇందులో S_x, S_y లు X,Y ల క్రమ విచలనాలను తెలుపుతాయి.

ఒక ముఖ్య విషయాన్ని గమనించాలి. సంధాన సఫలత గుణకం యొక్క ధన లేదా ఋణ వర్గమూలం కార్ల్ పియర్సన్ సహ సంబంధ గుణకమౌతుంది.

$$r = \pm\sqrt{r^2} = \frac{\Sigma x_i y_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2}}$$

కాబట్టి సహ సంబంధ గుణకపు వర్గం ప్రతిగమనం (Y మీద X లేదా X మీదY) సంధాన సఫలతను తెలుపుతుంది.

22.10 అంచనాల సంభావ్యతా విభాజనాలు

$\widehat{\beta_1}$, $\hat{\beta}_2$ లు u_i లో సరళరేఖాత్మక ప్రమేయాలు. అందుచేత వీటి u_i సంభావ్యతా విభాజనాలు u_i సంభావ్యతా విభాజనాలపై ఆధారపడతాయి. u_i సామాన్య విభాజనం కలిగి వుందనుకుంటే $\widehat{\beta_1}$, $\hat{\beta}_2$ ల విభాజనాలు కూడ సామాన్య విభాజనాలౌతాయి.

$$\therefore \hat{\beta}_2 \sim N\left(\beta_2, \frac{\sigma^2}{\Sigma x_i^2}\right)$$

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta_1, \frac{\Sigma X_i^2}{N \Sigma x_i^2}\sigma^2\right)$$

ఈ విభాజనాలను సులభంగా క్రమ సామాన్య విభాజనాలుగా మార్చవచ్చు.

$$Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma \hat{\beta}_1}$$

మరియు $Z = \dfrac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sigma \hat{\beta}_2}$ క్రమ సామాన్య విభాజనాలు.

ఇందులో; $\sigma_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\dfrac{\Sigma X_i^2}{N \Sigma x_i^2}}\sigma$; $\sigma_{\hat{\beta}_2} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\Sigma X_i^2}}$.

B R A O U

రవిలువను ప్రతిరూప దత్తాంశాల నుండి పొందలేము కనుక దాని అంచనా విలువ $\frac{\sum e_i^2}{N-2}$ ను వాడతాము. అప్పుడు క్రమసామాన్య విభాజనానికి బదులు,N-2 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు గల విభాజనాన్ని పొందుతాము.

22.11 అంతరం అంచనా

$\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ అంచనాలు ప్రతి ప్రతిరూపానికి మారుతాయి. ఈ అంచనాలు ఎంత వరకు విశ్వసనీయమైనవి? ప్రతి రూప చాంచల్యాల వల్ల ఏ ప్రతిరూపపు అంచనాను తీసుకున్నా వాస్తవ విలువకు భిన్నంగా వుంటుంది. కాని పునరావృత ప్రతిరూపాల్లో దీని సగటు విలువ వాస్తవ విలువకు సరిపోతుంది. గణాంక శాస్త్రంలో బిందు అంచనాల విశ్వసనీయతను క్రమ దోషంతో కొలుస్తాము. కాబట్టి బిందు అంచనాలపై ఆధారపడటానికి బదులు బిందు అంచనాకు ఒక అంతరాన్ని నిర్ణయిస్తాము. బిందు అంచనాకు 2 లేక 3 క్రమ దోషాల దూరంలో అంతరాన్ని నిర్ణయిస్తాము.

ఉదాహరణకు β_2 కు 95 శాతం నమ్మక అంతరాన్ని పొందాలంటే t విభాజన పట్టిక నుండి N-2 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు $t_{0.975}$ పట్టిక విలువను తీసుకోవాలి. $\widehat{\beta}_2$ యొక్క క్రమ దోషంతో ఈ పట్టిక విలువను గుణించాలి. అప్పుడు $\widehat{\beta}_2$ విలువకు రెండు వైపులా $t_{\alpha/2}\, Se(\beta_2)$ విలువను నిర్ణయించాలి.

పైన ఉదాహరించిన ప్రతి గమనానికి నమ్మిక అంతరాన్ని నిర్ణయిద్దాము.

$\widehat{\beta}_2 = 0.509 \quad Se(\widehat{\beta}_2) = 0.0357 \quad df = 8$

95 శాతం నమ్మిక గుణకాన్ని ఎంచుకుంటే t విభాజన పట్టికలో 8df కు క్లిష్ట విలువ 2.306.

కనుక β_2 అంతర అంచనా :

$0.509 \pm 2.306\ (0.0357)$

$\therefore 0.4267 \leq \widehat{\beta}_2 \leq 0.5913$

నమ్మిక అంతరాన్ని క్రింది విధంగా వివరించాలి. β_2 కి పై విధంగా 100 సార్లు అంతరాన్ని నిర్ణయిస్తే 95 సార్లు β_2 వాస్తవ విలువ అంతరంలో పడుతుంది.

22.12 పరి కల్పనా పరీక్ష (Hypothesis Testing)

పరి కల్పన పరీక్షలో ఒక పరిశీలన నిర్ణీత పరికల్పనతో పొసుగుతోందా లేదా అనే విషయాన్ని పరిశీలిస్తాము. పొసగడ మనిదే కనుగొనబడిన విలువ చేయబడిన విలువకు తగినంత దగ్గరలో వుందా లేదా అనే విషయాన్ని పరీక్షిస్తాము.

ఈ ప్రశ్నకు జవాబును కనుగొనడంలో రెండు సోపానాలున్నాయి. మొదట ప్రాతిపదిక పరికల్పనను నిర్ణయించాలి. దీనిని H_0 లో సూచిస్తాము. ఉదాహరణకు :

$Ho : \beta_2 = 0.3$

ఈ ప్రాతిపదిక పరికల్పనను సిద్ధాంత పరంగా కాని వెనుకటి అనుభవం ద్వారా కాని నిర్ణయిస్తాము. ప్రతి ప్రాతిపదిక పరికల్పనకు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన వుంటుంది. దీన్ని H_1 తో సూచిస్తాము. పైన ఉదాహరించిన ప్రాతిపదిక పరికల్పనకు ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన

BRAOU

$H_1 : \beta_2 \neq 0.3$

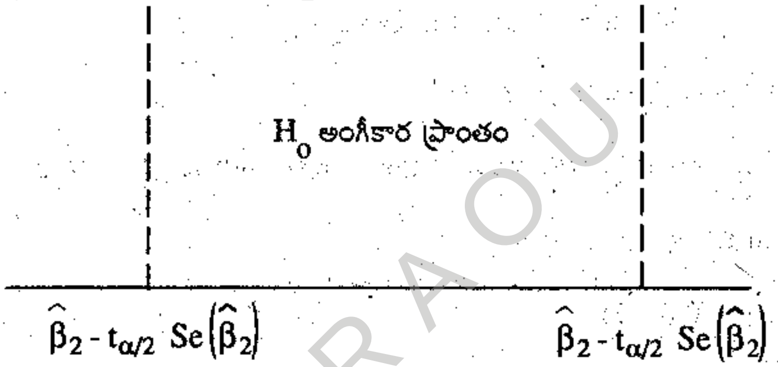
అనగా β_2 విలువ 0.3 కంటె ఎక్కువ కావచ్చు లేదా తక్కువ కావచ్చు. ఇక్కడ ఒక ముఖ్య విషయాన్ని గమనించాలి. ప్రాతిపదిక పరికల్పన సాధారణమైనది. కాని ప్రత్యామ్నాయ పరికల్పన సంయుక్తమైనది (composite) ; దీనినే ద్విపాక్షిక పరికల్పన అంటాము.

β_2 అంచనా విలువ $(\hat{\beta}_2)$ ప్రాతిపదిక పరికల్పనలో పొసుగుతుందా ? దీనికి జవాబు రెండు పద్ధతుల్లో చెప్పవచ్చు.

1. నమ్మిక అంతర పద్ధతి
2. సార్థకతా పరీక్ష పద్ధతి

22.12.1 నమ్మిక అంతర పద్ధతి

దీని ప్రకారం నిర్ణీత శాతపు నమ్మిక అంతరాన్ని నిర్మించి ప్రాతిపదిక పరికల్పన విలువ ఈ అంతరంలో వుందా బయట వుందా అనే విషయాన్ని పరిశీలిస్తాము. ప్రాతిపదిక పరికల్పన విలువ నమ్మిక అంతరంలోపల వుంటే పరికల్పనను అంగీకరిస్తాము, నమ్మిక అంతరానికి బయట వుండే ప్రాతిపదిక పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. క్రింది చిత్రంలో ఈ వివరణను చూడవచ్చు.



BRAOU

మన ఊహాత్మక ఉదాహరణలో 0.3 విలువ 95 శాతం నమ్మిక అంతరానికి బయట పడుతోంది. అందుచే ప్రాతిపదిక పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. అనగా మనం అంచనా వేసిన 0.5091 విలువ గణాంక పరంగా పరికల్పించుకున్న 0.3 విలువకు భిన్నంగా వుందని అర్థం.

22.12.2 సార్థకతా పరీక్ష పద్ధతి

ఈ పద్ధతిని ఆర్.ఎ.ఫిషర్ అను శాస్త్రవేత్త నైమాన్ మరియు పియర్సన్ అను శాస్త్రవేత్తలు స్వతంత్రంగా ప్రతిపాదించారు. ఈ పద్ధతిలో ప్రాతిపదిక పరికల్పన ఆధారంగా ఒక పరీక్షా గణాంకాన్ని (test statistic) దాని ప్రతిరూప విభాజనం కావాలి. దత్తాంశాల నుండి వచ్చిన పరీక్షా గణాంకం విలువను బట్టి ప్రాతిపదిక పరికల్పనను అంగీకరించడం కాని తిరస్కరించడం గాని చేస్తాము.

ఉదాహరణకు యాదృచ్ఛిక చలరాశి సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగివుంటే, t అనే చలరాశి

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{Se(\hat{\beta}_2)} = \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\hat{\sigma}}$$

N - 2 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు కల t విభాజనాన్ని పొందుతుందని గమనించాము. ప్రాతిపదిక పరికల్పనలోని

β_2 విలువను β^*_2పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి t విలువను కనుగొనగలము. t విభాజనానికి నమ్మిక అంతరాలు మనకు తెలుసు. కనుక

$$Pr = \left[- t_{\alpha/2} \le \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2^*}{Se(\hat{\beta}_2)} \le t_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

$$Pr\left[\beta_2^* - t_{\alpha/2}\, Se(\hat{\beta}_2) \le \hat{\beta}_2 \le \beta_2^* + t_{\alpha/2}\, Se(\hat{\beta}_2)\right] = 1 - \alpha$$

ఈ అంతరం $\beta_2 = \beta_2^*$ అయితే $(1-\alpha)$ సంభావ్యత లో $\hat{\beta}$ తీసుకోవలసిన విలువను తెలుపుతుంది. ఈ అంతరాన్నే ప్రాతిపదిక పరికల్పనకు అంగీకార ప్రదేశం అంటాము. ఈ అంతరం బయటకు తిరస్కార ప్రదేశం లేదా క్లిష్ట ప్రదేశం అంటాము. ఈ ప్రాంతం హద్దుల్ని క్లిష్ట విలువలంటాము.

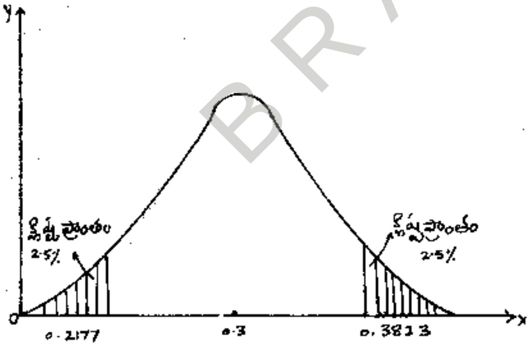
విశ్వాస అంతరం పద్ధతికి సార్థకతా పరీక్ష పద్ధతికి గల చేరికను చూద్దాము. విశ్వాస అంతరం పద్ధతిలో $\hat{\beta}_2$ ను తీసుకని తెలియని β_2 కు అంతరాన్ని ఏర్పాటు చేస్తున్నాము. సార్థకతా పరీక్ష పద్ధతిలో β_2 కు ఒక విలువను పరికల్పించుకొని దీని నుండి $\hat{\beta}_2$ కు అంతరాన్ని నిర్ణయిస్తున్నాము.

పై ఉదాహరణను తీసుకుంటే $\beta^*_2 = 0.3$ అయితే

$$p_r(0.2177 \le \hat{\beta}_2 \le 0.3823) = 0.95$$

$\hat{\beta}_2 = 0.5091$ క్లిష్ట ప్రాంతంలో పడింది కనుక $\beta_2 = 0.3$ అనే ప్రాతిపదిక పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. ఈ విషయాన్ని పటంలో చూడండి.

B R A O U

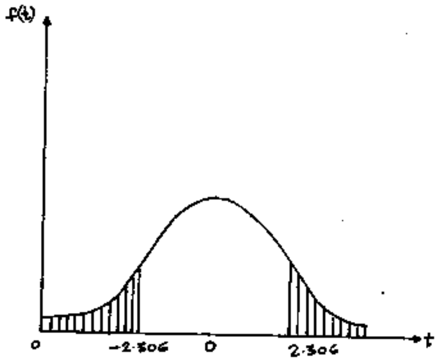


అభ్యాసంలో పై అంతరాన్ని అంచనా వేయనవసరం లేదు.

పై సమీకరణంలో మధ్యనున్న t విలువను $\left[\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2 / Se(\hat{\beta}_2)\right]$ గణించి ఈ విలువ క్లిష్ట విలువల మధ్యపడుతుందో బయట పడుతుందో చూస్తే చాలు. క్లిష్ట ప్రాంతంలో పడితే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. ఈ పద్ధతి చాలా సులభం. ప్రతి స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు t విలువను పట్టిక నుంచి తీసుకుని క్లిష్ట ప్రాంతాన్ని నిర్ణయిస్తాము. పై ఉదాహరణను తీసుకుంటే

$$t = \frac{0.5091 - 0.3}{0.0357} = 5.86$$

t క్లిష్ట ప్రాంతంలో పడుతోంది. అందుచేత $\beta_2 = 0.3$ అనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము.



పరికల్పన పరీక్షలో విస్తృతి విశ్లేషణ (analysis of varaince) పద్ధతి కూడా వుంది. అయితే రెండు చర రాశుల ప్రతిగమనంలో దీని అవసరం లేదు. అందుచే బహుళ ప్రతిగమనంలో ఈ అంశాన్ని చర్చిద్దాము.

ప్రతిగమన రేఖను అంచనా వేయడంలో రెండు ముఖ్యోద్దేశాలుంటాయి. ఒకటి, వివిధ స్వతంత్ర చలరాశుల ప్రాముఖ్యతను కనుగొనడం. రెండవది, స్వతంత్ర చల రాశుల విలువను తీసుకొని ఆధారిత చలరాశి విలువను ఊహించడం. ఉదాహరణకు నెల ఆదాయం రూ. 1000 అయితే వ్యయం సగటు విలువ

$$\widehat{Y_0} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_0$$

$$= 24.4545 + 0.5091(1000)$$

$$= 753.68$$

BRAOU

22.13 ప్రతిగమన ఫలితాల నివేదిక

ఫలితాలను క్రింది విధంగా రాస్తే సులభ గ్రాహ్యంగా వుంటుంది.

$$\widehat{Y}_i = 24.4545 + 0.5091\, x_i \qquad r^2 = 0.9621$$

$$(6.4138) \qquad (0.0357) \qquad df = 8$$

$$t = (3.8128) \qquad (14.2605)$$

ఇక్కడ t విలువలను గణించడంలో అంచనా వేయబడిన పరామితులు శూన్యం కంటే వేరైనదా, కాదా తెలుపుతున్నాము. t విలువ పట్టిక విలువ కంటే ఎక్కువ వుంటే గుణకం శూన్యం కాదని అర్థం. శూన్యంతో కాకుండా మరే యితర విలువనైనా పరికల్పించుకుంటే వెనుక చెప్పిన పద్ధతిని వాడాలి.

ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని అంచనావేశాక ఫలితాలు ఎంతవరకు సమంజసంగా వున్నాయో చూడాలి. దీనికి మూడు ప్రమాణాలను వాడతాము.

1. అంచనా వేయబడిన గుణకాలు సరియైన గుర్తులు కలిగి వుండాలి. ఉదాహరణకు సిద్ధాంత పరంగా ఆదాయం పెరిగే కొద్దీ వ్యయం పెరుగుతుందని ఆశిస్తాము. అనగా $\hat{\beta}_2$ ధనాత్మకం కావాలి. ఇలా కాకపోతే అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని వాడలేము.

2. సిద్ధాంతపరంగా గుణకం శూన్యం కంటే వేరుగా వుండాలనుకుంటే అంచనా వేయబడిన సమీకరణంలో కూడా శూన్యం కంటే వేరుగా వుండాలి.

3. ప్రతిగమన సమీకరణం సంధాన సఫలత విలువ (r^2) హెచ్చుగా వుండాలి. అయితే ఈ ప్రమాణానికి మరీ ఎక్కువ ప్రాధాన్యత నీయలేము. ఎందుకంటే చలరాశుల్ని నమూనాలో ప్రవేశపెడుతున్న కొద్దీ సఫలత పెరుగుతోంది. అందుచేత మొదటి రెండు ప్రమాణాలు సంతృప్తి చెంది r^2 విలువ తక్కువగా వున్నా నిరుత్సాహపడనవసరం లేదు.

మీ అవగాహన పరీక్షించుకోండి

1) సహ సంబంధ గుణకానికి ప్రతిగమన గుణకానికి గల సంబంధ మేమి ?

2) సహ సంబంధ గుణకం ధనాత్మకమైతే ప్రతిగమన గుణకం ఋణాత్మకం అవుతుందా ? ఎందుకు ?

3) ప్రతిగమన గుణకాన్ని బట్టి కార్యకారణ సంబంధాన్ని ఎంతవరకు నిర్ణయించగలం ?

4) X,Y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం 0.6; Y,Z ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం 0.3 అయినచో X,Z ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం 0.3 అవుతుందా ? ఎందుకు ?

5) X,Y మధ్య సహసంబంధ గుణకం 0.3 ; మరొక రెండు రాశుల మధ్య (అనగా u,v ల మధ్య) సహ సంబంధ గుణకం 0.6 అయితే u,v ల మధ్య సంబంధం X,Y ల మధ్య సంబంధానికి రెట్టింపు అవుతుందా ?

6) X మీద Y ప్రతిగమనంలో గుణకం ధనాత్మకమైతే Y మీద X ప్రతిగమన గుణకం ఋణాత్మక మౌతుందా ? ఎందుకు ?

7) $r_{XY} = -0.6$; X మీద Y ప్రతిగమన గుణకం 1.2 అయినచో Y మీద X ప్రతి గమన గుణకం విలువ ఎంత ?

8) క్రింది ప్రతిగమన నమూనాలను పరిశీలించి పరామితులలో సరళ రేఖాత్మకమో, చలరాశుల్లో సరళరేఖాత్మకమో కనుగొని వేటిని సరళరేఖాత్మక ప్రతిగమన నమూనాలంటామో తెలుపండి.

(i) $Y_i = \beta_o + \beta_1 \frac{1}{X_1} + u_1$

(ii) $\ln Y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + u_1$

(iii) $Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_1} + u_i$

(iv) $\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + u_i$

(v) $\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + u_i$

(vi) $Y_i = \beta_0 + (0.75 - \beta_o) e^{-\beta_1 (X_i - 2)} + u_i$

BRAOU

పై సమీకరణాల్లో ln అనగా e ఆధారపు సంవర్గమానం

(9) క్రింది ప్రతిగమనం ఫలితాలను తీసుకొని $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ లకు 5% నమ్మిక అంతరాలను కనుగొనండి.

ప్రతిగమన గుణకాలు : $\hat{\beta}_1 = 1.48$ $\hat{\beta}_2 = 0.42$

క్రమదోషాలు : $Se(\hat{\beta}_1) = 0.54$ $Se(\hat{\beta}_2) = 0.212$ df : 12

(10) X,Y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం 0.8గా కనుగొనబడింది. ఈ దత్తాంశాలను తీసుకొని X మీద Y ప్రతి గమనాన్ని కనుగొంటే Y లో ని విస్తృతిని X ఎంత శాతం వివరించ గలదు ?

22.14 సారాంశము

రెండు చలరాశుల మధ్యగల సహసంబంధ స్వభావాన్ని వ్యాపక పటం ద్వారా తెలుసుకోగలము. ఈ సహ సంబంధపు దృఢత్వాన్ని కార్ల్ పియర్సన్ సహ సంబంధ గుణకం ద్వారా సూచిస్తాము. ఈ గుణకం విలువ ఎల్లప్పుడూ (-1,1) అంతరంలోనే వుంటుంది. ఇందులో -1, 1 విలువలు పరిపూర్ణ సహ సంబంధాన్ని తెలుపుతాయి. -1 విలువ ఋణాత్మక పరిపూర్ణ సహ సంబంధాన్ని 1 విలువ ధనాత్మక పరిపూర్ణ సహ సంబంధాన్ని తెలుపుతాయి. అనగా చలరాశుల విలువలు ఒక అనుపాతంలో వున్నాయని అర్థం. రేఖాత్మకంగా చూస్తే, బిందువులన్నీ ఒక సరళరేఖపై పడుతున్నాయని అర్థం. సహ సంబంధ గుణకం విలువ శూన్యమైతే రెండు రాశులకు సరళరేఖాత్మక సంబంధం లేదని అర్థం. కాని అసరళరేఖాత్మక సంబంధం వుండవచ్చు. కాబట్టి కేవలం సహసంబంధ గుణకం విలువలను బట్టి రెండు చలరాశులు స్వతంత్రాలని నిర్ధారణ చేయకూడదు ; కాని స్వతంత్ర చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం శూన్యమౌతుంది. చలరాశుల విలువలను మూల బిందువులోను, స్కేలులోను మార్చినా సహసంబంధ గుణకం విలువ మారదు.

ఒక్కొక్కప్పుడు చలరాశుల విలువలను ఖచ్చితంగా తెలుపలేక పోవచ్చు. కాని వాటి కోటులను నిర్ణయించగలము. ఇట్టి సందర్భంలో స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొంటాము.

ప్రతిరూప దత్తాంశాలను వాడి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొన్న తర్వాత, ఈ విలువ సాంఖ్యక ప్రాధాన్యతను కనుగొవాలి. ఎందుకంటే ప్రతిరూప చాంచల్యాల వల్ల శూన్య విలువ శూన్యం కాకపోవచ్చు. గుణకం ప్రాధాన్యత అంశాల సంఖ్యపై ఆధారపడుతుంది. అంశాల సంఖ్య పెరుగుతున్న కొద్దీ గుణకం విలువ తక్కువ వున్నా సాంఖ్యక ప్రాధాన్యతను పొందుతుంది.

సహ సంబంధ గుణకం రెండు చలరాశుల మధ్య సంబంధ దృఢత్వాన్ని తెలుపుతుందే కాని కార్యకారణ సంబంధాన్ని తెలుపదు. దీనిని సిద్ధాంత పరంగానే నిర్ణయిస్తాము. ఇలా నిర్ణయించిన తర్వాత స్వతంత్ర చలరాశిలో కొంత మార్పు వచ్చినప్పుడు ఆధారిత చలరాశిలో ఎంత మార్పు వస్తుందో ప్రతిగమనం ద్వారా తెలుసుకుంటాము.

సరళ రేఖాత్మక ప్రతి గమనంలో పరామితులు ఏకఘాతంగా లేదా సరళ రేఖాత్మకంగా వుండాలి. సరళరేఖాత్మక ప్రతిగమన రేఖను అంచనా వేయడానికి కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతిని వాడతాము. అనగా అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం కనిష్ఠంగా వుండేటట్లు రేఖను సంధాన పరుస్తాము. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి నుండి పొందిన ప్రతిగమన గుణకాల అంచనాలు ఉత్తమ సరళరేఖాత్మక నిష్పాక్షిక అంచనాలు.

BRAOU

సంధాన సఫలతను కనుగొనడానికి నిర్ధారణ గుణకాన్ని వాడతాము. దీనిని అంచనావర్గాల మొత్తానికి అసలు వర్గాల మొత్తానికి గత నిష్పత్తిగా నిర్వచిస్తాము. ఈ విలువ సహ సంబంధ గుణకపు వర్గానికి సమానము. X పై Y ప్రతిగమనం వలెనే Y పై X ప్రతిగమనాన్ని కూడా అంచనా వేయగలము. ఈ రెండు ప్రతిగమనాల్లోని గుణకాల లబ్ధము సహసంబంధ గుణకం వర్గానికి సమానం. అంతేగాక రెండు ప్రతిగమన గుణకాలు సహసంబంధ గుణకం, ఒకే సంకేతాన్ని కలిగివుంటాయి.

ప్రతిగమన గుణకాలు సామాన్య విభాజనాన్ని పొందుతున్నాయనుకుంటే, గుణాల సంఖ్యకు ప్రాధాన్యతను కనుగొనగలము. అంచనా వేయబడిన t విలువ పట్టిక విలువ కంటే ఎక్కువ వున్నప్పుడు అంచనా వేయబడిన గుణకం శూన్యం కంటే పరమైనదని నిర్ణయిస్తాము.

ప్రతిగమన గుణకాల అంచనాలను బిందు అంచనాలంటాము. వీటి నుండి అంతరం అంచనాలను కూడా కనుగొనగలము. దీనికి t విభాజన పట్టిక నుండి తగిన విలువను తీసుకుని గుణకపు క్రమ దోషంలో గుణిస్తాము. బిందు అంచనా విలువకు ఈ విలువను కలుపగా అంతరం అంచనా కుడి హద్దు తీసివేయగా ఎడమ హద్దు వస్తుంది. అనగా లోక ప్రతిగమన గుణకం ఈ అంతరంలో వుంటుందని అర్థం.

22.15 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

1) క్రింది పట్టికలో పారిశ్రామిక ఉత్పత్తి, నిరుద్యోగుల సంఖ్య యివ్వబడినవి. వీటి మధ్య కార్ల్ పియర్సన్ సహ సంబంధ గుణకాన్ని గణించి వివరించండి.

సంవత్సరం	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
ఉత్పత్తిసూచి	100	102	104	107	105	112	103	99
నిరుద్యోగులు	15	12	13	11	12	12	19	26

2) క్రింది పట్టికలో టీ, కాఫీ ధరలు ఇవ్వబడ్డయి. వీటి మధ్యగల స్పీర్‌మన్ కోటి సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

టీ ధర :	75	88	95	70	60	80	81	50
కాఫీ ధర :	120	134	150	115	110	140	142	100

3) క్రింది దత్తాంశాలను తీసుకొని X,Y మధ్య సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనండి.

X	1	2	3	4	5
Y	1	4	9	16	25

సహ సంబంధ గుణకం విలు 1 కాకపోవడానికి కారణం ఏమిటి ?

4) నాలుగు కంపెనీల లాభాలు, పరిశోధనాల వ్యయాలు క్రింద పొందు పరచబడ్డాయి.

లాభం (లక్షల రూ.లలో)	50	60	40	50
పరిశోధనా వ్యయం (లక్షల రూ.)	40	40	30	50

BRAOU

(ఎ) R పై P (P on R) ప్రతిగమన రేఖను కనుగొనండి.

(బి) ఇచ్చిన విలువలను అనుసంధాన రేఖను రేఖా పటంలో చూపండి.

22.16 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. Taro Yamane : Statistics
2. Damodar Gujarati : Basic Econometrics

22.17 పదకోశం

వ్యాపక పటం	Scatter diagram
సహ సంబంధం	Correlation
సహసంబంధ గుణకం	Coefficient of correlation
కోటి సహసంబంధం	Rank correlation
కోటి సహసంబంధ గుణకం	Coefficient of rank correlation
సార్థకతా పరీక్ష	Test of significance
ప్రతిగమనము	Regression
ప్రతిగమన గుణకం	Regression coefficient
రెండు చలరాశుల ప్రతిగమనం	Two variable regression
సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి	Method of ordinary least squares
సరళ రేఖాత్మక ప్రతిగమనం	Linear regression
కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు	Least squares estimates
ఉత్తమ సరళరేఖాత్మక నిష్పాక్షిక అంచనాలు	Best linear unbiased estimates
కనిష్ఠ విస్తృతి	Minimum variance
నిర్ధారక గుణకం	Coefficient of determination
పరికల్పన పరీక్ష	Hypothesis testing
సహ విస్తృతి	Covariance
అంతరం అంచనా	Interval estimation

BRAOU

సంధాన సఫలత	Goodness of fit
అవశిష్టాలు	Residuals
అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం	Residual some of squares
దోష పదం	Error term
స్వయం సహసంబంధం	Auto-correlation
పరిపూర్ణ ధనాత్మక సహసంబంధం	Perfect postive correlation
పరిపూర్ణ ఋణాత్మకసహసంబంధం	Perfect negative correlation
సమ విస్తృతి	Homoscedasticity
అసమ విస్తృతి	Heteroscedasticity
ఆశంశిత విలువ	Expected value
ఆశంశలు	Expectations
అసలు వర్గాల మొత్తం	Total sum of squares (TSS)
వివరించిన వర్గాల మొత్తం	Explained sum of squares (ESS)
అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం	Residual sum of squares (RSS)
ప్రాతిపదిక పరికల్పన	Null hypothesis
ప్రత్యమ్నాయ పరికల్పన	Alternative hypothesis
సంయుక్త పరికల్పన	Composit hypothesis
ద్విపాక్షక పరీక్ష	Two - tailed test
నమ్మిక అంతర పద్ధతి	Confidence interval method
ప్రాధాన్యత పరీక్ష పద్ధతి	Test of significance method
అంగీకార ప్రాంతం	Acceptance region
పరీక్షా గణాంకం	Test statistic
క్లిష్ట ప్రాంతం	Critical region
తిరస్కార ప్రాంతం	Rejection region
క్లిష్ట విలువలు	Critical values
విస్తృతి విశ్లేషణ	Analysis of variance

- ఆచార్య ఎస్. సుబ్రహ్మణ్యం

BRAOU

భాగం - 23 : బహుళ ప్రతిగమనము (Multiple Regression)

విషయక్రమం

23.0 ఉద్దేశాలు

23.1 పరిచయం

23.2 మూడు చలరాశుల లోక ప్రతిగమనం, ప్రమేయాలు

23.3 పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాల వివరణ

23.4 సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు

23.5 కనిష్ఠ వర్గాల, అంచనాల విస్తృతులు, క్రమదోషాలు

23.6 బహుళ నిర్ధారక గుణకం ; బహుళ సహ సంబంధ గుణకం

23.7 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలు

23.8 సూక్ష్మ, పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలు

23.9 బహుళ ప్రతిగమనం - ఉదాహరణ

23.10 సార్థకతా పరీక్షలు (Tests of significance)

23.11 ప్రతిరూప ప్రతిగమన మొత్తం సార్థకత

23.12 బహుళ ప్రతిగమనం - కొన్ని అంశాలు

23.13 ముగింపు

23.14 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

23.15 పదకోశం

BRAOU

23.0 ఉద్దేశాలు

ఒక ఆధారిత చలరాశి ఒకటి కంటే ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులచే ప్రభావితమైనపుడు ప్రతిగమన నమూనాను అంచనా వేయడం ; ఈ అంచనా ద్వారా పొందే పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలను వివరించడం ; వీటికి సూక్ష్మ ప్రతిగమన గుణకాలలో గల సంబంధాన్ని తెలుసుకోవడం ; పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలను నిర్వచించి వీటికి సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకాలలో గల సంబంధాన్ని కనుగొనడం ; బహుళ నిర్ధారక గుణకాన్ని బహుళ సహ సంబంధ గుణకాన్ని నిర్వచించి వీటికి సూక్ష్మ పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలలో గల సంబంధాన్ని కనుగొనడం ; ప్రతిగమన గుణకాల సార్థకతనూ ప్రతిగమనం మొత్తం సార్థకతనూ పరీక్షించడం ఈ భాగంలో నేర్చుకుంటారు. అంతేకాక, ప్రతిగమన విశ్లేషణలోని కొన్ని ముఖ్య అంశాలను కూడా ఈ భాగంలో తెలుసుకుంటారు.

23.1 పరిచయం

వెనుకటి పాఠంలో నేర్చుకున్న ద్విచలరాసి నమూనా అన్ని సందార్భల్లోను సరిపోదు. ఉదాహరణకు మనం తీసుకున్న వినియోగ - ఆదాయ నమూనాలో ఆదాయం (X) మాత్రమే వినియోగాన్ని ప్రభావితం చేస్తుందనుకున్నాము. కాని సిద్ధాంతపరంగా ఆలోచిస్తే ఆస్తి సంపద (wealth) మొదలైన చలరాసులెన్నో వినియోగాన్ని ప్రభావితం చేస్తాయి. ఇంకో ఉదాహరణ తీసుకుందాం. ఒక వస్తువు డిమాండ్ ఆ వస్తువు ధరపై మాత్రమే కాక ఆ వస్తువుకు పూరక, ప్రత్యామ్నాయ వస్తువుల ధరలు, వినియోగదారుని ఆదాయం మొదలగు రాసులపై ఆధార పడుతుంది. అందువల్ల మన ప్రతిగమన నమూనాను రెండు కంటే ఎక్కువ చలరాశులను తీసుకునేందుకు వీలుగా పొడిగించాలి. బహుళ ప్రతిగమన నమూనాలో మూడు చలరాశుల నమూనా అనగా ఒక ఆధారిత చలరాశి రెండు స్వతంత్ర చలరాశులు గల నమూనా అతి సూక్ష్మమైనది. దీనిని గూర్చి ఈ పాఠంలో నేర్చుకుందాం. మన విశ్లేషణ సరళరేఖాత్మక ప్రతిగమన నమూనాలకే పరిమితమై ఉంటుంది. అనగా పరామితులలో సరళరేఖాత్మకమైతే సరిపోతుంది. చలరాశుల్లో సరళరేఖాత్మకం కానవసరం లేదు.

23.2 మూడు చలరాశుల లోక ప్రతిగమన సమీకరణం

రెండు చలరాశుల లోక ప్రతిగమన నమూనాను పొడిగించి మూడు చలరాశుల నమూనాను క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$Y_i = \beta_i + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

ఇందులో, Y ఆధారిత చలరాశి ; X_2, X_3 లు స్వతంత్ర చలరాశులు ; u దోష పదము ; i (1 . . .n) పరిశీలనాంశాల సంఖ్య. పై సమీకరణంలో β_i Y అక్షంమీద అంతర ఖండనము. ఇది Y చలరాశిపై నమూనాలోకి తీసుకోబడని చలరాశుల సగటు ప్రభావాన్ని తెలుపుతుంది. β_2, β_3 లను పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలంటాము.

పై సమీకరణంలోని ప్రతిగమన గుణకాలను ఏ స్వతంత్ర చలరాశికి చెందినవో సులభంగా గుర్తించడానికి ప్రతి పరామితికి పాదుకను చేరుస్తాము.

$$Y_i = \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2i} + \beta_{13.2} X_{3i} + u_i$$

పాదుకలోని 1 స్వతంత్ర చలరాశిని, 2 స్వతంత్ర చలరాశి X_2 ని, 3 స్వతంత్ర చలరాశి X_3 ని తెల్పుతాయి. ప్రతి పరామితికి మూడు పాదుకలున్నాయి. బిందువుకు ఎడమవైపున ఉన్న పాదుకల్లో మొదటిది స్వతంత్ర చలరాశిని, రెండవది β గుణకం ఏ స్వతంత్ర చలరాశికి సంబంధించిందో ఆ చలరాశిని తెల్పుతాయి. బిందువు కుడి ప్రక్కనున్న పాదుకలో ప్రతిగమన నమూనాలోని ఇతర చలరాశుల్ని తెల్పుతాయి. ఉదాహరణకు $\beta_{12.3}$ ని తీసుకుందాము. ఇందులో బిందువుకు ఎడమవైపు 12 ఉంది. అనగా Y స్వతంత్ర చలరాశిగా తీసుకున్నప్పుడు X_2 చలరాశి పాక్షిక ప్రతి గమన గుణకాన్ని ఇది సూచిస్తుంది. బిందువుకు కుడివైపునున్న పాదుక 3 ని బట్టి ప్రతిగమనం లోకి X_3 కూడా తీసుకోబడిందని తెలుస్తోంది. $\beta_{1.23}$ అంతరఖండనం. అందుచే దీనికి బిందువు కుడి ప్రక్కన ఒకే పాదుక ఉంది.

23.2.1 మూడు చలరాశుల లోక ప్రతిగమనం - ప్రమేయాలు

రెండు చలరాశుల నమూనాలోని ప్రమేయాలనేకాక అదనంగా ఒక ప్రమేయాన్ని చేసుకుంటాము. వెనుకటి ప్రమేయాలను త్రిచలరాశి సందర్భంలో క్రింది విధంగా రాస్తాము.

1. ప్రతి విలువకు u_i సగటు విలువ శూన్యం

   $(E\,u_i / X_{2i}, X_{3i}) = 0$

2. దోష పదానికి స్వయం సహ సంబంధం శూన్యం

   $Cov(u_i, u_j) = 0 \qquad i \neq j$

3. ప్రతి X_i విలువ వద్ద u_i విస్తృతి సమానం (homoscedasticity)

   $Var(u_i) = \sigma^2$

4. ప్రతి స్వతంత్ర చలరాశికి u_i తో సహ విస్తృతి శూన్యం

   $Cov(u_i, X_{2i}) = 0;\; Cov(u_i, X_{3i}) = 0$

   పై నాలుగు ప్రమేయాలే కాక మరొక ప్రమేయాన్ని చేసుకుంటాము.

5. స్వతంత్ర చలరాశుల మధ్య పరిపూర్ణ సరళరేఖాత్మక సంబంధం శూన్యం. దీనినే బహుళ సరళ రేఖీయత (multicollinearity) లేకపోవుట అంటాము. అనగా X_2, X_3 ల మధ్య సరళరేఖాత్మక సంబంధముండరాదు. ఉదాహరణకు $X_{2i} = 4X_{3i}$ అయితే X_2, X_3 లు ఒకదానిపై ఒకటి సరళరేఖాత్మకంగా ఆధార పడుతున్నాయి. ఇటువంటి సంబంధముండరాదు. అసరళ రేఖాత్మక సంబంధం ఉన్న మన ప్రమేయానికి అడ్డురాదు. అనగా $X_{2i} = X^2_{3i}$ అయినా బహుళ సరళరేఖీయత (multi - collinearity) అనము. ఈ ప్రమేయం వెనుక గల అంతరార్థాన్ని సులువుగా గ్రహించవచ్చు. X_2, X_3 ల మధ్య పరిపూర్ణ సరళరేఖాత్మక సంబంధం ఉన్నప్పుడు ఈ రెంటిని వేర్వేరుగా తీసుకోలేము : Y పై వాటి ప్రభావాన్ని విడదీయలేము. పైన చెప్పబడినట్లు $X_{2i}=4X_{3i}$ అయినచో పై ప్రతిగమనంలో X_{2i} కాని X_{3i} కాని ఉండదు. ఎందుకంటే ప్రతిగమన సమీకరణంలో ఈ సంబంధాన్ని ప్రతిక్షేపిస్తే ఒక స్వతంత్ర చలరాశి లోపిస్తుంది. మనం తీసుకున్న ప్రతిగమన సమీకరణంలో X_2 కి బదులు $4X_3$ ప్రతిక్షేపిద్దాము.

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2i} + \beta_{13.2} X_{3i} + u_i \\
&= \beta_{1.23} + \beta_{12.3}(4X_{3i}) + \beta_{13.2} X_{3i} + u_i \\
&= \beta_{1.23} + (4\beta_{12.3} + \beta_{13.2}) X_{3i} + u_i \\
&= \beta_{1.23} + \alpha X_{3i} + u_i
\end{aligned}
$$

ఇందులో $\alpha = 4\beta_{12.3} + \beta_{13.2}$

ప్రతిగమనం ద్వారా α ను అంచనా వేయగలం. కాని $\hat{\beta}_{12.3}$, $\hat{\beta}_{13.2}$ లను అంచనా వేయలేము. అనగా X_2, X_3 ల ప్రభావాలను విడిగా కనుగొనలేము.

బహుళసరళరేఖీయత లేదనే ప్రమేయం వల్ల సరళరేఖాత్మకంగా ఒకదానిపై ఒకటి ఆధారపడే చలరాశులన్నిటినీ నమూనా లోకి తీసుకోలేము.

రెండు చలరాశుల సందర్భంలో వలెనే ఇక్కడ కూడా Y యొక్క వరతు అంశలను తీసుకోవచ్చు.

$$E(Y_i / X_{2i}, X_{3i}) = \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2i} + \beta_{13.2} X_{3i}$$

పై సమీకరణం X_2, X_3 ల నిర్ణీత విలువలకు Yయొక్క సగటు విలువను తెలుపుతుంది.

23.3 పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాల వివరణ

పై ప్రతిగమన సమీకరణాల్లోని $\beta_{12.3} + \beta_{13.2}$ లను పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలంటాము. X_3 విలువలను స్థిరంగా ఉంచి X_2 లో ఒక యూనిట్ మార్పు చేస్తే Y యొక్క సగటు విలువలో వచ్చే మార్పును $\beta_{12.3}$ తెల్పుతుంది. ఇంకోవిధంగా చెప్పాలంటే X_2 లో ఒక యూనిట్ మార్పు Y సగటు విలువలో కలుగజేసే నికర మార్పు లేదా ప్రత్యక్ష మార్పును $\beta_{12.3}$ తెలుపుతుంది. అనగా X_3 ప్రభావాన్ని తొలగించగా మిగిలిన నికరపు మార్పు అని అర్థం. ఇదేవిధంగా $\beta_{13.2}$ ని కూడా వివరిస్తాము.

23.4 సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు

ప్రతిగమన ప్రమేయాన్ని ప్రతిరూప దత్తాంశాలతో అంచనా వేస్తాము. ప్రతిరూప ప్రతిగమన ప్రమేయాన్ని క్రింది విధంగా రాస్తాము. సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలను పొందడానికి ముందుగా ప్రతిరూప ప్రతిగమన ప్రమేయాన్ని తీసుకుంటాము.

$$Y_i = \hat{\beta}_{1.23} + \hat{\beta}_{12.3} X_{2i} + \hat{\beta}_{13.2} X_{3i} + e_i$$

ఇందులో e_i ని అవశిష్టం అంటాము. సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ప్రకారం అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తం విలువ కనిష్ఠంగా ఉండేటట్లు పరామితుల విలువలను ఎంచుకుంటాము. అనగా

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma \left(Y_i - \hat{\beta}_{1.23} - \hat{\beta}_{12.3} X_{2i} - \hat{\beta}_{13.2} X_{3i}\right)$$

కనిష్ఠం కావాలి. కలన గణిత పద్ధతిలో కనిష్ఠీకరించగా క్రింది సామాన్య సమీకరణాలను పొందుతాము.

$$\overline{Y} = \hat{\beta}_{1.23} + \hat{\beta}_{1.23} \overline{X}_2 + \hat{\beta}_{13.2} \overline{X}_3$$

$$\Sigma Y_i X_{2i} = \hat{\beta}_{1.23} \Sigma X_{2i} + \hat{\beta}_{12.3} \Sigma X^2_{2i} + \hat{\beta}_{13.2} \Sigma X_{2i} X_{3i}$$

$$\Sigma Y_i X_{3i} = \hat{\beta}_{1.23} \Sigma X_{3i} + \hat{\beta}_{12.3} \Sigma X_{2i} X_{3i} + \hat{\beta}_{13.2} \Sigma X^2_{3i}$$

పై మూడు సమీకరణాలను సాధించి $\hat{\beta}_{1.23}$, $\hat{\beta}_{12.3}$, $\hat{\beta}_{13.2}$ విలువలను పొందగలము. రెండు, మూడు సమీకరణాలను సాధించగా $\hat{\beta}_{12.3}$, $\hat{\beta}_{13.2}$ విలువలను పొందుతాము.

B R A O U

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{\left(\Sigma y_i x_{2i}\right)\left(\Sigma x_{3i}^2\right) - \left(\Sigma y_i x_{3i}\right)\left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)}{\left(\Sigma x_{2i}^2\right)\left(\Sigma x_{3i}^2\right) - \left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_{13.2} = \frac{\left(\Sigma y_i x_{3i}\right)\left(\Sigma x_{2i}^2\right) - \left(\Sigma y_i x_{2i}\right)\left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)}{\left(\Sigma x_{2i}^2\right)\left(\Sigma x_{3i}^2\right) - \left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)^2}$$

పై సమీకరణాల్లోని చిన్న అక్షరాలలో (Small letters) చూపబడిన చలరాశులు అసలు చలరాశుల సగటు విలువల నుండి విచలనాలను తెలుపుతాయి. అనగా $x_{2i} = X_{2i} - \overline{X}_2$. ఇదేవిధంగా మిగిలిన చలరాశులను కూడా తీసుకోండి.

$\hat{\beta}_{12.3}$, $\hat{\beta}_{13.2}$ విలువల్ని మొదటి సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి $\hat{\beta}_{1.23}$ విలువను పొందగలము.

$\beta_{1.23} = \overline{Y} - \hat{\beta}_{12.3}\overline{X}_2 - \hat{\beta}_{13.2}\overline{X}_3$

$\hat{\beta}_{1.23}$, $\hat{\beta}_{12.3}$, $\hat{\beta}_{13.2}$ లు సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు.

$\hat{\beta}_{12.3}$, $\hat{\beta}_{13.2}$ ల సూత్రాలను గమనిస్తే రెండు ముఖ్య విషయాలు తెలుస్తాయి. అవి ఏమనగా-

1) $\hat{\beta}_{12.3}$ లోను, $\hat{\beta}_{13.2}$ లోను హారం ఒకటే.

2) మొదటి సమీకరణలోని పాదుకైన 2 ను 3 చేయగా $\beta_{13.2}$ విలువను, రెండవ సమీకరణం పాదుకైన 3 ను 2 చేయగా $\beta_{12.3}$ విలువను పొందగలము. $\beta_{12.3}$, $\beta_{13.2}$ లను పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలంటారు.

23.5 కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాల విస్తృతులు, క్రమదోషాలు

$\beta_{12.3}$, $\beta_{13.2}$ ల నమ్మిక అంతరాలను ఏర్పరచుకొనేందుకు సార్థకతా పరీక్షలను జరపడానికి అంచనాల క్రమదోషాలు అవసరం. అంచనాల విస్తృతి, క్రమ దోషాలకు సూత్రాలు క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_{12.3}\right) = \left(\frac{\Sigma x_{3i}^2}{\left(\Sigma x_{2i}^2\right)\left(\Sigma x_{3i}^2\right) - \left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)^2}\right)\sigma^2$$

లవహారాలను Σx_{3i}^2 చే భాగించగా

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_{12.3}\right) = \frac{\sigma^2}{\Sigma \chi_{2i}^2\left(1 - r_{23}^2\right)}$$

ఇందులో r_{23} ని X_2, X_3 ల మధ్య ప్రతిరూప సహ సంబంధ గుణకంగాను σ^2 ను దోషాల విస్తృతిగాను తెలుసుకోవాలి.

BRAOU

$$Se\left(\hat{\beta}_{12.3}\right) = +\sqrt{Var\,\hat{\beta}_{12.3}}$$

ఇదేవిధంగా

$$Var\left(\hat{\beta}_{13.2}\right) = \left(\frac{\sum x_{2i}^2}{\left(\sum x_{2i}^2\right)\left(\sum x_{3i}^2\right) - \left(\sum x_{2i}\, x_{3i}\right)^2}\right)\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum\chi_{3i}^2\left(1 - r_{23}^2\right)}$$

$$Se\left(\hat{\beta}_{13.2}\right) = +\sqrt{Var\left(\hat{\beta}_{13.2}\right)}$$

పై సూత్రాల్లోని σ^2 విలువను ప్రతిరూప దత్తాంశాల నుండి కనుగొనలేము. దీని అంచనాను మాత్రమే మనం కనుక్కోగలం. ఈ అంచనాను $\hat{\sigma}^2$ గా రాస్తాము. దీనిని అంచనా విస్తృతి (variance of the estimates) అంటాము.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{N-3}$$

ఇందులో N-3ని స్వేచ్ఛా డిగ్రీలంటాము (degrees of freedom-df). రెండు చలరాశుల ప్రతిగమనంలోని σ^2 అంచనాతో దీనికి గల సారూప్యాన్ని గమనించండి. ఇక్కడ $\sum e_i^2$ని అంచనా వేయడానికి ముందు మూడు పరామితులను అంచనా వెయ్యాలి. అందుచే N దత్తాంశాల నుండి 3df ను పోగొట్టుకుంటాము. కాబట్టి అంచనా విస్తృతిని పొందాలంటే అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తాన్ని స్వేచ్ఛా డిగ్రీలతో భాగించాలి. మూడు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో N-3 చేత, నాలుగు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో N-4 చేత, K చలరాశుల ప్రతిగమనంలో N-K చేత $\sum e_i^2$ ను భాగించాలి. σ^2 ను అంచనా క్రమదోషం (standard error of the estimate) అంటాము.

$$\therefore \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{N-3}}$$

$\sum e_i^2$ ను సులభంగా గణన చేయడానికి $\sum y_i^2$, $\sum y_i\, x_{2i}$, $\sum y_i\, \sum y_{3i}$ విలువలను వాడతాము.

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_{12.3}\sum y_i\, x_{2i} - \hat{\beta}_{13.2}\sum y_i\, x_{3i}$$

23.6 బహుళ నిర్ధారక గుణకం, బహుళ సహ సంబంధ గుణకం

రెండు చలరాశుల సందర్భంలో r^2 ను ప్రతిగమన సమీకరణ సంధాన సఫలత (goodness of fit) కు సూచికగా తీసుకున్నాము. ఇది Y రాశి విస్తృతిలో X రాశి వివరించిన భాగాన్ని తెలుపుతుంది. ఈ భావనను

రెండు కంటె ఎక్కువ చలరాశులున్న సందర్భాలకు పొడిగించగలం. ప్రస్తుత సందర్భంలో X_2, X_3 లు సమిష్టిగా Y లోని విస్తృతిలో ఎంత భాగాన్ని వివరిస్తున్నాయో తెలుస్తుంది. దీనినే బహుళ నిర్ధారక గుణకమంటాము ; దానికి $R^2_{1.23}$ ను సంకేతంగా వాడతాము. భావనాపరంపరగా ఇది r^2 కు సన్నిహితమైనది.

$$R^2_{1.23} = \frac{ESS}{TSS}$$

ఇందులో, ESS అనగా అంచనావర్గాల మొత్తం ; TSS అనగా ఆధారిత చలరాశి వర్గాల మొత్తం.

$$R^2_{1.23} = \frac{\hat{\beta}_{12.3} \Sigma y_i x_{2i} + \hat{\beta}_{13.2} \Sigma y_i x_{3i}}{\Sigma y_i^2}$$

$R^2_{1.23}$ విలువ r^2 విలువ వలెనే ఎల్లప్పుడు (0,1) అంతరంలో ఉంటుంది. దీని విలువ 1 అయితే సంధానపరచిన ప్రతిగమన రేఖ Y రాశి లోని విస్తృతిని నూటికి నూరు పాళ్ళు వివరించిందని అర్థం ; 0 అయితే సంధాన పరచిన రేఖ Y లోని విస్తృతిని ఎంతమాత్రం వివరించలేదని అర్థం. వాస్తవంలో ఈ రెండు విలువలు సంభవించవు. అందుచేత R^2 విలువ 1 కి చేరువవుతున్న కొలదీ నమూనా సంధానము మెరుగుపడుతోందని అర్థం.

ద్విచలరాశి నమూనాలో r ను సహసంబంధ గుణకంగా కనుగొన్నాము. ఇది రెండు చలరాశుల మధ్య గల సంబంధ దృఢత్వాన్ని తెలుపుతుంది. రెండు కంటె ఎక్కువ చలరాశుల్ని తీసుకున్నప్పుడు r విలువను బహుళ సహసంబంధ గుణకమంటాము. దీనికి $R^2_{1.23}$ ని సంకేతంగా వాడతాము. ఇది సమిష్టిగా స్వతంత్ర చలరాశులకు Y రాశితో గల సంబంధ దృఢత్వాన్ని తెలుపుతుంది. అయితే ఈ భావనకు ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత లేదు.

R^2 మరియు సవరించిన R^2 ($\bar{R}^2$)

R^2 ఒక ముఖ్య ధర్మాన్ని కలిగి ఉంది. నమూనాలో చలరాశుల్ని చేరుస్తూంటే R^2 విలువ పెరుగుతుంది. కనుక R^2 ను వాడి నమూనాలోకి ఒక చలరాశిని తీసుకోవాలో లేదో నిర్ణయించలేము. ఇందుకు R^2 ను స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు సవరిస్తాము. దీనిని $\bar{R}^2$ అని రాస్తాము. దీనిని వాడి ఒకే స్వతంత్ర చలరాశిగల వివిధ ప్రతిగమన నమూనాలను సరిపోల్చగలం.

$$R^2_{1.23} = \frac{ESS}{TSS}$$

$$= 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

$$= 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma y_i^2}$$

$$\overline{R}^2_{1.23} = 1 - \frac{\sum e_i^2 / N-3}{\sum y_i^2 / N-1}$$

మూడు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో $K=3$. అనగా K అంచనా వేయబడిన పరామితులను తెల్పుతుంది.

$\overline{R}^2_{1.23}$ ను క్రింది విధంగా కూడా రాయగలమని గమనించండి.

$$\overline{R}^2_{1.23} = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{S_y^2}$$

R^2 కు $\overline{R}^2$ కు గల సంబంధాన్ని గమనిద్దాం.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$1 - R^2 = \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\left(1 - R^2\right)\frac{N-1}{N-K} = \frac{\sum e_i^2 / N-K}{\sum y_i^2 / N-1}$$

$$\therefore 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{N-1}{N-K} = 1 - \frac{\sum e_i^2 / N-K}{\sum y_i^2 / N-1} = \overline{R}^2$$

$$\therefore \overline{R}^2 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{N-1}{N-K}$$

$\overline{R}^2$ సూత్రాన్ని పరిశీలిస్తే రెండు విషయాలు తెలుస్తాయి.

1) $\overline{R}^2$ సర్వసాధారణంగా R^2 కంటె తక్కువగా ఉంటుంది. ఎందుకంటే

$$1 - \overline{R}^2 = \left(1 - R^2\right)\frac{N-1}{N-K}$$

ఇక్కడ $\frac{N-1}{N-K} > 1$

$$\therefore 1 - \bar{R}^2 > 1 - R^2$$

$$-\bar{R}^2 > -R^2$$

$$\therefore \bar{R}^2 < R^2$$

2) R^2 ఎప్పుడూ రుణాత్మకం కాదు ; కాని $\bar{R}^2$ రుణాత్మకం కావచ్చు. ఎందుకంటే R^2 విలువ చాలా తక్కువగా ఉన్నప్పుడు $(1-R^2)$ విలువ 1 కి దగ్గరగా ఉంటుంది. దీనిని $\frac{N-1}{N-K}$ చే గుణించగా 1 కంటె ఎక్కువ విలువ కావచ్చు. అప్పుడు $\bar{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{N-1}{N-K}$ విలువ రుణాత్మకమౌతుంది.

$\bar{R}^2$ రుణాత్మక విలువను పొందినచో దాన్ని శూన్యంగా మాత్రమే పరిగణిస్తాము.

23.7 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకము

త్రిచలరాశి ప్రతిగమన నమూనాలోని మూడు చలరాశుల మధ్య మూడు సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకాలను కనుగొనగలము. అవి: R^2 అనగా Y, X_2 ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం. r_{13} అనగా Y, X_3 ల మధ్య సహ సంబంధ గుణకం. r_{23} అనగా X_2, X_3 ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం. వీటిని స్థూల (gross) లేదా శూన్యఆర్డరు (zero order) సహ సంబంధ గుణకాలంటాము. ఈ గుణకాలకు ఒక పరిమితి (limitation) ఉంది. X_3 రాశి X_2, Y రాశుల రెండింటి తోను సంబంధం కలిగి ఉందనుకుందాము. ఇప్పుడు r_{12} విలువ Y, X_2 ల మధ్యగల సహ సంబంధాల యొక్క దృఢత్వాన్ని తెలుపదు. అందుచేత Y, X_2లపై X_3 ప్రభావం లేకుండా ఉండే సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనాలి. పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకం దానికి ఉపయోగపడుతుంది. భావనాపరంగా ఇది పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకం మాదిరిగానే ఉంటుంది. వీటిని క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$r_{12.3} = X_3$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు Y, X_2 ల మధ్య పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకం

$r_{13.2} = X_2$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు Y, X_3 ల మధ్య పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకం

$r_{23.1} = Y$ ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు X_2, X_3 ల మధ్య పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకం

వీటిని సూక్ష్మ లేదా శూన్య ఆర్డరు సహ సంబంధ గుణకాల నుండి పొందగలము.

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12} r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}$$

పై పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలను మొదటి ఆర్డరు గుణకాలంటాము. అనగా రెండవ పాదుకలో ఒక సంఖ్య మాత్రమే ఉంది. ఎందుకంటే ఒక చలరాశి ప్రభావాన్ని మాత్రమే తొలగించి సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొంటాము. ఇదే విధంగా రెండవ ఆర్డరు పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలను నిర్వచించగలము. $r_{12.34}$ ని Y, X_2 లపై X_3, X_4 ల ప్రభావాన్ని తొలగించిన తర్వాత కనుగొన్న సహసంబంధ గుణకంగా తెలుసుకోవాలి. పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాన్ని పరిశీలించి కొన్ని ముఖ్య విషయాలను తెలుసుకోగలము.

1) r_{12} శూన్యమైనా $r_{12.3}$ శూన్యం కానవసరం లేదు.

2) $r^2_{12.3}$ విలువ r^2_{12} విలువ వలెనే (0,1) అంతరంలో ఉంటుంది. దీనిని బట్టి సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకాల మధ్య క్రింది సంబంధాన్ని పొందుతాము.

$$o \le r^2_{12.3} \le 1$$

$$o \le r^2_{12} + r^2_{13}\, r^2_{23} - 2\, r_{12}\, r_{13}\, r_{23} \le \left(1 - r^2_{13}\right)\left(1 - r^2_{23}\right)$$

$$o \le r^2_{12} + r^2_{13} + r^2_{23} - 2\, r_{12}\, r_{13} r_{23} \le 1$$

ఈ సంబంధం వల్ల r_{12}, r_{13}, r_{23} విలువలు సాధ్యమో కాదో చెప్పగలం.

ఉదా : $r_{12} = 0.8$; $r_{23} = 0.9$; $r_{13} = -0.2$ సాధ్యమా ?

$$r^2_{12} + r^2_{13} + r^2_{23} - 2 r_{12}\, r_{13}\, r_{23} = 0.64 + 0.81 + 0.04 - 2 \times 0.8 \times 0.9 \times (-0.2)$$

$$= 1.49 + 0.288$$

$$= 1.778 > 1$$

∴ పైన ఇవ్వబడిన విలువలు సాధ్యం కాదు.

B R A O U

ఉదా : $r_{21} = 0.01$; $r_{13} = 0.66$; $r_{23} = -0.7$

$$r^2_{12} + r^2_{13} + r^2_{23} - 2 r_{12}\, r_{13}\, r_{23}$$

$$= 0.0001 + 0.4356 + 0.49 - 2 \times 0.01 \times 0.66\ (-0.7)$$

$$= 0.93494 < 1$$

కావున ఈ విలువలు సాధ్యము

23.7.1 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాల వివరణ

సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకం శూన్యమైనా పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకం శూన్యం కానవసరంలేదు. r_{12} శూన్యమై r_{23}, r_{13} లు ఒకే గుర్తు కలిగి వుంటే $r_{12.3}$ రుణాత్మకమౌతుంది. ఒక ఉదాహరణ తీసుకుందాం. పంట దిగుబడి Y, వర్షపాతం X_2, ఉష్ణోగ్రత X_3 అనుకుందాం. $r_{12} = 0$ అనుకుందాం. r_{13} ధనాత్మకం, r_{23}

రుణాత్మకం అనుకుందాం. ఇప్పుడు $r_{12.3}$ ధనాత్మకం అనగా ఉష్ణోగ్రతను స్థిరంగా ఉంచితే దిగుబడికి వర్షపాతానికి ధనాత్మక సంబంధముంటుంది. కాబట్టి $r_{12.3}$, r_{12} ఒకే గుర్తును కలిగి ఉండనక్కరలేదు.

23.7.2 సూక్ష్మ, పాక్షిక సహసంబంధ గుణకాలకు బహుళ నిర్ధారక గుణకానికి గల సంబంధం

$$R^2_{1.23} = \frac{r^2_{12} + r^2_{13} - 2\, r_{12} r_{13} r_{23}}{1 - r^2_{23}}$$

$$= r^2_{12} + \left(1 - r^2_{12}\right) r^2_{13.2}$$

$$= r^2_{13} + \left(1 - r^2_{13}\right) r^2_{12.3}$$

పై సంబంధాలను బట్టి ప్రతిగమన నమూనాలో స్వతంత్ర చలరాశుల్ని చేర్చేకొద్దీ R^2 విలువ పెరుగుతుందే కాని తగ్గదని గమనించవచ్చు. X_2, X_3 లు సమిష్టిగా వివరిస్తున్న Y లోని విస్తృతిని రెండు భాగాలుగా చేయవచ్చు. ఇవి : X_2 మాత్రమే వివరిస్తున్న భాగం (అనగా r^2_{12}), X_2 వివరించని భాగం మరియు X_2 ని స్థిరంగా ఉంచినప్పుడు X_3 వివరించిన భాగముల లబ్ధము [అనగా $\left(1-r^2_{12}\right) r^2_{13.2}$]. $r^2_{13.2}$ కనిష్ఠ విలువ శూన్యం కనుక $R^2_{1.23}$ విలువ r^2_{12} విలువ కంటె ఎక్కువగానే ఉంటుంది.

పై ఫలితాన్ని ఈ క్రింది విధంగా కూడా రాయగలము.

$$-R^2_{1.23} = -r^2_{13} - \left(1 - r^2_{13}\right) r^2_{12.3}$$

$$1-R^2_{1.23} = 1-r^2_{13} - \left(1-r^2_{13}\right) r^2_{12.3}$$

$$= \left(1 - r^2_{13}\right)\left(1 - r^2_{12.3}\right)$$

B R A O U

23.8 సూక్ష్మ, పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలు

Y చలరాశిని X చలరాశిపై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$$Y = \hat{\beta}_{1.2} + \hat{\beta}_{12} X_2 \text{ అని}$$

Y ని X_3 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$$Y = \hat{\beta}_{1.3} + \hat{\beta}_{13} X_3 \text{ అని}$$

X_3 ని X_2 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$$X_3 = \hat{\beta}_{3.2} + \hat{\beta}_{32} X_2 \text{ అని}$$

X_2 ని X_3 పై ప్రతిగమనం చేయగా పొందిన సమీకరణాన్ని

$$X_2 = \hat{\beta}_{2.3} + \hat{\beta}_{23} X_3$$

అని రాద్దాము.

రెండు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో ప్రతిగమన గుణకాలకు సూత్రాలను తెలుసుకున్నాము. అవి

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2}$$

$$\hat{\beta}_{23} = \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}$$

$$\hat{\beta}_{13} = \frac{\sum x_{3i} y_i}{\sum x_{3i}^2}$$

$$\hat{\beta}_{32} = \frac{\sum x_{2i} y_{3i}}{\sum x_{2i}^2}$$

ఇప్పుడు త్రిచలరాశి ప్రతిగమనంలోని ప్రతిగమన గుణకాన్ని పరీక్షిద్దాము.

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{\left(\sum y_i x_{2i}\right)\left(\sum x^2_{3i}\right) - \left(\sum y_i x_{3i}\right)\left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)}{\left(\sum x^2_{2i}\right)\left(\sum x^2_{3i}\right) - \left(\sum x_{2i} x_{3i}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sum y_i x_{2i}}{\sum x_{2i}^2}\right)\left(\sum x^2_{3i} \sum x^2_{2i}\right) - \left(\frac{\sum y_i x_{3i}}{\sum x^2_{3i}}\right)\left(\sum x^2_{3i}\right)\left(\frac{\sum x_i x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}\right)\left(\sum x^2_{2i}\right)}{\left(\sum x^2_{2i}\right)\left(\sum x^2_{3i}\right) - \left(\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x^2_{2i}}\right)\left(\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x^2_{3i}}\right)\left(\sum x^2_{2i}\right)\left(\sum x^2_{3i}\right)}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_{13}\hat{\beta}_{32}}{1 - \hat{\beta}_{23}\hat{\beta}_{32}}$$

ఇదేవిధంగా

$$\hat{\beta}_{13.2} = \frac{\hat{\beta}_{13} - \hat{\beta}_{12}\hat{\beta}_{23}}{1 - \hat{\beta}_{32}\hat{\beta}_{23}}$$

23.8.1 పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాన్ని సూక్ష్మ సహసంబంధ గుణకాలలో వ్యక్తపరచుట

సూక్ష్మ ప్రతిగమన గుణకాలకు సూక్ష్మ సహసంబంధ గుణకాలకు గల సంబంధాన్ని గత పాఠంలో తెలుసుకున్నాము.

$$\hat{\beta}_{12} = r_{12}\frac{s_1}{s_2}$$

$$\hat{\beta}_{13} = r_{13}\frac{s_1}{s_3}$$

$$\hat{\beta}_{23} = r_{23}\frac{s_2}{s_3}$$

$$\hat{\beta}_{32} = r_{12}\frac{s_2}{s_1}$$

$$\therefore \hat{\beta}_{12.3} = \frac{\hat{\beta}_{12} - \hat{\beta}_{13}\hat{\beta}_{32}}{1 - \hat{\beta}_{23}\hat{\beta}_{32}}$$

$$= \frac{r_{12}\frac{S_1}{S_2} - r_{13}r_{32}\frac{S_1 S_3}{S_2 S_3}}{1 - r_{23}\frac{S_2}{S_3}r_{32}\frac{S_3}{S_2}}$$

$$= \frac{r_{12} - r_{13}}{1 - r_{23}r_{32}}\frac{S_1}{S_2}$$

ఇదేవిధంగా

$$\hat{\beta}_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{32}r_{23}}\frac{S_1}{S_3}$$

23.9 బహుళ ప్రతిగమనం - ఉదాహరణ

ఉదా ॥ ఈ క్రింది పట్టికలో 1970 - 1982 కాల పరిమాణానికి ద్రవ్యోల్బణ రేటు (Y) నిరోద్యోగిత రేటు (X_2) ఆశించిన ద్రవ్యోల్బణ రేటు (X_3) లు ఇవ్వబడ్డాయి. వీటిని వాడి ఆశించిన ద్రవ్యోల్బణ రేటు విలువలతో కూడిన ఫిలిప్స్ రేఖను (expectations - augmented Philip's curve) అంచనా వేద్దాము.

సంవత్సరం	Y	X_2	X_3
1970	5.92	4.9	4.78
1971	4.30	5.9	3.84
1972	3.30	5.6	3.13
1973	6.23	4.9	3.44
1974	10.97	5.6	6.84
1975	9.14	8.5	9.47
1976	5.77	7.7	6.51
1977	6.45	7.1	5.92
1978	7.60	6.1	6.08
1979	11.47	5.8	8.09
1980	13.46	7.1	10.01
1981	10.24	7.6	10.81
1982	5.99	9.7	8.00

B R A O U

నిరూపణ : మనం అంచనా వేయవలసిన నమూనా

$$Y_t = \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2t} + \beta_{13.2} X_{3t} + u_{it} \quad \text{------} \quad (1)$$

ఇచ్చిన దత్తాంశాలతో ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాము.

ప్రతిగమన నమూనాను అంచనా వేయుటకు పట్టిక

Y	X_2	X_3	$y = Y-\overline{Y}$	$x_2 = X_2 - \overline{X}_2$	$x_3 = X_3 - \overline{X}_3$	yx_2	yx_3	$x_2 x_3$	y^2	x_2^2	x_3^2
5.92	4.9	4.78	-1.83	-1.75	-1.91	3.20	3.50	3.34	3.35	3.06	3.64
4.30	5.9	3.84	-3.45	-0.75	-2.85	2.59	9.83	2.13	11.90	0.56	8.12
3.30	5.6	3.13	-4.45	-1.05	-3.56	4.67	15.84	3.73	19.80	1.10	12.67
6.23	4.9	3.44	-1.52	-1.75	-3.25	2.66	4.94	5.68	2.31	3.06	10.56
10.97	5.6	6.84	3.22	-1.05	0.15	-3.38	0.48	-0.15	10.37	1.10	0.02
9.14	8.5	9.47	1.39	1.85	2.78	2.57	3.86	5.14	1.93	3.42	7.72
5.77	7.7	6.51	-1.98	1.05	-0.18	-2.08	0.35	-0.18	3.92	1.10	0.03
6.45	7.1	5.92	-1.30	0.45	-0.77	-0.59	1.00	-0.34	1.59	0.20	0.59
7.60	6.1	6.08	-0.15	0.55	-0.61	0.08	0.09	0.33	0.02	0.30	0.37
11.47	5.8	8.09	3.72	-0.85	1.40	-3.16	5.20	-1.19	13.84	0.72	1.96
13.46	7.1	10.01	5.71	0.45	3.32	2.57	18.95	1.49	32.60	0.20	11.02
10.24	7.6	10.81	2.49	0.95	4.12	2.37	10.26	3.91	6.20	0.90	16.97
5.99	9.7	8.00	-1.76	3.05	1.31	-5.37	-2.30	3.99	3.10	9.30	1.71
మొత్తం 100.84	86.5	86.92				6.17	72.02	27.90	111.04	25.05	75.42
సగటు 7.757	6.653	6.686									

$$\hat{\beta}_{12.3} = \frac{(\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma y_i x_{3i})(\Sigma x_{2i} x_{3i})}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} = \frac{6.17 \times 75.42 - 72.02 \times 27.90}{25.05 \times 75.42 - 27.90 \times 27.90} = -1.39238$$

$$\hat{\beta}_{13.2} = \frac{(\Sigma y_i x_{3i})(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{2i} x_{3i})}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} = \frac{72.02 \times 25.05 - 6.17 \times 27.90}{25.05 \times 75.42 - 27.90 \times 27.90} = 1.4700$$

$$\hat{\beta}_{1.23} = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3 = 7.757 - (-1.3924)(6.653) - 1.47 \times 6.686 = 7.1933$$

$$\Sigma e^2_i = \Sigma y^2_i - \hat{\beta}_{12.3} \Sigma y_i x_{2i} - \hat{\beta}_{13.2} \Sigma y_i x_{3i}$$

$= 111.04 + 1.3923 \times 6.17 - 1.47 \times 72.02$

$= 13.76$

$$\therefore \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma e^2_i}{N-3}} = \sqrt{\frac{13.76}{10}} = 1.174$$

$$Var\left(\hat{\beta}_{12.3}\right) = \frac{\Sigma x^2_{3i}}{\Sigma x^2_{2i} \Sigma x^2_{3i} - \left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)^2} \hat{\sigma}^2$$

$$= \frac{75.42}{25.05 \times 75.42 - (27.9)^2} \times 1.376$$

$= 0.09342$

$Se\left(\hat{\beta}_{12.3}\right) = 0.3056$

$$Var\left(\hat{\beta}_{13.2}\right) = \frac{\Sigma x^2_{2i}}{\Sigma x^2_{2i} \Sigma x^2_{3i} - \left(\Sigma x_{2i} x_{3i}\right)^2} \hat{\sigma}^2$$

$$= \frac{25.05}{25.05 \times 75.42 - (27.9)^2} \times 1.376$$

$= 0.03103$

$Se\left(\hat{\beta}_{13.2}\right) = 0.1762$

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma e^2_i}{\Sigma y^2_i}$$

$$= 1 - \frac{13.76}{111.04}$$

$= 0.8761$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{N-1}{N-3}$$

$$= 1 - 0.1239 \times \frac{12}{10}$$

$= 0.85132$

BRAOU

$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$అంచనా విలువలను 1వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల ప్రతిగమన నమూనాను పొందుతాము.

$$\hat{Y}_t = 7.1933 - 1.3925\, X_{2t} + 1.4700\, X_{3t}$$
$$\qquad (0.3056) \qquad (0.1762) \qquad R^2 = 0.8761$$

బ్రాకెట్లలోని సంఖ్యలు ప్రతిగమన గుణకాల క్రమదోషాలు. పై ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని క్రింది విధంగా వివరిస్తాము. అంచనాలోకి తీసుకున్న కాల పరిమాణంలో X_2, X_3 లను శూన్యస్థాయిలో వుంచితే వాస్తవ ద్రవ్యోల్బణ రేటు సగటు విలువ 7.19 శాతం వుండేది. పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకమైన -1.3925 అర్థమేమంటే ఆశించిన ద్రవ్యోల్బణ రేటును (X_3 ని) స్థిరంగా వుంచితే 1970 - 82 కాల పరిమితిలో నిరుద్యోగిత రేటులో ప్రతి ఒక్క యూనిటు (ఇక్కడ 1 శాతపు) తగ్గుదలకు (పెరుగుదలకు) వాస్తవ ద్రవ్యోల్బణ రేటు సగటున సుమారుగా 1.39 శాతం పెరిగింది (తగ్గింది). ఇదే విధంగా నిరుద్యోగిత రేటును (X_2ని) స్థిరంగా వుంచితే ఆశించిన ద్రవ్యోల్బణ రేటులో ప్రతి ఒక్క శాతం పెరుగుదలకు ద్రవ్యోల్బణ రేటు సగటు విలువ 1.47 శాతం పెరిగింది. R^2 విలువ 0.8761 అర్థమేమంటే నమూనాలోని స్వతంత్ర చలరాశులు సమిష్ఠిగా వాస్తవ ద్రవ్యోల్బణరేటులోని విస్తృతిలో 87.61 శాతం భాగాన్ని వివరిస్తున్నాయి. R^2 గరిష్ఠ విలువ 1 కనుక రెండు చలరాశుల సమిష్ఠి వివరణ శక్తి (explanatary power) చాలా ఎక్కువగా వుంది. రెండు స్వతంత్ర చలరాశుల గుణకాలు ఉచితమైన (proper) సంకేతాలను కలిగి వున్నాయి. ఎందుకంటే స్థూల ఆర్థిక విశ్లేషణ సిద్ధాంతం ప్రకారం β_2 ఋణాత్మకం β_3 ధనాత్మకం కావాలి ; నిరుద్యోగిత రేటు పెరుగుతుంటే ద్రవ్యోల్బణ రేటు తగ్గాలి. దీనినే నిరుద్యోగిత ద్రవ్యోల్బణ రేట్ల పరస్పర వైరుధ్యం (trade off) అంటాము. కాబట్టి β_2 ఋణాత్మకం కావాలి. ఆశించిన ద్రవ్యోల్బణ రేటు పెరుగుతుంటే వాస్తవ ద్రవ్యోల్బణ రేటు కూడా పెరుగుతుంది. ద్రవ్యోల్బణ రేటు పెరుగుతుందంటే వస్తువులకు గిరాకీ పెరుగుతుంది ; అక్రమ నిల్వలు కూడా పెరుగుతాయి. దీనివల్ల ధరలు పెరుగుతాయి.

23.10 సార్థకతా పరీక్షలు

సార్థకతా పరీక్షలను జరిపే పద్ధతి రెండు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో వలెనే వుంటుంది. పరామితుల బిందు అంచనాలను పొందడమే మన ధ్యేయమైతే దోష పద విభాజనపు స్వభావంతో పనిలేదు. అయితే, ఈ అంచనాలను లోక ప్రతిగమనానికి ఆపాదించాలంటే సార్థకతా పరీక్షలు చేయాలి. దీనికి u_i యొక్క సంభావ్యతా విభాజనాన్ని గూర్చి ప్రమేయం చేసుకోవాలి. u_i చలరాశి సరాసరి శూన్యము విస్తృతి σ^2గల సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి వుందని ప్రమేయం చేసుకుంటాము. ఈ ప్రమేయం వల్ల సాధారణ కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాలు ఉత్తమ సరళ రేఖాత్మక విష్పాక్షిక అంచనాలు (BLUE) అవుతాయి. అంతేకాక $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి వుంటాయి. $(N\text{-}3)\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ రాశి N-3 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలుగల λ^2 విభాజనాన్ని పొందుతుంది. $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ లు $\hat{\sigma}^2$ కు స్వతంత్రమైన విభాజనాన్ని కలిగి వుంటాయి. క్రమదోషాల అంచనాల్లో σ^2 కు

బదులు $\hat{\sigma}^2$ ను వాడితే N-3 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు గల క్రింది విభాజనాలను పొందుతాము.

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{Se\,(\hat{\beta}_1)}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{Se\,(\hat{\beta}_2)}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{Se\,(\hat{\beta}_3)}$$

t విభాజనాన్ని వాడి $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ల నమ్మిక అంతరాలను ఏర్పరచగలము. ఉదాహరణకు

$$|t| = \left| \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{Se\,\hat{\beta}_2} \right| < t_{\alpha/2}$$

$$\therefore -t_{\alpha/2} < \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{Se\,\hat{\beta}_2} < t_{\alpha/2}$$

$$\hat{\beta}_2 - t_{\alpha/2}\,Se\,\hat{\beta}_2 < \beta_2 < \hat{\beta}_2 + t_{\alpha/2}\,Se\,\hat{\beta}_2$$

β_1 , β_3 ల నమ్మిక అంతరాలు కూడ పై విధంగానే వుంటాయి.

ఉదా ॥ పైన అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన నమూనాలోని విలువలను తీసుకొని β_2, β_3 ల 95 శాతం నమ్మిక అంతరాలను ఏర్పరచండి.

జవాబు : $\hat{\beta}_2 = 1.3925$ $\quad$ $\hat{\beta}_3 = 1.4700$

$Se\hat{\beta}_2 = 0.3056$ $\quad$ $Se\hat{\beta}_3 = 0.1762$

t పట్టిక నుండి 10 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు 5 శాతం ప్రాధాన్యతా స్థాయికి పట్టిక విలువను 2.228గా గుర్తించగలము.

$$\therefore \hat{\beta}_2 - t_{0.025}\,Se\hat{\beta}_2 < \beta_2 < \hat{\beta}_2 + t_{0.025}Se\hat{\beta}_2$$

$$-1.3925 - 2.228 \times 0.3056 < \beta_2 < -1.3925 + 2.228 \times 0.3056$$

$$-2.0734 < \beta_2 < -0.7116$$

BRAOU

ఇదేవిధంగా

$1.47 - 2.228 \times 0.1762 < \beta_3 < 1.47 + 2.228 \times 0.1762$

$1.0774 < \beta_3 < 1.8626$

కాబట్టి β_2 విలువ -2.0734 మరియు - 0.7116 మధ్య వుంటుంది. β_3 విలువ 1.0774 మరియు 1.8626 మధ్య వుంటుంది. దీని అర్థం ఏమంటే 13 పరిమాణం గల 100 ప్రతి రూపాలకు నమ్మిక అంతరాలను కనుగొంటే 95 అంతరాలు β_2 విలువను కలిగి వుంటాయి.

అంచనా వేయబడిన నమూనాలోని ప్రతిగమన గుణకాల సార్థకతను పరీక్షిస్తాము. అనగా β_2 విలువ శూన్యం కంటే వేరైనదా అనే విషయాన్ని పరీక్షిస్తాము. దీనికి క్రింది పరికల్పనను చేసుకుంటాము.

$H_0 : \beta_2 = 0 \qquad H_1 : \beta_2 \neq 0$

ఇప్పుడు t విలువ $\frac{\hat{\beta}_2}{Se\,\hat{\beta}_2}$ అవుతుంది. గణించిన ఈ t విలువ పట్టిక నుంచి పొందే క్లిష్ట విలువ కంటె తక్కువగా వున్నచో H_0 ను తిరస్కరించము. అనగా β_2 విలువ శూన్యమనే పరికల్పనను తిరస్కరించము. గుణించిన t విలువ పట్టిక విలువ కంటె ఎక్కువగా వున్నచో β_2 విలువ శూన్యమనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. ఇదేవిధంగా $\hat{\beta}_3$ విలువను $Se(\hat{\beta}_3)$ విలువను తీసుకుని β_3 శూన్యమా కాదా అనే పరికల్పనను పరీక్షిస్తాము.

పై పరికల్పనను పరీక్షించడానికి నమ్మిక అంతరాలను కూడా వాడవచ్చు. β_2 నమ్మిక అంతరంలో శూన్యం (zero) లేకపోతే $\beta_2 = 0$ అనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. శూన్యం ఈ అంతరంలో వుంటే $\beta_2 = 0$ అనే పరికల్పనను తిరస్కరించము.

ఉదా : పైన అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన నమూనాలోని $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ లను తీసుకొని β_2, β_3 శూన్యమా కాదా పరీక్షించండి.

జవాబు : β_2 నమ్మిక అంతరం - 2.07 నుండి - 0.71 వరకు వుంది. ఈ అంతరంలో శూన్యంలేదు. కనుక $\beta_2 = 0$ అనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. ఇదేవిధంగా β_3 నమ్మిక అంతరం 1.08 నుంచి 1.86 కనుక $\beta_3 = 0$అనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము.

t విలువలను వాడి సార్థకతా పరీక్షను జరపాలంటే ముందుగా $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ ల t విలువలను కనుగొంటాము. $\hat{\beta}_2$ యొక్క t విలువ $\frac{\hat{\beta}_2}{Se\hat{\beta}_2}$; $\hat{\beta}_3$ యొక్క t విలువ $\frac{\hat{\beta}_3}{Se\hat{\beta}_3}$ అవుతుంది.

$\hat{\beta}_2$యొక్క t విలువ $= \frac{-1.3925}{0.3056} = -4.5566$

$\therefore |t| = 4.5566$

$\hat{\beta}_3$యొక్క t విలువ $= \frac{1.47}{0.1762} = 8.3428$

$\therefore |t| = 8.3428$

ఈ $|t|$ విలువలు పట్టిక నుంచి తీసుకున్న క్లిష్ట విలువ (2.228) కంటె ఎక్కువగా వున్నాయి.

కనుక $\beta_2 = 0$ అనే పరికల్పననూ, $\beta_3=0$ అనే పరికల్పననూ తిరస్కరిస్తాం.

23.11 ప్రతిరూప ప్రతిగమనం మొత్తం సార్థకత (Overall Significance of Sample Regression)

పైన జరిపిన విశ్లేషణలో ప్రతి పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకపు ప్రాధాన్యతను వేర్వేరుగా పరీక్షించాము. అనగా లోక ప్రతిగమనం లోని పాక్షిక గుణకాలు శూన్యమనే పరికల్పనకు పరీక్ష జరిపాము. ఇప్పుడు పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలన్నీ శూన్యమనే పరికల్పనను పరీక్షిస్తాము. మూడు చలరాశుల ప్రతిగమనంలో ఈ పరికల్పన క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$

ఈ శూన్య పరికల్పనలో $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ లు సమష్టిగా శూన్యమని పరికల్పించుకొన్నాము. ఈ పరీక్షను అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన రేఖ మొత్తం ప్రాధాన్యత పరీక్ష అంటాము. ఈ పరీక్షలో Y చలరాసి X_2, X_3 లతో సరళరేఖాత్మక సంబంధం కల్గి ఉందో లేదో తెలుసుకుంటాము. దీనికి వాడే పద్ధతిని విస్తృతి విశ్లేషణ పద్ధతి (analysis of variance) అంటాము. దీనిని గూర్చి తెలుసుకుందాము. ఈ క్రింది సర్వ సమీకరణం (identity) మనకు తెలుసు.

$$TSS \equiv ESS + RSS$$

$$\sum y_i^2 \equiv \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i} + \sum e_i^2$$

TSS కు N-1, RSS కు N-3 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలుంటాయని మనకు తెలుసు. ESS కు రెండు స్వేచ్ఛా డిగ్రీలుంటాయి. ఎందుకంటే, అది $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ లలో ప్రమేయం. ఈ విషయాలను క్రింది పట్టికలో చూపుతాము.

విస్తృతి ఆధారం	వర్గాల మొత్తం	స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు	సగటు
ప్రతిగమనం వల్ల (ESS)	$\hat{\beta}_2 \Sigma y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x_{3i}$	2	$\frac{\hat{\beta}_2 \Sigma y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x_{3i}}{2}$
అవశిష్టం వల్ల (RSS)	Σe_i^2	N -3	
మొత్తం (TSS)	Σy_i^2	N–1	$\hat{\sigma}^2 = \frac{\Sigma e_i^2}{N-3}$

శూన్య పరికల్పనను $\beta_2 = \beta_3 = 0$ గాను u_i యొక్క విభాజనాన్ని సామాన్య విభాజనం గాను తీసుకుంటే, క్రింది F చలరాశి

$$F = \frac{\left(\hat{\beta}_2 \Sigma y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x_{3i}\right) / 2}{\Sigma e_i^2 / (N-3)}$$

$$= \frac{ESS / df}{RSS / df}$$

2 మరియు N-3 స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు కల F విభాజనాన్ని కలిగి ఉంటుంది. F విభాజన పట్టికలో వివిధ ప్రాధాన్యత స్థాయిలకు F యొక్క క్లిష్ట విలువలు ఉంటాయి. ఒక ప్రాధాన్యత స్థాయిని (సాధారణంగా 5 శాతం) నిర్ణయించుకొని (2,N-3) స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు పట్టిక విలువను తీసుకుంటాము. పైన గణించిన F విలువ పట్టిక విలువ కంటె ఎక్కువ ఉంటే శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. అనగా $\beta_2 = \beta_3 = 0$ సరికాదు. అలాగాక మనం గణించిన F విలువ పట్టికలోని F విలువ కంటె తక్కువగా ఉంటే పరికల్పనను అంగీకరిస్తాము.

ఉదా : పైన అంచనా వేయబడిన ప్రతిగమన నమూనా మొత్తం సార్థకతను పరీక్షించండి.

జవాబు : నమూనాను అంచనా వేసినపుడు పొందిన క్రింది ఫలితాలను తీసుకుంటాము.

$\Sigma e_i^2 = 13.76$

$ESS = \hat{\beta}_2 \Sigma y_i x^2_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x^2_{3i} = 97.28$

$N = 13$

BRAOU

విస్తృతి విశ్లేషణ పట్టిక

విస్తృతి ఆధారం	వర్గాల మొత్తం	స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు	వర్గాల సగటు
ప్రతిగమనం వల్ల (ESS)	$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$ $= 97.28$	2	$\frac{97.28}{2} = 48.69$
అవశిష్టం వల్ల (ESS)	$\sum e_i^2 = 13.76$	N-3 = 10	$\frac{13.76}{10} = 1.376$
మొత్తం	$\sum y_i^2 = 111.04$	N-1 = 12	--

$$F = \frac{ESS / df}{RSS / df}$$

$$= \frac{48.69}{1.376} = 35.39$$

(2,10) స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు F పట్టికలో 5 శాతం ప్రాధాన్యత స్థాయికి F క్లిష్ట విలువ 4.10 గణించిన F విలువ క్లిష్ట విలువ కంటె ఎక్కువ కనుక $\beta_2 = 0 ; \beta_3 = 0$ అనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము.

23.12 బహుళ ప్రతిగమనం - కొన్ని అంశాలు

23.12.1 వైయక్తిక మరియు సమష్టి పరికల్పనా పరీక్ష

బహుళ ప్రతిగమనంలో ఒక పరామితి ప్రాధాన్యతను పరీక్షించడం, ప్రతిగమనపు మొత్తం ప్రాధాన్యతను పరీక్షించడం వేర్వేరు అంశాలు. మొదటి సందర్భంలో t పరీక్షను వాడతాము. రెండవ సందర్భంలో F పరీక్షను వాడతాము. ఒక ప్రత్యేక ప్రతిగమన గుణకం శూన్యంతో సమానమని అంగీకరించినా అన్ని గుణకాలు శూన్యమనే సమష్టి పరికల్పనను తిరస్కరించవచ్చు.

23.12.2 R^2 మరియు F ల మధ్య సంబంధం

మూడు చలరాశుల సందర్భంలో F ను నిర్వచించాము. K చలరాశుల సందర్భంలో F ను నిర్వచించ గలం.

$$F = \frac{ESS / K-1}{RSS / N - R}$$

ఇందులో R అంచనా వేయబడిన పరామితుల సంఖ్య ను తెల్పుతుంది. K చలరాశులున్నప్పుడు K-1 స్వతంత్ర చలరాశులుంటాయి. వీటి K-1 వాలు గుణకాలు అంతర ఖండన కలిపితే K కు సమానము.

పై సూత్రాన్ని కొద్ది మార్పుచేసి రాస్తే క్రింది ఫలితాలను పొందుతాము.

$$F = \frac{N-K}{K-1} \cdot \frac{ESS}{RSS}$$

$$= \frac{N-K}{K-1} \cdot \frac{ESS}{TSS - ESS}$$

$$= \frac{N-K}{K-1} \cdot \frac{ESS / TSS}{1 - \frac{ESS}{TSS}}$$

$$= \frac{N-K}{K-1} \cdot \frac{R^2}{1-R^2}$$

కాబట్టి F కి R^2 కి ఒక నిశ్చిత సంబంధం ఉంది. అంతేకాదు, ఈ సంబంధం ధనాత్మకమైనది. R^2 విలువ పెరిగే కొద్దీ (తగ్గేకొద్దీ) F విలువ కూడా పెరుగుతుంది(తగ్గుతుంది). కాబట్టి ప్రతిగమనపు మొత్తం ప్రాధాన్యతను పరీక్షించడానికి వాడుతున్న F పరీక్ష R^2 ప్రాధాన్యతను కూడా పరీక్షిస్తుంది. అనగా $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_K = 0$ అనే శూన్య పరికల్పన $R^2 = 0$అనే పరికల్పనకు సమానమైనది. మూడు చలరాశుల సందర్భంలో F ను క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$F = \frac{R^2/2}{(1-R^2)/(N-3)}$$

F పరీక్షను R^2 ను వాడి జరిపితే మదింపు సులభంగా వుంటుంది. ఎందుకంటే R^2 విలువ తెలిస్తే F విలువను సులభంగా కనుగొనవచ్చు.

23.12.3 రెండు ప్రతిగమన నమూనాల R^2 విలువలను పరిపోల్చుట

రెండు నమూనాల్లోని R^2 విలువలను సరిపోల్చాలంటే రెండింటిలోను ఆధారిత చలరాశి ఒకటే కావాలి; స్వతంత్ర చలరాశులు వేరైనా పరవాలేదు. క్రింది రెండు నమూనాల్లోను ఆధారిత చలరాశి వేర్వేరుగా వుంది. మొదటి నమూనాలో Y చలరాశి అసలు విలువలలోని రెండవ నమూనాలో Y చలరాశి సంవర్గమాన విలువల్లోను తీసుకోబడింది.

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + u_i \quad \text{_____ (1)}$$

$$\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \quad \text{_____ (2)}$$

మొదటి నమూనా R^2 విలువ Y విస్తృతిలో X_2 , X_3లు వివరించిన భాగాన్ని తెలుపుతుంది. రెండవ నమూనా R^2 విలువ ln Y లోని విస్తృతిలోని ఎంత భాగాన్ని X_2 , X_3 లు వివరిస్తున్నాయో తెల్పుతుంది.

అనగా 1వ నమూనాలో $R^2 = \frac{Var\ \hat{Y}_i}{Var\ Y_i}$

2వ నమూనాలో $R^2 = \frac{Var\ \widehat{\ln Y_i}}{Var\ \ln Y_i}$

B R A O U

కాబట్టి రెండు నిర్ధారక గుణకాలు సమానం కావు.

పై రెండు నమూనాల్లోని R^2 విలువల్ని సరిపోల్చాలంటే రెండవ నమూనాలోని $\ln Y_i$ అంచనా విలువలకు ($\widehat{\ln Y_i}$) ప్రతి సంవర్గమానాలకు Y_i విలువలకు R^2 విలువలను కనుగొంటాము. ఇప్పుడు రెండు నమూనాల్లోని R^2 విలువల్ని సరిపోల్చవచ్చు.

23.12.4 స్వతంత్ర చలరాశి ఉపాంత సహాయత (Marginal Contribution of an Explanatory Variable)

నమూనాలో ఒక చలరాశిని చేర్చాలా వద్దా అనే అంశం చాలా ప్రాముఖ్యతను వహిస్తుంది. ఎందుకంటే ESS కు అతి స్వల్పంగా సహాయపడే స్వతంత్ర రాశిని చేర్చడంగాని ESS ను తగినంతగా పెంచే స్వతంత్ర చలరాశిని తీసుకోకపోవడంగాని చేయరాదు. అనగా అవశిష్టాల వర్గాల మొత్తాన్ని తగినంతగా తగ్గించే స్వతంత్ర చలరాశుల్ని నమూనాలోకి తప్పకుండా తీసుకుంటాము. దీనిని విస్తృతి విశ్లేషణ పద్ధతి ద్వారా తెలుసుకుంటాము. క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాము.

విస్తృతి ఆధారము	వర్గాల మొత్తం	స్వేచ్ఛా డిగ్రీలు	వర్గాల మొత్తపు సగటు
X_2 వల్ల ESS	$Q_1 = \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i}$	1	$\frac{Q_1}{1}$
X_2, X_3 ల వల్ల ESS	$Q_3 = \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$	2	$\frac{Q_3}{2}$
X_3 వల్ల ESS పెరుగుదల	$Q_2 = Q_3 - Q_1$	1	Q_2
RSS	$Q_4 = Q_5 - Q_3$	N-3	$\frac{Q_4}{N-3}$
TSS లేదా అసలు వర్గాల మొత్తం	$Q_5 = \sum y_i^2$	N - 1	

X_3 యొక్క ఆదనపు సహాయతను నిర్ణయించడానికి F ను కనుగొంటాము.

$$F = \frac{Q_2/df}{Q_4/df} = \frac{(ESS_{new} - ESS_{old})\ /\ (\text{కొత్తగా చేర్చిన చలరాశుల సంఖ్య})}{RSS_{new}/df\ \ \text{అనగా } N-\text{ కొత్త నమూనాలోని పరామితులు}}$$

ఇక్కడ new అనగా క్రొత్త నమూనా అనియు old అనగా పాత నమూనా అనియు తెలుసుకోవాలి.

పై సమీకరణం లవహారాలను TSS చే భాగించగా F విలువ R^2 రూపంలో వస్తుంది.

$$F = \frac{\left(R^2_{new} - R^2_{old}\right)/df}{1 - R^2_{new}/df}$$

ఇందులో, లవంలోని df క్రొత్త స్వతంత్ర చలరాశుల సంఖ్యను హారంలోని df పరిశీలనాంశాల సంఖ్య నుండి క్రొత్త నమూనాలోని పరామితులను తీసి వేస్తే వచ్చే విలువను తెలుపుతాయి.

F నిష్పత్తి తగిన స్వేచ్ఛా డిగ్రీల F విభాజనాన్ని పొందుతుంది.

ఉదా : $R^2_{new} = 0.9988$ $R^2_{old} = 0.9978$

$N = 15$ X_3 ని చేర్చడం వల్ల ESS తగినంత పెరిగిందా ?

$$F = \frac{(0.9988 - 0.9978)/1}{(1-0.9988)/12} = 10$$

(1,2) స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు F పట్టిక విలువ 9.33.

కాబట్టి X_3 ని చేర్చడం వల్ల ESS తగినంతగా పెరుగుతోంది. కాబట్టి X_3 ని నమూనాలోకి తీసుకోవాలి.

గమనిక : పరిశోధకులు $\overline{R}^2$ గరిష్ఠమైన నమూనాను ఎంచుకుంటారు. కాబట్టి RSS ను సాంఖ్యాత్మకంగా తగినంత తగ్గించకపోయినా $\overline{R}^2$ పెరుగుతోంటే ఆ చలరాశిని నమూనాలోకి తీసుకుంటారు. క్రొత్తగా చేర్చిన చలరాశి గుణకం t విలువ 1 కంటే హెచ్చుగా వుంటే $\overline{R}^2$ విలువ పెరుగుతుంది. అందుచే సాధారణంగా పై పరీక్షను జరపకుండానే నిర్ణయాలను తీసుకుంటారు.

23.12.5 రెండు ప్రతిగమన గుణకాల సమానతను పరీక్షించడం

ఒక ప్రతి గమన నమూనాలోని రెండు చలరాశుల గుణకాలు సాంఖ్యాపరంగా సమానమో కాదో పరీక్షించవచ్చు. ఉదాహరణకు ఘన వ్యయ ఫలాన్ని అంచనా వేశాక వర్గ, ఘన రాశుల గుణకాలు శూన్యమా కాదా అనే పరికల్పనను పరీక్షిస్తాము. శూన్యమని తేలితే సరళ రేఖాత్మక వ్యయ ఫలం తగినదని నిర్ణయిస్తాము. క్రింది నమూనాను తీసుకుందాము.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$$

మనం పరీక్షించే పరికల్పన

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 \text{ or } \beta_3 - \beta_4 = 0$$

$$H_1 : \beta_3 \neq \beta_4 \text{ or } \beta_3 - \beta_4 \neq 0$$

BRAOU

$$t = \frac{(\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_4) - (\beta_3 - \beta_4)}{Se(\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_4)}$$

N- 4 స్వేచ్ఛా డిగ్రీల t విభాజనాన్ని పొందుతుంది.

$$Se(\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_4) = \sqrt{Var\,\hat{\beta}_3 + Var\,\hat{\beta}_4 - 2\,Cov(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4)}$$

గణించిన t విలువ పట్టిక విలువ కంటే హెచ్చుగా వున్నచో శూన్య పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. అనగా $\beta_3 \neq \beta_4$

ఉదా ॥ క్రింది వ్యయ ఫలంలో ఉత్పత్తి వర్గం, ఉత్పత్తి ఘనాల గుణకాలు సాంఖ్యాత్మకంగా సమానమా ?

$$\hat{Y}_t = 141.77 + 63.47\,X_t - 12.96\,X_t^2$$
$$(6.38) \quad (4.78) \quad (0.99)$$
$$+ 0.94\,X\,t \qquad R^2 = 0.998$$
$$(0.06) \qquad Cov(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4) = -0.06$$
$$N = 10$$

$$H_0: \beta_3 = \beta_4$$

$$t = \frac{-12.96 - 0.94}{\sqrt{0.99^2 + 0.06^2 + 2 \times 0.06}} = -13.3$$

ఆ స్వేచ్ఛా డిగ్రీలకు 0.2 శాతం ప్రాధాన్యత వద్ద t క్లిష్ట విలువ 5.208. కాబట్టి ఫలంలోని X_2, X_3 చలరాశుల గుణకాలు సమానమనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము.

23.12.6 పరిమిత కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి (Method of Restricted Least Squares)

ప్రతిగమన నమూనాను అంచనా వేసేటప్పుడు ఒక్కొక్కసారి ప్రతిగమన గుణకాలపై కొన్ని పరిమితులను (restrictions) విధిస్తాము. ఉదాహరణకు కాబ్ డగ్లస్ ఉత్పత్తి ఫలాన్ని అంచనా వేసేటప్పుడు ప్రతిగమన నమూనాను తరహా ననుసరించి స్థిర ప్రతిఫలాలు (constant returns to scale) కు పరిమితం చేయవచ్చు. ఈ పద్ధతిని పరిమిత కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి అంటారు. ఈ పద్ధతిలో పరిమితులను నమూనాలోకి తీసుకోగా వచ్చిన క్రొత్త రూపాన్ని అంచనా వేస్తాము. తరువాత సాధారణ పద్ధతిలో అంచనా వేయబడిన నమూనా కంటే ఈ నమూనా R^2 లో ఎక్కువ మార్పును తెచ్చిందో లేదో పరీక్షిస్తాము.

B R A O U

కాబ్ డగ్లస్ ఉత్పత్తి ఫలం రూపం

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{ui}$$

ఇందులో Y_i = ఉత్పత్తి X_{2i} = మూలధనం

X_{3i} = శ్రమ β_2 = మూలధనపు ఉత్పత్తి వ్యాకోచత

β_3= శ్రమ ఉత్పత్తి వ్యాకోచత β_1= సామర్థ్యాన్ని సూచించే పరామితి

ఈ నమూనా చలరాసుల్లో అసరళ రేఖాత్మకం ఎందుకంటే X_2, X_3 చలరాశులు సరళరేఖాత్మకంగా నమూనాలోకి చేరటం లేదు. కాని సంవర్గ మానాలను తీసుకుంటే

$$\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i$$

ఈ నమూనా చలరాశుల్లోను పరామితుల్లోను కూడా సరళరేఖాత్మకమే. తరహా ననుసరించి స్థిర ప్రతిఫలాలు పొందాలంటే $\beta_2 + \beta_3 = 1$ లేదా $\beta_2 = 1 - \beta_3$ కావాలి.

పై నమూనాలో β_2కు బదులుగా $1-\beta_3$ రాస్తే

$$\ln Y_i = \ln \beta_1 + (1 - \beta_3) \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i$$

$$\ln Y_i - \ln X_{2i} = \ln \beta_1 + \beta_3 \ln X_{3i} - \beta_3 \ln X_{2i} + u_i$$

$$\ln\left(\frac{Y_i}{X_{2i}}\right) = \ln \beta_1 + \beta_3 \ln\left(\frac{X_{3i}}{X_{2i}}\right) + u_i$$

ఇందులో, $\frac{Y_i}{X_{2i}}$ ఉత్పత్తి మూల ధనాల నిష్పత్తి

$\frac{X_{3i}}{X_{2i}}$ = శ్రమ మూలధనాల నిష్పత్తి

ఈ నమూనాను అంచనా వేసి β_1, β_3 లను కనుగొంటాము. β_2 విలువను $1-\beta_3$గా తీసుకొంటాము.

పరిమిత కనిష్ఠ వర్గాల నమూనాను పరిమితిని వాడని కనిష్ఠ వర్గాల నమూనాతో పోల్చి నమూనాను ఎంపిక చేసుకుంటాము. దీనికి క్రింది పరీక్షను చేస్తాము.

$$F = \frac{\left(R^2_{UR} - R^2_{Res}\right)/m}{\left(1 - R^2_{UR}\right)/N - K}$$

ఇందులో m = పరిమితుల సంఖ్య

N = పరిశీలనాంశాల సంఖ్య

K = అంచనా వేయబడిన పరామితుల సంఖ్య

పై F నిష్పత్తి (m, N-K) స్వేచ్ఛా డిగ్రీల విభాజనాన్ని పొందుతుంది. గణించిన విలువ పట్టిక విలువ కంటే ఎక్కువగా వున్నచో స్థిర ప్రతిఫలాలకు పరిమితం చేయడం సరికాదు. గణించిన F విలువ పట్టిక విలువ కంటే తక్కువగా వున్నచో స్థిర ప్రతిఫలాలను సమర్థిస్తాము.

స్థిర ప్రతిఫలాలను పరీక్షించడానికి మరొక పద్ధతి వుంది. ఉత్పత్తి ఫలాన్ని అంచనా వేశాక $\beta_2 + \beta_3 = 1$ అనే శూన్య పరికల్పనను పరీక్షిస్తాము.

$$t = \frac{\left(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3\right) - \left(\beta_2 + \beta_3\right)}{Se\left(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3\right)}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 - 1}{\sqrt{Var\,\hat{\beta}_2 + Var\left(\hat{\beta}_3\right) + 2\,Cov\,\left(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3\right)}}$$

గణించిన t విలువ క్లిష్ట విలువ (పట్టిక విలువ) కంటె తక్కువగా వున్నచో స్థిర ప్రతిఫలాలను అంగీకరిస్తాము. ఎక్కువగా వున్నచో స్థిర ప్రతిఫలాల పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. అనగా స్థిర ప్రతి ఫలాలులేవని అర్థం. ఉదా ॥ కాబ్ డగ్లస్ ఉత్పత్తి ఫలాన్ని అంచనా వేయగా క్రింది ఫలితాలను పొందాము.

$$\widehat{\ln Y_i} = -3.338 + 1.499 \ln X_2 + 0.490 \ln X_3$$
$$(2.45) \qquad (0.54) \qquad (0.10)$$

$$R^2 = 0.889 ; \; df = 12$$

$$\ln \widehat{\frac{Y_i}{X_{2i}}} = 1.709 + 0.613; \ln \frac{X_{3i}}{X_{2i}} \qquad R^2 = 0.849$$
$$(0.416) \quad (0.094)$$

తరహానుసరించి స్థిర ప్రతిఫలాలు వున్నాయో లేదో పరీక్షించండి.

$$F = \frac{\left(R^2_{UR} - R^2_R\right)/m}{\left(1 - R^2_{UR}\right)/N\text{-}K}$$

$$= \frac{(0.889 - 0.849)/1}{(1 - 0.889)/12} = \frac{0.04}{0.009} = 4.335$$

(1,12) స్వేచ్ఛ డిగ్రీలకు $F_{0.05}$ విలువ 4.75 కనుక గణించిన F విలువ ప్రాధాన్యమైనది కాదు. అనగా తరహానుసరించి స్థిర ప్రతిఫలాలున్నాయని అర్థం.

23.12.7 కొన్ని ప్రతిగమన నమూనాల రూపాలు

ప్రతిగమన నమూనాలు పరామితుల్లో సరళరేఖాత్మకమైతే చాలు ; చలరాశుల్లో సరళరేఖాత్మకం కానవసరంలేదు. ఇట్లు చలరాశుల్లో సరళరేఖాత్మకం కాని కొన్ని రూపాలను తీసుకొని వాటి ప్రాముఖ్యతను తెలుసుకుందాము.

1. స్థిర వ్యాకోచ నమూనాలు (Constant Elasticity Model) లేదా పూర్ణ సంవర్గమాన నమూనాలు (Double Log Models)

కాబ్ డగ్లస్ ఉత్పత్తి ఫలం ఈ నమూనాకు చెందుతుంది. ఈ నమూనాను ఇంతక్రితమే పరిశీలించాము. ఇందులో స్వతంత్ర చలరాశుల సంవర్గమానాల గుణకాలు ఆధారిత చలరాశి వ్యాకోచతను తెలుపుతాయి. కాబ్ డగ్లస్ ఉత్పత్తి ఫలంలో శ్రమ వల్ల ఉత్పత్తి వ్యాకోచతను మూలధనం వల్ల ఉత్పత్తి వ్యాకోచతను తెలుపుతుంది. ఈ నమూనాలో వ్యాకోచత స్థిర విలువను పొందుతుంది.

2. అర్థ సంవర్గమాన నమూనాలు (Semi - Log Models)

ఇవి రెండు రకాలు. ఒకటి ఆధారిత చలరాశి సంవర్గమానాల్లో వుండి స్వతంత్ర చలరాశి సరళ రేఖాత్మకంగా వుండే నమూనా.

దీనిని సంవర్గ సరళ రేఖీయ (long - lin) నమూనా అంటారు. దీని రూపం క్రింది విధంగా వుంటుంది.

$$\ln Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + u_i$$

ఇందులో, α_2 విలువ X లో 1 యూనిటు మార్పుకు Y లో వచ్చే సాపేక్ష మార్పును తెలుపుతుంది.

$$\alpha_2 = \frac{\text{Y లో సాపేక్ష మార్పు}}{\text{X లో నిరపేక్ష మార్పు}}$$

వృద్ధి రేటును అంచనా వేయడానికి ఈ నమూనా చాలా అనుకూలంగా వుంటుంది. అనగా X_2 కాలాన్ని సంవత్సరాల్లో సూచిస్తుంది. α_2 విలువ వృద్ధి (α_2 ధనాత్మకమైతే) లేదా క్షయ (α_2 రుణాత్మకమైతే) రేటును తెలుపుతుంది.

రెండవ రకం నమూనాలో ఆధారిత చలరాశి సరళరేఖాత్మకంగా వుండి స్వతంత్ర చలరాశి సంవర్గమానాల్లో వుంటుంది. దీనిని సరళ - సంవర్గ (lin-log) నమూనా అంటారు. దీనిరూపం క్రింది విధంగా వుంటుంది.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

ఇందులో β_2 విలువ స్వతంత్ర చలరాశిలో 1 యూనిట్ సాపేక్ష మార్పుకు ఆధారిత చలరాశిలో వచ్చే నిరపేక్ష మార్పు విలువను తెల్పుతుంది. ఉదాహరణకు ద్రవ్యసప్లైలో 1 శాతం మార్పుకు జాతీయాదాయంలో ఎంత మార్పు వస్తుందో తెలుసుకునేందుకు ఈ నమూనా ఉపయోగపడుతుంది.

3. విలోమ రూప నమూనా (Reciprocal Transformation)

ఇందులో స్వతంత్ర చలరాశి విలోమ విలువపై Yని ప్రతిగమనం చేస్తాము.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X_i}\right) + u_i$$

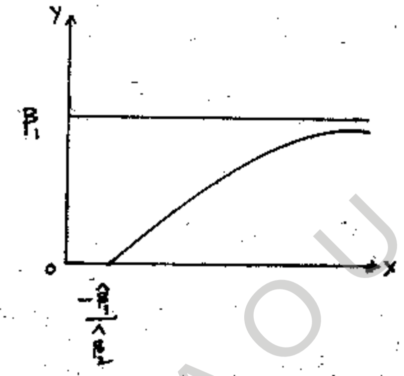
X విలువ పెరిగే కొద్దీ Y విలువ β_1 కు చేరువవుతుంది. ఎంజల్ రేఖకు ఈ రూపం అనుకూలంగా వుంటుంది. Y_i ని చలరాశి ఆహార ధాన్యాల వినియోగం గాను, X_i ని ఆదాయంగాను తీసుకుంటే ఎంజల్ రేఖను పొందుతాము. ఈ నమూనాకు కొన్ని ముఖ్య ధర్మాలున్నాయి. Y_i ని శూన్యమనుకొని పై సమీకరణాన్ని సాధిస్తే

$$\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{1}{X_i} = 0$$

$$X_i = \frac{-\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$$

అనగా $\frac{-\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$ విలువను ఆదాయం పొందే వరకు ఈ వస్తువును వినియోగించరు. అనగా ఈ వస్తువును వినియోగించాలంటే $\frac{-\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$ కనీస ఆదాయం కావాలి. అంతేకాక, $\hat{\beta}_1$ ఈ వస్తువు వినియోగానికి గరిష్ఠ విలువ. ఈ నమూనాను రేఖాపటంలో చూడండి.

ఇందులో $\hat{\beta}_2$ విలువ తప్పక ఋణాత్మకం కావాలి.



ఈ రూపం ఏ వస్తువులకు అనుకూలంగా వుంటుందో దీని ధర్మాలను బట్టి చెప్పవచ్చు. ఏ వస్తువు వినియోగానికి ఒక హద్దు వుంటుందో; ఏ వస్తువు వినియోగం, ఆదాయం ఒక స్థాయిని చేరుకుంటే కాని ప్రారంభంకాదో అటువంటి వస్తువులకు ఈ రూపం అనుకూలంగా వుంటుంది. పాల వినియోగానికి ఈ రూపం చాలా అనుకూలం. ఎందుకంటే అతి తక్కువ ఆదాయం కలవారు పాలను వినియోగించలేరు. అంతేగాక, ఆదాయం పెరుగుతున్నా పాల వినియోగం ఒక స్థాయిని మించి పెరగదు.

23.13 ముగింపు

రెండు స్వతంత్ర చలరాశులున్నపుడు ప్రతిగమన నమూనాను అంచనా వేయడం, సార్థకతా పరీక్షలను నిర్వహించడం ఈ భాగంలో నేర్చుకున్నారు. ఒకే స్వతంత్ర చలరాశి గల ప్రతిగమన నమూనాలో చేసుకున్న ప్రమేయాలతోపాటు, స్వతంత్ర చలరాశుల మధ్య బహుళ సరళరేఖీయత లేదనే ప్రమేయాన్ని కూడా చేసుకుంటాము. ప్రతిగమన గుణకాలను కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేస్తాము. ఈ అంచనా వేయబడిన గుణకాల క్రమ దోషాలను అంచనా వేస్తాం. ఆధారిత చలరాశి అంచనా వర్గాల మొత్తానికి, అసలు విలువల వర్గాల మొత్తానికి గల నిష్పత్తిని బహుళ నిర్ధారక గుణకమంటాము. దీనికి $R^2_{1.23}$ ని సంకేతంగా వాడతాము. ఈ గుణకం ఆధారిత చలరాశిలోని విస్తృతిలో ఎంత భాగాన్ని నమూనాలోని స్వతంత్ర చలరాశులు వివరిస్తున్నాయో తెల్పుతుంది. దీని విలువ (0,1) అంతరంలో వుంటుంది; 1 కి చేరువవుతున్న కొద్దీ సంధానం మెరుగుపడుతోందని అర్థం. రెండు నమూనాల్లో ఒకే ఆధారిత చలరాశి వుండి స్వతంత్ర చలరాశుల సంఖ్య మారినపుడు R^2

BRAOU

విలువలను సరిపోల్చలేము. ఇందుకు సవరించిన R^2 ను వాడతాము. దీనిని $\bar{R}^2$ తో సూచిస్తాము. దీని విలువ ఒక్కొక్కప్పుడు రుణాత్మకం కావచ్చు. అటువంటప్పుడు దీన్ని శూన్యంగా భావిస్తాము. R^2 విలువ కంటే $\bar{R}^2$ విలువ ఎల్లప్పుడూ తక్కువగానే వుంటుంది.

ఒకటి కంటె ఎక్కువ స్వతంత్ర చలరాశులు ఆధారిత చలరాశిని ప్రభావితం చేస్తున్నప్పుడు సూక్ష్మ లేదా శూన్య ఆర్డరు సహ సంబంధ గుణకాలను వాడి చలరాశుల మధ్య సంబంధ దృఢత్వాన్ని తెలుసుకోలేము. దీనికి పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలను వాడతాము. పాక్షిక గుణకాలకు శూన్య ఆర్డరు గుణకాలకు ఒక నిర్దిష్ట సంబంధం వుంది. రెండు చలరాశుల మధ్య పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనేటప్పుడు ఈ రెండింటిని ప్రభావితం చేసే మరొక చలరాశి ప్రభావాన్ని తొలగిస్తాము. సూక్ష్మ, పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలకు బహుళ నిర్ధారక గుణకానికి ఒక సంబంధం వుంది.

సూక్ష్మ ప్రతిగమన గుణకం సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకం చలరాశుల క్రమ విచలనాల నిష్పత్తుల లబ్దానికి సమానం. పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకానికి సూక్ష్మ ప్రతిగమన గుణకాలకు కూడా సంబంధం వుంది. ఇందువల్ల పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాన్ని సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకాలు క్రమ విచలనాలలో వ్యక్తం చేయవచ్చు.

ప్రతిరూప ప్రతిగమనాన్ని అంచనా వేయడానికి దోష పదం సంభావ్యతా విభాజనంలో పనిలేదు. కాని, అంచనా వేయబడిన గుణకాల సార్థకతను పరీక్షించడానికి, నమూనా సమష్టి సార్థకతను పరీక్షించడానికి, పరామితుల అంతర అంచనాలను పొందడానికి దోషపదం సగటు విలువ శూన్యం స్థిరమైన (σ^2) విస్తృతి గల సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి వుందని ప్రమేయం చేసుకుంటాము. ఈ ప్రమేయం ప్రకారం $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_3$ లు సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగి వుంటాయి ; $(N-3)\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ రాశి N-3 స్వేచ్ఛాడిగ్రీలు గల χ^2 విభాజనాన్ని కలిగి వుంటాయి. క్రమదోషాల అంచనాల్లో σ^2 కు బదులు $\hat{\sigma}^2$ ను వాడితే $\dfrac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{Se(\hat{\beta}_i)}$ లు t విభాజనాన్ని పొందుతాయి. అందుచే పట్టికలోని t విలువల్ని తీసుకుని β_i కి అంతరం అంచనాలను ఇవ్వగలము. β_i ని గూర్చి సార్థకతా పరీక్షలను జరపగలము.

ప్రతిరూప ప్రతిగమనం మొత్తం సార్థకతను పరీక్షించడానికి విస్తృతి విశ్లేషణ పద్ధతిని వాడతాము. ఈ పద్ధతిలో ప్రతిగమనం వల్ల వచ్చే వర్గాల సగటుని అవశిష్టం వల్ల వచ్చే వర్గాల సగటు చే భాగించగా వచ్చే చలరాశి F విభాజనాన్ని పొందుతాము. అందుచే పట్టిక విలువతో మనం పొందిన విలువను పోల్చి పట్టిక విలువ కంటే ఎక్కువ వున్నప్పుడు β_i లు అన్నియూ ఒక్కుమ్మడిగా శూన్యమనే పరికల్పనను తిరస్కరిస్తాము. మొత్తం సార్థకతను పరీక్షించడానికి కావలసిన F విలువను R^2 నుండి కూడా పొందగలం.

రెండు ప్రతిగమనాల్లో ఆధారిత చలరాశి వేరు వేరు రూపాల్లో వుంటే R^2 విలువలను వాడి నమూనాల్ని సరిపోల్చలేము. ఇప్పుడు స్వతంత్ర చలరాశి అంచనాలను ఒకేరూపం లోకి తీసుకుని R^2 ను కనుగొంటాము. ఒక స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క ఉపాంత సహాయుతను కనుగొనేందుకు కూడా F పరీక్షను వాడతాము. రెండు ప్రతిగమన గుణకాల సమానతను పరీక్షించడానికి t పరీక్షను వాడతాము. ప్రతిగమన గుణకాలు ఒక నిర్దిష్ట పరిమితికి లోబడుతున్నాయో లేదో పరీక్షించేందుకు రెండు పద్ధతుల్ని వాడతాము. ఒక పద్ధతిలో పరిమితులను అంచనావేసేటప్పుడు విధించి వచ్చిన నమూనా ప్రాధాన్యతను పరిమితి విధించబడని నమూనాలో పోలుస్తాము.

BRAOU

మరొక పద్ధతిలో నమూనా అంచనా వేసిన తరువాత ప్రతి గమన గుణకాలపై పరిమితికి చెందిన పరీక్షను జరుపుతాము.

ప్రతిగమన నమూనాల్లోని మూడు ముఖ్య రూపాలను తెలుసుకున్నాము. స్థిర వ్యాకోచ నమూనాలో ఆధారిత, స్వతంత్ర చలరాశులన్నీ సంవర్గ మానాల్లో వుంటాయి. అంచనా వేయబడిన గుణకాలు ఆధారిత చలరాశి వ్యాకోచతను తెలుపుతాయి. సంవర్గ - సరళరేఖీయ నమూనాలోని గుణకం ఆధారిత చలరాశిలో సాపేక్ష మార్పుకు స్వతంత్ర చలరాశిలో నిరపేక్ష మార్పుకు గల నిష్పత్తిని తెలుపుతుంది. వృద్ధిరేటును అంచనా వేయడానికి ఈ నమూనా అనుకూలంగా వుంటుంది. ఇవి కాక సరళ - సంవర్గ నమూనా విలోమ రూప నమూనా ఎంతో ప్రాధాన్యతను వహిస్తాయి.

23.14 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

1. ఒక తరగతిలోని 12 మంది విద్యార్థుల ఎత్తు (X_2), బరువు (Y), వయస్సు (X_3) లకు చెందిన దత్తాంశాల మొత్తాలు, వర్గాల మొత్తాలు, జాత్యంతర లబ్ధాల మొత్తాలు ఇవ్వబడ్డాయి. వీటిని వాడి క్రింది ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని అంచనా వేయండి.

$$Y_i = \hat{\beta}_{1.23} + \hat{\beta}_{12.3} X_{2i} + \hat{\beta}_{13.2} X_{3i}$$

$$\Sigma Y_i = 753\ ,\ \Sigma X_{2i} = 643,\ \Sigma X_{3i} = 106, \Sigma Y_i^2 = 48139,$$

$$\Sigma X_{2i}^2 = 34843,\ \Sigma X_{3i}^2 = 976, \Sigma Y_i X_{2i} = 40830,$$

$$\Sigma Y_i, X_{3i} = 6796, \Sigma X_{2i} X_{3i} = 5779.$$

2. ప్రశ్న 1లోని దత్తాంశాలను వాడి బరువు , ఎత్తు, వయస్సుల క్రమ విచలనాలను కనుగొనండి. మూడు చలరాశుల మధ్య సహ సంబంధ గుణకాలను కనుగొనండి.

3. విద్యార్థుల బరువు (Y), ఎత్తు (X_2), వయస్సు (X_3) ల మధ్య సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకాలు క్రింది విధంగా వున్నాయి.

$$r_{12} = 0.8\ ,\ r_{13} = 0.7,\ r_{23} = 0.8$$

వీటి నుండి పాక్షిక సహ సంబంధ గుణకాలను కనుగొని వివరించండి.

4. క్రింది దత్తాంశాలను వాడి పాక్షిక ప్రతిగమన గుణకాలను, వాటి క్రమదోషాలను, సవరించిన సవరించని R^2 విలువలను కనుగొనండి.

$$\overline{Y} = 368000,\ \overline{X}_2 = 400\ ,\ \overline{X}_3 = 8,\ \Sigma\,(Y_i - \overline{Y})^2 = 66000,$$

$$\Sigma\,(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 = 85000,\ \ \Sigma\,(X_{3i} - \overline{X}_3)^2 = 280,$$

B R A O U

$\Sigma (Y_i - \overline{Y})(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 = 75000, \Sigma (Y_i - \overline{Y})(X_{3i} - \overline{X}_3) = 4250,$

$\Sigma (X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{3i} - \overline{X}_3) = 4800, N = 15.$

5. 1921 - 1941 మరియు 1948 - 1957 కాలశ్రేణులను వాడి గ్రిలికెస్ అను శాస్త్రవేత్త అమెరికాలో వ్యవసాయ ట్రాక్టర్లకు డిమాండ్ సమీకరణాన్ని క్రింది విధంగా అంచనా వేసాడు.

$$\ln Y_t = \text{Const} - \underset{(0.231)}{0.519} \ln X_{2i} - \underset{(0.477)}{4.933} \ln X_{3i} \qquad R^2 = 0.793$$

Y_t = ట్రాక్టర్ల విలువ

X_2 = ట్రాక్టర్ల ధరల సూచిక, అంతకు ముందు సంవత్సరపు పంటల ధర సూచికల నిష్పత్తి

X_3= ముందు సంవత్సరపు వడ్డీరేటు

బ్రాకెట్లలోని అంకెలు క్రమదోషాలను సూచిస్తాయి.

ఈ సమాచారాన్ని వాడి

(a) పై ప్రతిగమనాన్ని వివరించండి.

(b) ప్రతిగమన గుణకాలు నైయుక్తికంగా సాంఖ్యాపరంగా సార్ధకమైనవా ? ఈ గుణకాలు ఒకటి కంటె భిన్నమైనవా ?

(c) విస్తృతి విశ్లేషణ పద్ధతిని వాడి ప్రతి గమనపు మొత్తం సార్ధకతను పరీక్షించండి ?

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. తగిన పాదుకలను వాడి క్రింది చలరాశులలో ప్రతిగమన నమూనాలను రాయండి.

(a) X_2 ని X_1, X_3 లపై (b) X_5 ని X_1, X_2, X_3, X_4 లపై

2. క్రింది ప్రతిగమన సమీకరణాలను సామాన్య సమీకరణాలను రాయండి.

(a) $X_{3i} = \beta_{3.12} + \beta_{31.2} X_{1i} + \beta_{32.1} X_{2i} + e_i$

(b) $Y = \beta_{1.23} + \beta_{12.3} X_{2i} + \beta_{13.2} X_{3i} + e_i$

3. Y ని X_2, X_3 లపై ప్రతి గమనాన్ని సూక్ష్మ సహ సంబంధ గుణకాలను వాడుతూ రాయండి.

4. Y ని X_2, X_3 లపై ప్రతిగమనాన్ని సూక్ష్మ ప్రతిగమన గుణకాలను వాడుతూ రాయండి.

5. $\ln Y_i = \hat{\beta}_{1.23} + \hat{\beta}_{12.3} X_{2i} + \hat{\beta}_{13.2} X_{3i}$ నమూనాలో $\hat{\beta}_{12.3}$ విలువ X_2 కి సంబంధించిన Y వ్యాకోచతను, $\hat{\beta}_{13.2}$ విలువ X_3 కి సంబంధించిన Y వ్యాకోచతను తెలుపుతాయని ఋజువు చేయండి.

6. $r_{12} = 0.6, r_{23} = -0.9, r_{31} = -0.5$ విలువలను పొందుట సాధ్యమా ?

23.15 పదకోశం

బహుళ ప్రతిగమనం	Multiple regression
బహుళ సరళ రేఖీయత	Multi collinearity
లోక ప్రతిగమన ప్రమేయము	Population regression function
ప్రతిరూప ప్రతిగమన ప్రమేయం	Sample regression function
ముందు అంచనాలతో గూడిన ఫిలిప్స్ రేఖ	Expectation augmented Phillips curve
బహుళ నిర్ధారక గుణకం	Coefficient of multiple determination
బహుళ సహ సంబంధ గుణకం	Multiple correlation coefficient
శూన్య ఆర్డరు సహ సంబంధ గుణకం	Zero order correlation coefficient
సార్థకతా పరీక్ష	Tests of significance

- ఆచార్య ఎస్. సుబ్రహ్మణ్యం

BRAOU

ఖండం : 8

దత్తాంశ ఆధారాలు, సూచీ సంఖ్యలు, కాలశ్రేణులు

ఈ కోర్సులోని చివరి ఖండంలో దత్తాంశ ఆధారాలను, జాతీయాదాయ అంచనాలను, ధర మరియు ద్రవ్య సప్లయ్ గణాంకాలను, జనాభా గణాంకాలను, జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశ సేకరణ స్వభావాన్ని, సూచీ సంఖ్యల పద్ధతులను, కాలశ్రేణుల విశ్లేషణను, వృద్ధి రేట్ల కొలమానాన్ని తెలుసుకొందాం. ఆయా అంశాలకు సంబంధించి భారతదేశంలో ఆచరిస్తున్న పద్ధతులను కూడా తెలుసుకొందాం. భాగం - 24లో స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశ ఆవశ్యకతను, ఆధారాలను, భారత దేశంలోని గణాంక వ్యవస్థను చర్చించాం. భాగం - 25లో జాతీయాదాయ భావనలను, మదింపు పద్ధతులను వివరించడమే గాకుండా భారతదేశంలో జాతీయాదాయాన్ని మదింపు చేసే పద్ధతులను విశ్లేషిద్దాం. ఇక భాగం - 26లో టోకు, చిల్లర ధరల వివరాలను, ధరల గణాంకాల వల్ల కలిగే ప్రయోజనాలను, ద్రవ్య సప్లయ్ తాలుకు గణాంకాలను పొందుపరిచాం. ఒక దేశపు ప్రణాళికా బద్ధమైన పురోగతికి మానవ వనరుల అభివృద్ధి ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది. జనాభా గణనలో వస్తున్న మార్పులను, జనాభా వివరాల ఉపయోగాన్ని, 1991 - జనాభా గణన ఫలితాలను, భాగం - 27 లో పరిశీలిద్దాం. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ నిర్వహణను విధులను, సర్వే చేసే పద్ధతులను, అంశాలను, NSS 47వ రౌండ్ సేకరించిన వివరాలను భాగం - 28 లో చర్చిద్దాం. సూచీ సంఖ్యల స్వభావాన్ని, భారతదేశంలో సేకరిస్తున్న ముఖ్యమైన సూచీ సంఖ్యలను భాగం - 29లో తెలుసుకొందాం. ఇక చివరి భాగం (30)లో కాలశ్రేణి విశ్లేషణను, దాని ప్రాధాన్యతను, కాలశ్రేణి భాగాలను, దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తిని, ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను కొలిచే వివిధ పద్ధతులను, సరళ, కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లను గణించే పద్ధతులను విశ్లేషించుకొందాం.

ఈ ఖండంలో 7 భాగాలున్నాయి. అవి ఏమంటే :

భాగం - 24 : స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశ స్వభావం, ఆధారాలు : భారతదేశ గణాంక వ్యవస్థ

భాగం - 25 : జాతీయాదాయం - మదింపు పద్ధతులు, భారతదేశ జాతీయాదాయం

భాగం - 26 : ధర, ద్రవ్య సప్లయ్ గణాంకాలు

భాగం - 27 : జనాభా గణాంకాలు

భాగం - 28 : జాతీయ నమూనా సర్వే

భాగం - 29 : సూచీ సంఖ్యల - భారతదేశంలో ముఖ్యమైన సూచీ సంఖ్యలు

భాగం - 30 : కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ, భాగాలు : వృద్ధిరేట్ల గణన

BRAOU

భాగం - 24 : స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశ స్వభావం, ఆధారాలు : భారతదేశ గణాంక వ్యవస్థ ఆధారం

విషయక్రమం

24.0 ఉద్దేశాలు

24.1 పరిచయం

24.2 స్థూల దత్తాంశ ఆవశ్యకత

24.3 భారతదేశంలో వున్న గణాంక పరిధి

24.4 కేంద్ర ప్రభుత్వంలో వున్న గణాంక వ్యవస్థ

24.5 రాష్ట్రాలలోని గణాంక వ్యవస్థ

24.6 కేంద్రీయ గణాంక సంస్థ (C.S.O.)

24.7 ఇతర గణాంక సంస్థలు

24.8 సారాంశం

24.10 చదవవలసిన పుస్తకాలు / పత్రికలు

24.11 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

24.0 ఉద్దేశాలు

ఈ భాగంలో స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశం ఆవశ్యకత, ప్రాముఖ్యత, భారత దేశంలో గణాంక వ్యవస్థను వివిధ అంశాల దృష్ట్యా చర్చించి దత్తాంశ ఆధారాలను విద్యార్థులకు సులభంగా అర్థం అయ్యేలా చర్చించడం జరిగింది.

24.1 పరిచయం

ఆర్థిక వ్యవస్థలోని ముఖ్య రంగాలలో జరిగే కార్య కలాపాలను అర్థం చేసుకొనుటకు స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశం ఆవశ్యకత ఎంతైనా ఉన్నది. ఆర్థిక స్తోమతను అర్థం చేసుకోవడమే కాకుండా, దానిని సమర్థవంతంగా పెంపొందించడానికి తగిన విధాన నిర్ణయాలు గైకొనుటకు స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశం ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది. స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశం సహాయముతో ఆర్థిక వ్యవస్థ తీరు తెన్నులను అర్థం చేసుకొనుటకు వివిధ గణాంక సాధనాలను విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు. కావున దేశ ఆర్థిక స్థితిని మాత్రమే తెలుసుకోవడానికే కాక సాంఘిక, వ్యవసాయిక, పారిశ్రామిక, శ్రామిక రంగాలలో సేకరించే దత్తాంశ వివరాలను క్రింద చర్చిస్తాం.

24.2 స్థూల దత్తాంశ ఆవశ్యకత

ఆర్థిక సమస్యలను అర్థం చేసుకొనుటకు గణాంకాలు ఎంతో ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకొన్నవి. అంటే అర్థశాస్త్రంలో వివిధ గణాంకాల ప్రాముఖ్యత మరీ ఎక్కువ అయింది. ఆర్థిక వ్యవస్థలోని ఏ సమస్యనైనా విశ్లేషణ చేయడానికి గణాంకాలు అనివార్యం. గణాంక పద్ధతులు సహాయంతో ఆర్థిక ప్రణాళికలకు సంబంధించిన సమస్యలను విశ్లేషించి యుక్తమైన చర్య తీసుకొనవచ్చు. ఒక ఆర్థిక వ్యవస్థ ఆర్థిక కార్యకలాపాలను అర్థం చేసుకోవాలంటే గణాంక సమాచారం అవసరం. ఆర్థికాభివృద్ధిని కాని, వ్యవసాయ రంగం / పారిశ్రామిక రంగంలో

అభివృద్ధి గతిని అర్థం చేసుకోవాలన్నా, ధరల పెరుగుదల, ఎగుమతి, దిగుమతుల తీరు తెన్నులను అర్థం చేసుకోవాలంటే స్థూల కాలశ్రేణి దత్తాంశం కావలసి ఉంటుంది. అదేవిధంగా, వివిధ దేశాల ఆర్థిక పెరుగుదలను పోల్చినట్లయితే ఆ దేశాలలో వృద్ధి రేటులను గురించి తెలుసుకొన వీలగును. ఆర్థిక పెరుగుదలను మదింపు చేయుటకు సూచీ సంఖ్యలు, ప్రతిగమనం, కాలశ్రేణి విశ్లేషణ, శాతాలు, నిష్పత్తులు, సహ సంబంధం, సగటులు మొదలైనవి ముఖ్యమైన గణాంక సాధనాలుగా చెప్పవచ్చు. గణాంక వివరాల వల్ల ఎన్నో ప్రయోజనాలు ఉన్నప్పటికీ వాటిని ఉపయోగించి దేశ ఆర్థిక ప్రగతిని మదించవచ్చు. ఇవి లెక్కించేందుకు వీలున్న పరిమాణాత్మక చలరాశులు. సంక్షిప్తంగా చెప్పాలంటే దేశ ఆర్థిక స్థితిని, ఆర్థిక సామర్థ్యాన్ని అర్థం చేసుకోవడంలో గణాంక వివరాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. ఆర్థిక వ్యవస్థలోని వినియోగదారుల వినియోగ వ్యయం, వివిధ రంగాల ఉత్పత్తి పరిమాణం, వినిమయం, ధరలు, పంపిణీ, పొదుపు, పెట్టుబడి లాంటి స్థూల అంశాలను అర్థం చేసుకొనుటకు సమిష్టి దత్తాంశం ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది. అయితే పై వివరాలను మరొక దేశంతో పోల్చినప్పుడే ఆర్థిక పెరుగుదల తీరును అర్థం చేసుకొన వీలుంటుంది. అందుకు సంపూర్ణమైన గణాంక సమాచారం కావాలి. మన దేశంలో కేంద్రీయ సాంఖ్యక సంస్థను ఏర్పాటు చేసి పటిష్ఠమైన సాంఖ్యక వ్యవస్థను రూపొందించడం వల్ల దేశంలోని వివిధ రంగాలలో కావలసిన సమాచారం కొంత వరకు లభిస్తుంది. వివిధ స్థూల చలరాశుల పై దత్తాంశ సేకరణలోను, ప్రచురణలోను అభివృద్ధి చెందిన పద్ధతులను అవలంబిస్తున్నారు. దత్తాంశ వివరాలు ఆర్థిక వ్యవస్థ తీరుతెన్నులను అర్థం చేసుకోవడానికి కాకుండా పటిష్ఠమైన ఆర్థిక వ్యవస్థను నిర్మించేందుకు కావలసిన చర్యలు తీసుకోవడానికి తోడ్పడతాయి. కాల శ్రేణి వివరాలతో వివిధ చలరాశుల తాలూకు గత ప్రవర్తనను తెలుసుకొన వీలుంటుంది. గత ప్రవర్తనను అర్థం చేసుకొనుటకు గణాంక సాధనాలు ఉపయోగించుతాము. ఈ గణాంక సాధనాలను ఉపయోగించుటకు స్థూల దత్తాంశం కావాలి. ఈ స్థూల దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి ఆర్థిక వ్యవస్థలోని ఆర్థిక కార్య కలాపాలను అర్థం చేసుకోవటానికి, వివిధ రంగాలలోని (వ్యవసాయ, పారిశ్రామిక, సేవల) గణాంక వివరాలు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి. అయితే భారతీయ గణాంకాలు అనేక పరిమితులకు లోనైందువల్ల వీటిని అలా జాగ్రత్తగా ఉపయోగించాలి.

24.3 భారతదేశంలో గణాంక పరిధి

భారత దేశంలో లభ్యమవుతున్న గణాంకాల పరిధి పరిమితమైంది. సాంఘిక, ఆర్థిక అంశాలకు సంబంధించిన సమాచారాన్ని ఎక్కువగా సేకరించడం జరగలేదు. భారతదేశం బ్రిటిషు పరిపాలన క్రింద ఉన్నప్పుడు సంస్థానాలకు సంబంధించిన సమాచారం లేదు. బ్రిటిషు వారి పాలనలో కేవలం రెవిన్యూ సేకరణ కోసం సమాచారాన్ని సేకరించారు. పైగా ఈ సమాచారం వ్యవసాయ రంగానికి సంబంధించినవి. భారతీయ వ్యవసాయానికి గాని, పరిశ్రమలకు సంబంధించి గాని సమాచారాన్ని సేకరించడానికి సరైన నిర్మాణ సంస్థ లేదు. కొన్ని రాష్ట్రాలు గణాంకాలను సేకరించినా, వాటిని పోల్చేందుకు వీలు లేకుండా పోయింది. అయితే, వ్యవసాయ రంగానికి సంబంధించిన కొన్ని గణాంకాలు లభించినా, పరిశ్రమలకు సంబంధించిన గణాంకాలు 1940 సంవత్సరానికి ముందు లేవనే చెప్పవచ్చు. స్వాతంత్ర్యం సిద్ధించిన తరువాత గణాంక పరిధి విస్తృతమైంది. వ్యవసాయ రంగానికి సంబంధించినంత వరకు అన్ని పంటలకు సంబంధించి గణాంకాలు సేకరించబడలేదు. గణాంకాలు సేకరించడం జరిగినప్పటికీ, అవి మన ప్రణాళికల అవసరాలకు ఉపయోగపడవు.

భారతదేశ గణాంకాలలో అసంపూర్ణత ముఖ్యమైన లోపంగా చెప్పవచ్చు. అంతేకాకుండా సేకరించిన అప్పటి గణాంకాలు విశ్వసనీయమైనవి కావు. ఈ లోపం స్వాతంత్ర్యం సిద్ధించిన తరువాత కొన్ని ప్రత్యేక సంస్థల స్థాపన ద్వారా సరిదిద్దబడింది. సేకరించిన దత్తాంశం తక్షణమే ప్రచురించబడిలేదు. సేకరించిన కాలానికి ప్రచురిత కాలానికి కొంత విరామం ఉండటం వల్ల వాటి ఉపయోగం అంతగా ఉండదు. ఈవిధంగా వివిధ

BRAOU

పరిమితులకు లోబడిన భారతీయ గణాంకాలను ఎంతో జాగ్రత్తతో ఉపయోగించాల్సి ఉంటుంది. అయితే విశ్వసనీయమైన దత్తాంశ సేకరణకు కొంత వ్యవధి అవసరము. శాస్త్రీయ పద్ధతిలో వివిధ అంశాలకు చెందిన గణాంకాలను సేకరించుటకు ఇప్పుడు కొన్ని ప్రత్యేక సంస్థలను నెలకొల్పారు.

24.4 ప్రస్తుతం కేంద్ర ప్రభుత్వంలో ఉన్న గణాంక వ్యవస్థ

ఆహార వ్యవసాయ మంత్రిత్వ శాఖ

దీనిని 1947 సంవత్సరంలో స్థాపించారు. దేశంలోని ఆహారం, వ్యవసాయం, మత్స్య పరిశ్రమ, పశు సంపదలకు చెందిన గణాంక వివరాలను సేకరించి, విశ్లేషించి, సక్రమమైన అన్వయాన్ని చేసి, ఆ వివరాలను ప్రచురించడం మొదలైన విషయాలు ఈ సంస్థ నిర్వహిస్తుంది. వ్యవసాయ సంబంధమైన కీలక విషయాలలో సంబంధిత మంత్రిత్వ శాఖ తీసుకోవలసిన నిర్ణయాలకు ఈ సంస్థ తన దత్తాంశ ఆధారంగా సరైన సలహాలు ఇస్తుంది.

ఈ సంస్థ కొన్ని క్రింది ప్రచురణలను చేపడుతుంది.

1. Abstract of Agricultural Statistics
2. Agricultural Wages in India
3. Bulletin of Food Statistics
4. Estimation of Area and Production of Principal Crops in India
5. Indian Forest Statistics
6. Indian Agriculture in Brief
7. Studies in Agricultural Economics.

విక్రయం కోసం మార్కెటులోకి వచ్చిన చేపలు, పాలు, గుడ్లు లాంటి నశ్వర వ్యవసాయ వస్తువుల వివరాలను సేకరించి ఈ సంస్థ ప్రచురిస్తుంది. విక్రయం కాగల విక్రయమైన వ్యవసాయ మిగులు వివరాలను కూడా ప్రచురిస్తుంది. వ్యవసాయోత్పత్తుల రవాణా పంపిణీలకు సంబంధించిన వివరాలు కూడా ఇది అందిస్తుంది. వ్యవసాయ మంత్రిత్వశాఖ తీసుకొనే వ్యవసాయ - ఆర్థిక సంబంధ విధానాలకు ఈ సంస్థ సరైన రీతిలో సలహాలను కూడా ఇస్తుంది. Indian Council of Agricultural Research లోని గణాంక శాఖలోని నిపుణులు తర్ఫీదు పొందిన శాస్త్రజ్ఞులు వ్యవసాయ ప్రణాళికకు సంబంధించి తగిన సలహాలు ఇస్తారు. అటవీ పరిశోధన సంస్థ రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలకు సలహాలనిస్తూ, Indian Forest College విద్యార్థులకు శిక్షణనిస్తుంది. ఈ సంస్థ క్రింది ప్రచురణలను చేపడుతుంది.

1. Statistical Methods in Research.
2. Statistical Methods in Forest Products Research.
3. Statistical Quality Control Methods in Woodbased in Industries.

వరి పంటకు సంబంధించిన గణాంకాలను కేంద్ర రైస్ రిసెర్చి సంస్థ సేకరిస్తుంది.

వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వ శాఖ

వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వ శాఖ ప్రభుత్వం కోరే వ్యాపార పరమైన వివరాలను సేకరించి, దేశంలో నమోదైన వివిధ వ్యాపార సంస్థల జాబితాను తయారుచేసి వాటికి సంబంధించిన గణాంకాలను నిత్య నవీనంగా ఉంచి, వ్యాపార పారిశ్రామిక రంగాలలోని వారికి సలహాలనిస్తుంది.

BRAOU

ఈ సంస్థ ప్రచురించే కొన్ని ప్రచురణలు

1. Indian Trade Journal
2. Monthly Statistics of Foreign Trade of India.
3. Accounts Relating to Inland Trade.
4. Annual Statement of Foreign Trade in India.

భారత ప్రభుత్వానికి సలహాదారుగా వున్న ఆర్థిక సలహాదారు కార్యాలయం క్రింది ప్రచురణలను చేపట్టును.

1. Whole Sale Price Index
2. Whole Sale Price (Revised)
3. Basic Statistical Material Regarding Foreign Trade, Production and Price.

అంటే ఈ సంస్థ టోకు, చిల్లర ధరలను సేకరించి విశ్లేషణ జరుపును. ఈ కార్యాలయం ప్రచురించే గణాంకాలు ద్రవ్యోల్బణ పరిస్థితులను తెలుసుకొనుటకు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

ఆర్థిక మంత్రిత్వ శాఖ క్రింది ప్రచురణలను చేపట్టును.

1. Statistical Tables relating to Banks in India.
2. Report on the Trade and Progress of Banking in India.
3. Report on Currency and Finance.
4. Review of Co-operative Movement in India.
5. Reserve Bank of India Bulletin.

ఇవిగాక మరికొన్ని Adhoc ప్రచురణలను కూడా చేపడుతుంది.

పారిశ్రామిక స్థితి గతులను పరిశీలించి వాటికి సంబంధించిన గణాంక వివరాలను సేకరించే నిమిత్తం **కార్మిక ఉద్యోగితా ప్రణాళిక మంత్రిత్వశాఖ** ను స్థాపించడం జరిగింది. ఈ సంస్థ ప్రచురిస్తున్న కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రచురణలు.

1. Indian Labour Year Book
2. Trade Unions in India
3. Indian Labour Statistics
4. Indian Labour Journal
5. Statistics of the Factories.
6. Minimum Wages (Report of the Working of Minimum Wages Act, 1948).

B R A O U

దేశ వ్యవహారాల మంత్రిత్వశాఖ క్రింది ప్రచురణలను చేపడుతుంది.

1. సెన్సెస్ నివేదికలు

2. Vital Statistics of India

3. Indian Population Bulletin.

ఆరోగ్య మంత్రిత్వ శాఖ ఆధ్వర్యంలో ఒక గణాంక బ్యూరో వుంది. ఈ బ్యూరో దేశంలోని ఆరోగ్యం, వైద్య సదుపాయాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని సేకరించి ప్రచురిస్తుంది. ఈ బ్యూరో వార్షిక సంచిక Health Atlas of India తో పాటు అనేక ఆడ్‌హాక్ సంచికలను మొత్తం వివరాలతో ప్రచురిస్తుంది.

రైల్వే మంత్రిత్వశాఖ దేశంలోని రైల్వేల నిర్వహణలో లభించే గణాంక వివరాలనన్నింటిని సేకరించి ప్రచురిస్తుంది. ఈ విధంగా కేంద్ర ప్రభుత్వ హయాంలో ఉన్న వివిధ సంస్థలు స్థూల దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తున్నాయి.

24.5 రాష్ట్రాలలోని గణాంక వ్యవస్థ

కేంద్రంలో ఉన్నంత పటిష్ఠంగా రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలలోని గణాంక వ్యవస్థలు లేవు. 1946 సంవత్సరంలో గ్రెగరీ సంఘం వారి సలహాల మేరకు ప్రతి రాష్ట్రంలోను Statistical Bureau లను ఏర్పాటు చేసినారు. వివిధ అంశాలపైన గణాంకాలను సేకరించే సంస్థల కార్యకలాపాలను ఈ బ్యూరోలు సమన్వయం చేస్తాయి. రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు వెలువరించే గణాంక ప్రచురణలన్నింటిని ఈ బ్యూరేలే ప్రచురిస్తాయి. మనదేశంలో దాదాపు అన్ని రాష్ట్రాలలో ఇలాంటి బ్యూరోలు ఉన్నవి. రాష్ట్రాలలోని సంబంధిత ప్రాంతాలకు, జిల్లాలకు సంబంధించిన వివిధ గణాంకాలను సేకరించి ప్రచురించడం వంటి కార్యకలాపాలను ఈ బ్యూరోలు నిర్వహిస్తున్నాయి. C.S.O. కి కావలసిన సమాచారాన్ని ఈ బ్యూరోలు అందిస్తుంటాయి. వివిధ రాష్ట్రాలలో గణాంక వివరాలను నిర్వహించే పనికి బ్యూరోలే కాక ఈ భాగాలలోని గణాంక యూనిట్లు కూడా కృషి చేస్తుంటాయి.

1. Deparment of Economics and Statistics
2. Department of Agriculture
3. Deparment of Industries
4. Department of Health
5. Deparment of Planning
6. Department of Land Revenue
7. Department of Forests and Fisheries
8. Department of Animal Husbandry
9. Department of Labour and Welfare.

మన రాష్ట్రంలోని **ఆర్థిక, గణాంక బ్యూరో** (Bureau of Economics and Statistics) సంస్థవారు ఈ క్రింది ముఖ్యమైన ప్రచురణలను చేపడుతున్నారు.

(1) Statistical Abstract of Andhra Pradesh.

(2) Season and Crop Report

BRAOU

(3) The Economic and Statistical Bulletin

(4) Hand Book of Statistics.

24.6 కేంద్రీయ గణాంక సంస్థ (Central Statistical Organisation)

Central Statistical Organisation (1951) (C S O) ను మనదేశంలో అతిముఖ్యమైన గణాంక వ్యవస్థగా పరిగణిస్తున్నారు. C S O ప్రస్తుతం నిర్వహిస్తున్న విధులు, బాధ్యతలు అధికమైనాయి. ప్రణాళికా సంఘానికి కావలసిన సమాచారాన్ని అందించేందుకు ప్రత్యేక విభాగాన్ని కూడా నెలకొల్పారు. ప్రస్తుతం C S O నిర్వహించే కొన్ని ముఖ్యమైన విధులను పరిశీలిద్దాం.

1. కేంద్రంలోను, వివిధ రాష్ట్రాల్లోను జరిగే గణాంక కార్యకలాపాలను సమన్వయ పరచడం.
2. దత్తాంశ సేకరణలోను, సేకరించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడంలోను ఉత్తమ గణాంక పద్ధతులను రూపొందించుట.
3. గణాంకాలకు సంబంధించిన విషయాలలో ప్రభుత్వానికి, వివిధ మంత్రిత్వ శాఖలకు సరైన సలహాలను ఇచ్చుట.
4. ప్రణాళికలకు అవసరమయ్యే వివిధ గణాంక సమాచారాన్ని సమకూర్చడం.
5. వివిధ అంశాలకు సంబంధించి దత్తాంశ సేకరణలోనూ, గణాంక పద్ధతులలోనూ, సాంకేతిక శిక్షణనివ్వడం.
6. జాతీయాదాయాన్ని అంచనా వేయడం.
7. అంతర్జాతీయ గణాంక సమావేశాలకు కావలసిన గణాంక వివరాలను తయారు చేయడంలో సహాయపడడం.
8. అంతర్జాతీయ గణాంక సంస్థలకు మనదేశపు స్థూల గణాంక సమాచారంను అందచేయడం లాంటి వ్యవహారాలలో క్రింది ముఖ్యమైన సంచికలను కూడా ప్రచురించి విడుదల చేస్తుంది.

(i) Annual Abstract of Statistics

(ii) Monthly Abstract of Statistics

(iii) Estimates of National Income

C S O లో వివిధ అంశాలపై గణాంకాలను సేకరించేందుకు క్రింది 11 విభాగాలు ఉన్నాయి.

i) Industrial Statistical Wing

ii) Statistical Intelligence Division

iii) Planning & State Statistics Division.

iv) Labour and Industry Divison

v) Income Disribution Committee Unit

vi) Price and Cost of Living Statistics Division

vii) National Income Division

viii) Methodology Division

ix) Population and Scientific Man Power Division.

B R A O U

రాష్ట్రప్రభుత్వాలు అనుసరించదలచిన సాంఖ్యక పథకాలను క్షుణ్ణంగా పరిశీలించి వాటిని మెరుగు పరచడానికి సరైన సూచనలు కూడా చేస్తుంది. C S O సలహాల మేరకు వివిధ పంచవర్ష ప్రణాళికలకు కావలసిన సమాచారాన్ని సేకరించే ప్రక్రియలో రాష్ట్రాల బ్యూరోలను పటిష్ఠం చేయడం, జిల్లా స్థాయిలో గణాంక కార్యాలయా లను ఏర్పాటు చేయడం జరిగింది. National Sample Survey (NSS) నిర్వహించే శాంపుల్ సర్వే పథకాల రచన C S O ఆధ్వర్యంలోనే జరుగుతుంది. రాష్ట్రాలు ప్రచురించే వివిధ ప్రచురణలను C S O పరిశీలించి సరైన సూచనలవిస్తుంది.

ప్రస్తుతం C S O ప్రచురించి విడుదలచేస్తున్న ముఖ్యమైన ప్రచురణలు

1. Monthly Abstract of Statistics.
2. Monthly Statistics of Production of Selected Industries in India.
3. Monthly Production of Selected Industries of India.
4. Statistical Abstract.
5. Statistical Pocket Book
6. National Accounts Statistics.
7. Estimation of Capital Formation in India.
8. Annual Survey of Industries (Census Sector)
9. Annual Survey of Industries (Factory Sector)
10. Statistical System in India
11. Basic Statistics Relating to the Indian Economy
12. Guide to Official Statistics.

B R A O U

24.7 ఇతర గణాంక సంస్థలు

ప్రభుత్వం నియమించిన సంస్థలే కాకుండా, మరికొన్ని స్వయం ప్రతిపత్తి హోదాలో స్థాపించబడిన సంస్థలు కూడా గణాంక వివరాలను, గణాంక పద్ధతులను మెరుగుపరచడానికి కృషిచేస్తున్నాయి.వాటిలో ముఖ్యమైనవి

1. Indian Statistical Institute
2. Indian Agricultural Statistics Research Institute.
3. Statistics Department of Reserve Bank of India.
4. Economic Department of Reserve Bank of India.
5. National Council of Applied Economic Research.
6. Institute of Applied Man Power Research.
7. Institute of Labour Research.
8. Institute of Economic Growth

9. Gokhale Institute of Politics and Economics

10. Institute of Foreign Trade.

ఇంతేకాకుండా సెంటర్ ఫర్ మానిటరింగ్ ఇండియన్ ఎకానమీ (CMIE) ప్రతి సంవత్సరం ఆర్థిక వ్యవస్థకి సంబంధించిన వివిధ అంశాలపైన ప్రచురణలను విడుదల చేస్తుంది. ఈవిధంగా ఆర్థిక వ్యవస్థ కార్యకలాపాలను అర్థం చేసుకొనుటకు ఉపకరించే స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశంను ప్రచురించే బాధ్యతను ప్రభుత్వం స్వయం ప్రతిపత్తిగల సంస్థలు తమ భుజ స్కంధాలపై వేసుకో వడం వల్ల ఈనాడు ఆర్థిక వ్యవస్థకి సంబంధించిన వివరాలను సేకరించడానికి అంత ఎక్కువ శ్రమపడవలసిన అవసరం లేదు.

అంతేకాకుండా ప్రతి సంవత్సరం పార్లమెంటులో బడ్జెటుకి ముందు ప్రవేశపెట్టే Economic Survey వల్ల కూడా ఆర్థిక వ్యవస్థలోని ప్రభుత్వ విత్తం, ద్రవ్యం, ధరలు, పంపిణీ, వ్యవసాయ, పారిశ్రామిక రంగం అవస్థాపన రంగం, సాంఘిక రంగాలకు సంబంధించిన పూర్తి వివరాలను తెలుసుకొనే వీలున్నది. అయినప్పటికీ స్థూల ఆర్థిక చలరాశుల తాలూకు దత్తాంశాంను ప్రతి అంశం విషయంలో సేకరించి ప్రచురించి పాఠకులకు అందుబాటులో ఉండేవిధంగా నామ మాత్రపు ధరలకు అందించాల్సి ఉన్నది. మొత్తం మీద స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశం వల్ల దేశ ఆర్థిక స్తోమతను తెలుసుకోవడమే కాకుండా దానిని పెంపొందించేందుకు తగిన విధాన నిర్ణయాలు తీసుకొనే వీలవుతుంది.

24.8 సారాంశం

భారతదేశ ఆర్థిక సామర్థ్యంను అర్థం చేసుకొనుటకు గణాంక దత్తాంశం ఎంతగానో ఉపకరిస్తుంది. ఈ ఆర్థిక దత్తాంశంను ప్రభుత్వం స్వయం ప్రతిపత్తిగల సంస్థలు సేకరించి ప్రచురిస్తున్నాయి. ఆర్థిక వ్యవస్థలో వ్యవసాయం, పారిశ్రామిక రంగం, సేవల రంగం, ఇతర అంశాలకు సంబంధించిన వివరాలను వివిధ మంత్రిత్వ శాఖలు, వాటి అనుబంధ సంస్థలు సేకరించి ప్రచురిస్తున్నాయి.

24.9 అనుబంధం

భారతదేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ - దత్తాంశాధారాలు

I. Agriculture

	Name of the Periodical	*Source*
1.	Agricultural Sitaution in India (M)	Directorate of Economics and Statistics Ministry of Agriculture and Irrigation, New Delhi.
2.	All - India Crop Estimates (O)	Directorate of Economics and Statistics, Ministry of Agriculture and Irrigation, New Delhi.
3.	Bulletin of Agricultural Prices (W)	Directorate of Economics and Statistics, Ministry of Agriculture and Irrigation, New Delhi.

BRAOU

4.	Bulletin on Food Statistics (A)	Directorate of Economics and Statistics, Ministry of Agriculture and Irrigation, New Delhi.
5.	Estimates of Area and Production of Principal Crops in India (A)	Directorate of Economis and Statistics, Ministry of Agriculture and Irrigation New Delhi.
6.	Fertilizer Statistics (A)	The Fertiliser Association of India Limited, New Delhi.

II. Industry

	Name of the Periodical	**Source**
1.	Annual Survey of Industries : Summary Results and Details in 10 volumes (A)	Central Statistical Organization, Indusrial Statistics Wing, Calcutta,
2.	Guidelines for Industries (A) Part I	Ministry of Industry, Department of Industrial Development, New Delhi.
3.	Guidelines for Industries (A) Part I	Ministry of Industry, Deparment of Industrial Development, New Delhi.
4.	Monthly Production of Selected Industries of India (M)	Cenral Statisitcal Organization, Industrial Wing, Calcutta.
5.	Statistics of Factories (A)	Labour Bureau, Shimla.
6.	Statistics Relating to DGTD Units (0)	Directorate General of Technical Development, New Delhi.

III. Labour and Employment

	Name of the Periodical	***Source***
1.	Employment Review (Q) (A)	Director of Employment Exchange Ministry of Labour, New Delhi.
2.	Indian Labour Statistics (A)	Labour Bureau, Chandigarh.
3.	Census of India	

IV. Corporate Sector

	Name of the Periodical	***Source***
1.	Industrial Investment (O)	Indian Investment Centre, New Delhi,
2.	Kothari's Economic Guide and Investors' Handbook of India (A)	Kothari and Sons, Madras.
3.	I.I.C. Monthly Newsletter (M)	Indian Investment Centre, New Delhi.

BRAOU

4.	Quarterly Statistics on the working of Capital Issues Control (Q)	Office of the Controller of Capital Issues.
5.	Stock Exchange Official Directory (18 volumes) (A)	The Stock Exchange Foundation, Bombay
6.	The Reserve Bank of India Bulletin (W)	Reserve Bank of India, Bombay.

V. National Accounts

	Name of the Periodical	**Source**
1.	National Accounts Statistitcs (A)	Central Statistical Organization, New Delhi.
2.	The Journal of Income and Wealth (HY)	Indian Association for Research in National Income and Welath, New Delhi.
3.	Economics Survey (A)	Government of India, New Delhi.
4.	Statistical Abstract : India (A)	Central Statistical Organization, New Delhi.
5.	Basic Statistics Relating to the Indian Economy (O)	Central Statistical Organization, New Delhi.
6.	Report on Currency and Finance (A)	Reserve Bank of India, Bombay.

VI. Budgets and Plans

	Name of the Periodical	***Source***
1.	Five Year Plans	Planning commission.
2.	Key to Budget Documents (A)	Ministry of Finance, New Delhi.
3.	Budget at a Glance (A)	Ministry of Finance, New Delhi.
4.	Budget of the Central Government(A)	Ministry of Finance New Delhi.
5.	An Economic and Functional Classification of the Central Government Budget (A).	Ministry of Finance, New Delhi.
6.	Combined Finance and Revenue Accounts of the Union and State Governments in India (A)	Comptroller and Auditor General of India, New Delhi.

VII. Money and Banking

	Name of the Periodical	***Source***
1.	Statement of the Position of Scheduled Commercial Banks (W)	Reserve Bank of India, Bombay.
2.	The Reserve Bank of India Bulletin (W)	Reserve Bank of India, Bombay.

BRAOU

3.	Annual Report and Trend and Progress of Banking in India (A)	Reserve Bank of India, Bombay.
4.	Report of Currency and Finance (A)	Rserve Bank of India, Bombay
5.	Statistical Tables Relating to Banks in India.	Reserve Bank of India, Bombay.

VIII. Household Expenditure

	Name of the Periodical	*source*
1.	Surveys of Consumer Expenditure Various Rounds.	National Sample Survey, CSO.
2.	Consumer Purchase of Textiles	Textile Committee.

IX. Foreign Trade

	Name of the Periodical	*Source*
1.	Foreign Trade Review (Q)	Indian Institute of Foreign Trade H -24, Green Park Extension, New Delhi 16
2.	Import Policy (A)	Ministry of Commerce, Government of India, New Delhi.
3.	Monthly Statistics of Foreign Trade of India (M)	Department of Commercial Intelligence and Statistics, Calcutta.
4.	Statistics of the Foreign Trade by Countries	Department of Commercial Intelligence and Statistics, Calcutta.
5.	Year Book of Inernational Trade Statistics (A)	U.N., New York, U.S.A.

X. Energy and Power

	Name of the Periodical	*Source*
1.	Energy Update (M)	Tata Energy Research Institute, Bombay.
2.	Power Supply Position in the Country (M)	Central Electricity Authority, Ministry of Energy, Dept. of Power, New Delhi.
3.	Public Electric Supply, All India Statistics, General Review (A)	Central Electricity Authority, Ministry of Energy, Department of Power, New Delhi.
4.	Monthly Coal Bulletin (M)	Director General of Mines Safety, Dhanbad.
5.	Indian Petroleum and Petrochemical Statistics (A)	Ministry of Petroleum, Chemicals and Fertilisers, Department of Petroleum Economics and Statistics Division.

B R A O U

XI. Miscellaneous

	Name of the Periodical	*Source*
1.	Health Statistics of India	Central Bureau of Health Intelligenec, Directorate General of Health Services, Ministry of Health and Family Welfare, New Delhi.
2	Indian Railways Year Book (A)	Ministry of Railways (Railway Board), New Delhi.
3.	Railway Statisics (M)	Ministry of Railways (Railway Board), New Delhi.
4.	Handbook of Statistics (A)	Association of Materials Management, Calcutta.
5.	State-wise Statistics (Q)	Directorate General, Technical Development, New Delhi.
6.	Mineral Statistics of India (HY)	Indian Bureau of Mines, Ministry of Steel and Mines, Government of India.
7.	International Financial Statistics (M)	IMF, Washington, D.C., U.S.A.

In addition to these, a number of organizations such as RBI, NCAER, NSS, CMIE undertake specific studies and surveys from time to time. These contain a lot of valuable information. Your librarian should be able to help you in locating these publications.

BRAOU

24.10 చదవదగిన పుస్తకాలు / పత్రికలు

1. Economic Survey (వివిధ వార్షిక సంచికలు)
2. Reserve Bank of India Bulletin
3. Report on Currency and Finance
4. Statistical Tables Relating to Banks in India.
5. Agricultural Situation in India.
6. Indian Agriculture in Brief
7. Indian Statistics By S.P. Gupta, Sultan Chand and Sons.

24.11 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

I క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులిమ్ము.

1. స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశం ఆవశ్యకత ఏమిటి ? భారతదేశ ఆర్థిక వ్యవస్థలో స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశపు మూల ఆధారాలను వివరించండి.

2. రాష్ట్ర కేంద్ర ప్రభుత్వాల గణాంక వ్యవస్థలను చర్చింపుము.

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులిమ్ము.

1. ఆహార వ్యవసాయ మంత్రిత్వ శాఖ

2. ఆర్థిక మంత్రిత్వ శాఖ ప్రచురణలు

3. స్వయం ప్రతిపత్తి హోదాలో స్థాపించబడిన సంస్థలు - గణాంక సేకరణ

4. CSO ప్రచురణలు

- డా॥ ఎం. ఉపేందర్

BRAOU

భాగం - 25 : జాతీయాదాయం , మదింపు పద్ధతులు, భారతదేశ జాతీయాదాయం

విషయ క్రమం

25.0 ఉద్దేశాలు

25.1 పరిచయం

25.2 జాతీయాదాయం - అర్థం

25.3 జాతీయాదాయం - ప్రయోజనాలు

25.4 జాతీయాదాయ మదింపు పద్ధతులు

- 25.4.1 ఉత్పత్తి మదింపు పద్ధతి
- 25.4.2 ఆదాయాల మదింపు పద్ధతి
- 25.4.3 వ్యయాల మదింపు పద్ధతి

25.5 జాతీయాదాయ భావనలు

- 25.5.1 స్థూల జాతీయోత్పత్తి
- 25.5.2 నికర జాతీయోత్పత్తి
- 25.5.3 ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయాల దృష్ట్యా జాతీయాదాయం
- 25.5.4 వ్యష్టి ఆదాయం
- 25.5.5 వ్యయార్హ ఆదాయం
- 25.5.6 తలసరి ఆదాయం

25.6 భారతదేశ జాతీయాదాయం

- 25.6.1 స్వాతంత్ర్యానికి ముందు జాతీయాదాయ అంచనాలు
- 25.6.2 స్వాతంత్ర్యం తరవాత జాతీయాదాయ అంచనాలు
- 25.7 భారతదేశంలో జాతీయాదాయంను అంచనా వేయు పద్ధతి.

25.8 ముగింపు

25.9 చదువదగిన పుస్తకాలు / నివేదికలు

25.10 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

25.11 పదకోశం

B R A O U

25.0 ఉద్దేశాలు

ఈ భాగంలో జాతీయాదాయ అర్థం, ప్రాముఖ్యత, జాతీయాదాయాన్ని మదింపుచేయుటకు అనుసరిస్తున్న వివిధ పద్ధతులు, జాతీయాదాయం తాలుకు వివిధ భావనలు, భారతదేశంలో స్వాతంత్ర్యం రాక ముందు, వచ్చిన తరువాత జాతీయాదాయ అంచనాలు, ప్రస్తుతం భారతదేశంలో జాతీయాదాయంను మదింపు చేయుటకు అవలంబిస్తున్న పద్ధతులను చర్చించాం.

25.1 పరిచయం

జాతీయార్థికవ్యవస్థ ఆర్థిక కార్యకలాపాలను జాతీయాదాయ గణాంకాలు తెలియచేస్తాయి. సరైన ఆర్థిక విధానాలను రూపొందించేందుకు జాతీయాదాయ గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతాయి. జాతీయాదాయ గణాంక సేకరణ పద్ధతులను మెరుగుపరచడమే కాకుండా ఇటీవల పరిశోధకులు వాటి ఉపయోగం ఏయే రంగాలలో ఉన్నది అన్వేషిస్తూ అవసరమున్నచోట వాటిని విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు. జాతీయార్థిక వ్యవస్థలోని వివిధ రంగాల మధ్య తెలియజేయు జాతీయాదాయ గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతాయి. ఆర్థికాభివృద్ధిని ప్రభావితం చేయు వివిధ ఆర్థిక చలరాశులు - పొదుపు, వినియోగం, ప్రభుత్వ ఋణం, ఎగుమతులు, దిగుమతులు, ఉద్యోగితా స్థాయి వంటి చలాంకాలను జాతీయాదాయం దృష్ట్యా పరిశీలించడం పరిపాటి. సమష్టి యూనిట్లను పరిశీలించే స్థూల అర్థశాస్త్రంలో జాతీయాదాయం ఒక భాగం. కీన్స్ పండితుని సార్వత్రిక సిద్ధాంతం 1936లో ప్రచురణ జరిగాక జాతీయాదాయం విశేష ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకొన్నది. త్వరితగతిన ఆర్థిక ప్రగతిని సాధించేందుకుగాను జాతీయాదాయంను పెంచుకునేందుకు ప్రపంచ దేశాలు దృష్టిని కేంద్రీకరించినవి. ఈవిధంగా ప్రపంచ ఆర్థిక వ్యవస్థలో జాతీయదాయ గణాంకాలు విశేష ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకొన్నవి.

25.2 జాతీయాదాయం అర్థం

ఒక సంవత్సర కాలంలో ఒక దేశంలో ఉత్పత్తయిన అంతిమ వస్తు సేవల విలువను మనం జాతీయాదాయం అని అంటాం. జాతీయాదాయాన్ని లెక్కించేటప్పుడు అంతిమ వస్తు సేవలనే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

25.3 జాతీయాదాయ ప్రయోజనాలు

జాతీయాదాయం తాలూకు వివిధ భావనలను పరిశీలించే ముందు జాతీయాదాయ గణాంకాల ప్రయోజనాలను పరిశీలిద్దాం.

1. ఆర్థిక వ్యవస్థ ఆర్థిక కార్యకలాపాలకు అద్దం పట్టేలా జాతీయాదాయం వివరిస్తుంది. అంటే అది పనిచేయుతీరు పైన వివరణను ఇస్తుంది. వివిధ రంగాల (వ్యవసాయ, పారిశ్రామిక, సేవల) వాటాను తెలియచేస్తుంది. ఏదైనా రంగం వాటా తగ్గితే లేదా తక్కువగా ఉన్నట్లు గణాంకాల ద్వారా కనుక్కొబడితే దానికి గల కారణాలను అన్వేషించడం ద్వారా వాటి వాటాలను అధికం చేయుటకు చర్యలు తీస్కుకొనవీలవుతుంది. అంటే మొత్తం జాతీయాదాయంలో వాటి వాటాల తీరును అర్థం చేసుకోవడానికి ఆదాయ గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతున్నాయి. మనదేశంలో ఒకప్పుడు జాతీయాదాయంలో

BRAOU

3. ధరల తాలుకు సమాచారంను నిరంతరం సేకరించడం లేదు.

4. ధరలు నిర్దిష్ట వ్యవసాయక సంవత్సరంనకు సంబంధించి ఉంటే ప్రచురితం అయ్యే పాటికి కొంత వ్యవధి తీసుకోవడం వల్ల వాటివల్ల ఎవరికి అంత ఉపయోగం ఉండదు. కనీసం గత సంవత్సరపు వ్యవసాయక వస్తువుల ధరలు తదుపరి సంవత్సరంలోనైనా ప్రచురించబడేలా చర్యలు తీసుకోన్నప్పుడే ధరల మార్పులను గమనించి లాభదాయకతను మదించ వీలుంటుంది.

26.8 ధరల గణాంకాలను మెరుగు పరిచేందుకు సూచనలు

సరైన ధరల విధానాన్ని రూపొందించడంలో ధరల గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. వ్యవసాయక ధరల కమీషన్ ఎన్నో సూచనలను చేసింది. వాటిలో ముఖ్యమైనవి.

1. రాష్ట్ర, కేంద్ర స్థాయిలలో ధరలను సేకరించే వివిధ సంస్థల మధ్య సమన్వయం ఉండాలి.

2. భావనా పరమైన వ్యత్యాసాలను తొలగించాలి.

ఈవిధంగా ధరల తాలూకు సమాచారం ఆర్థిక వ్యవస్థలోని మార్పులను, ద్రవ్యోల్బణ, ప్రతి ద్రవ్యోల్బణ పరిస్థితులను అర్థం చేసుకొనుటకు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

26.9 ద్రవ్యం సప్లయి గణాంకాలు

ద్రవ్యం విలువ కొలమానంగా, విలువల నిధిగా, వాయిదాల చెల్లింపుల ప్రమాణంగా, వినిమయ మాధ్యమంగా తన విధులను నిర్వహిస్తుంది. ఈనాలుగు విధులను నిర్వర్తించుటకు ఆర్థిక వ్యవస్థలో ద్రవ్యం సప్లయి తగినంతగా ఉండాలి. ఆర్థిక వ్యవస్థలో ద్రవ్యం సప్లయి విశేష పాత్రను కలిగి వుంటుంది. ద్రవ్యం సప్లయి తాలూకు కాలశ్రేణి వివరాలను నేరుగా ధరలతో పోల్చ వీలున్నప్పటికీ వాటిని సాధారణీకరణాల కోసం మాత్రమే పోల్చ వీలున్నది. ద్రవ్యం సప్లయిలో ప్రజల వద్దనున్న కరెన్సీ, నికరమైన బాంక్ డిమాండ్ డిపాజిట్లు చేరి వుంటాయి. భారతదేశంలో ద్రవ్యం సప్లయి తాలూకు దత్తాంశం ప్రతి సంవత్సరం, ప్రతినెల చివరి శుక్రవారానికి సంబంధించి ఉంటుంది. భారతదేశంలో ద్రవ్యానికి సంబంధించిన వివరాలను క్రింది పట్టికలు తెలియజేస్తాయి.

B RAO

పట్టిక -26.3 : నికర జాతీయోత్పత్తి, ధరలు, ద్రవ్య సప్లయిలో మార్పులు (శాతంలో)

Year	Wholesale prices	Money Suppply (M1)	N.NP of factor Cost of 1980 - 81 prices
1951-52	5.5	0.6	2.4
1952-53	-5.2	-6.5	2.8
1953-54	1.1	0.7	6.3
1954-55	-3.7	4.8	4.0
1955-56	-5.0	10.8	2.5
1956-57	13.8	8.5	5.5
1957-58	3.0	5.0	-1.8
1958-59	4.1	2.6	7.6
1959-60	3.8	6.5	1.7
1960-61	6.6	6.8	7.0

* The new series of CPI for industrial workers with 1982 base has been introduced w.e.f. October, 1988. The earlier series on base 1960=100 has been simultaneously discontinued. The conversion factory from the new to the old series is 4.93 in regard to the General index and 4.98 regard to the Food index.

** The new series of CPI for urban non-manual employees with 1984-85 base was introduced w.e.f. November, 1987. The earlier series on base 1960=100 has been simultaneously discountinued. The conversion factor from the new to the old series is 5.32.

*** Not available.

Note : Annual figures are yearly averages of months.

Sources : 1. Labour Bureau, Simla for consumer price indices for industrial workers and agricultural labourers.

2. C.S.O. for consumer price indices for urban non-manual employees.

26.6 వ్యవసాయక ధరల గణాంకాలు

భారతదేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ వ్యవసాయ రంగం ప్రగతిని గమనించి, సరైన విశ్లేషణ చేయుటకు వ్యవసాయక వస్తువుల ధరల గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. భవిష్యత్తులో వ్యవసాయ రంగం అభివృద్ధికి సరైన విధాన నిర్ణయాలు గైకొనుటకు వ్యవసాయక ధరలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

ఈ క్రింది వ్యవసాయక ధరల గణాంకాలు ప్రస్తుతం లభ్యం అవుతున్నాయి.

1. వ్యవసాయక (పంటకోతకాలం) ధరల గణాంకాలను స్టేట్‌బ్యాంక్ ఆఫ్ ఇండియా, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు సేకరిస్తున్నాయి.
2. పంటకోత కాలపు ధరలను డైరెక్టరేటు ఆఫ్ ఎకనామిక్స్ అండ్ స్టాటిస్టిక్స్ (DES)
3. ముఖ్యమైన వ్యవసాయక పంటల (పంటకోత కాలం) ధర సూచీ సంఖ్యలను DES సేకరిస్తుంది.
4. వ్యవసాయక వస్తువుల టోకు ధరలు, సేకరణ ధరలు
5. వ్యవసాయ ధరలను సూచించు ముఖ్యమైన పత్రికలు :

i) Agricultural Situation in India (Monthly)

ii) Bulletin of Agricultural Prices (weekly)

iii) Agricultural Prices in India (Annual)

26.7 ధరల గణాంకాల పరిమితులు

1. అమ్మకందార్లు విధించిన ధరలు - వినియోగ దార్లు చెల్లించిన ధరల మధ్య వ్యత్యాసం తాలూకు సమాచారం లభించడం లేదు. మధ్యవర్తుల లాభాల మార్జిన్ వివరాలు కూడా లభ్యం కావడం లేదు. అంటే వినియోగదారుడు చెల్లించే రూపాయలో ఉత్పత్తిదారుని వాటా తాలూకు సమాచారం అన్ని వ్యవసాయక వస్తువుల విషయంలో లభ్యం కావడం లేదు.
2. రైతులు తమ వ్యవసాయ పనిముట్లకు చెల్లించే ధరలను, వారి ఉత్పత్తులకు వారు పొందే ధరలను సేకరించడం లేదు.

BRAOU

1991-92				
April	207	202	170	853
May	210	204	171	854
June	219	209	174	876
July	224	214	179	904
August	230	217	183	936
September	234	221	184	975
October	236	223	185	990
November	240	225	187	999
December	239	225	187	1008
January	242	228	190	1015
February	241	229	191	1038
March	241	229	192	1046
1992-93				
April	243	231	193	1046
May	247	234	195	1058
June	251	236	197	1068
July	258	242	202	1090
August	258	242	203	1114
September	258	243	204	1112
October	258	244	205	1099
November	257	244	205	1085
December	256	243	205	1067
January	252	241	205	1066
February	252	242	205	1058
March	252	243	205	1053
1993-94				
April	253	245	206	1039
May	255	246	207	1038
June	262	250	210	1057
July	266	253	213	1068
August	270	256	215	1088
September	275	259	217	1113
October	279	262	218	1134
November	284	265	220	1156
December	...	264	...	...

BRAOU

సూచీని లేబర్ బ్యూరో సేకరిస్తుంది. ఈ సూచీ కోసం తీసుకొన్న వస్తువులను నాలుగు గ్రూపులుగా వర్గీకరించవచ్చు.

1. ఆహారం
2. ఇంధనం, విద్యుచ్ఛక్తి
3. వస్త్రాలు, చెప్పుల జోళ్లు
4. ఇతరములు

ఈ సూచి భారాలపైన ఆధారపడింది. దీనికి ప్రతిపదిక లాస్పేర్స్ సూత్రం. వీటి తాలూకు సూచీ సంఖ్యలను క్రింది పట్టిక ద్వారా గమనించవచ్చు.

పట్టిక -26. 2 : అఖిల భారత వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్యలు

	Industrial workers (Base : 1982 = 100) Food index	General Index	Urban non-manual employees (base 1984-85 = 100) General index	Agricultural labourers (Base : 1960 - 61 =100) General index
1	2	3	4	5
Average of Months				
1983 - 84	117 *	111 *	92 * *	520
1984 - 85	122 *	118 *	100 * *	521
1985 - 86	128 *	126 *	107 * *	546
1986 - 87	141 *	137 *	115 * *	572
1987 - 88	154 *	149 *	126 * *	629
1988-89	169 *	163*	136	708
1989-90	177	173	145	746
1990-91	199	193	161	803
1991-92	230	219	183	958
1992-93	254	240	202	1076
Last Month of				
1983-84	117	114	95	514
1984-85	120	120	102	517
1985-86	132	130	110	556
1986-87	142	138	117	573
1987-88	156	153	129	658
1988-89	169	163	138	729
1989-90	178	177	149	736
1990-91	207	201	169	858
1991-92	241	229	192	1046
1992-93	253	243	205	1053

BRAOU

26.5 చిల్లరధరల సూచీ సంఖ్యలు

టోకు ధరల గణాంకాలతో పోల్చినప్పుడు చిల్లర ధరల తాలూకు గణాంకాలు ఎంతో అసంతృప్తి కరమైనవి. వార్షిక, నెలసరి, వార, దినసరి పత్రికలన్నీ ఈ గణాంకాలను తెలియచేస్తాయి. ఉప్పు తాలూకు చిల్లర ధరలను ఉప్పు కమీషనర్ సేకరిస్తారు. వాటిని Statistical Abstract of Indian Union లో ప్రచురించే వారు. బంగారం, వెండి వస్తువుల చిల్లర ధరలను వార్షికంగా, నెలవారిగా, వారాలుగా రిజర్వ్‌బ్యాంక్ ఆఫ్ ఇండియా ప్రచురిస్తుంది. వివిధ రాష్ట్రాల ఆర్థిక గణాంక డైరెక్టరేట్లు కొన్ని నిర్దిష్ట వస్తువుల చిల్లర ధరలను ప్రచురిస్తాయి.

దేశంలో ముఖ్యమైన చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు

1. లేబర్ బ్యూరో - చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు (పట్టణ ప్రాంతాలు) :

పట్టణ ప్రాంతాలలోని 18 కేంద్రాల కోసం నెలసరి చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలను నిరంతరం లేబర్ బ్యూరో సేకరించి ప్రచురిస్తుంది. ఈ సూచీలో చేర్చిన వస్తువులను మూడు గ్రూపుల క్రింద చూడవచ్చు.

i) ఆహార వస్తువులు

ii) ఇంధనం, విద్యుచ్ఛక్తి

iii) ఇతరములు

సూచీల ఆధార సంవత్సరంగా 1944 ఉండేది. ఈ సూచికాంకాలను ఆపివేసి నిర్దిష్ట వస్తువుల ధరల సాపేక్షకాలను బ్యూరో 1949 ఆధార సంవత్సరంతో ప్రచురించింది.

2. లేబర్ బ్యూరో - చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు (గ్రామీణ కేంద్రాలు)

గ్రామీణ ప్రాంతాలలోని 11 కేంద్రాల కోసం చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలను క్రమం తప్పకుండా నెలల వారిగా సేకరించి ప్రచురించేది. ఈ సూచీకి కూడా ఆధార సంవత్సరం 1944. ఈ సూచీ సంఖ్యలను కూడా నిలిపివేసారు. 1960 ఆధార సంవత్సరంతో కొన్ని నిర్దిష్ట వస్తువుల ధరల సాపేక్షకాలను లేబర్ బ్యూరో ప్రచురించేది.

వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించే ముఖ్యమైన సంస్థ లేబర్ బ్యూరో భారత దేశ స్థాయిలో లేబర్ బ్యూరో ప్రచురించే ముఖ్యమైన రెండు సూచీసంఖ్యలు.

i) పారిశ్రామిక రంగంలోని శ్రామికుల కోసం నిర్మించిన వినియోగదారుని ధర సూచీ

ii) వ్యవసాయ రంగంలోని శ్రామికుల కోసం నిర్మించిన వినియోగదారుని ధర సూచీ

పారిశ్రామిక రంగంలోని శ్రామికుల కోసం నిర్మించే వినియోగదారుని ధర సూచీ లాస్పేర్స్ సూత్రంపై ఆధారపడి వుంది. వీటి తాలూకు సూచీ సంఖ్యలు 1962 నుండి లేబర్ బ్యూరో తన నెలసరి పత్రిక Indian Labour Journal ద్వారా ప్రచురిస్తోంది.

వ్యవసాయ రంగంలో శ్రామికుల కోసం వినియోగ ధర సూచీ వ్యవసాయ శ్రామికులు వినియోగించే వస్తు సేవల చిల్లర ధరల స్థాయిలలోని మొత్తం మార్పులను సమానం చేయుటకు ఈ సూచిని నిర్మించడం జరుగుచున్నది. నెలసరి ప్రాతిపదికపైన రాష్ట్రాలకు, భారతదేశం మొత్తానికి వ్యవసాయక శ్రామికుల

BRAOU

April	197	211	190	214	110	189	191	191	179	154	228	190	192.8
May	200	216	188	216	110	190	193	194	180	156	228	194	194.8
June	207	227	193	217	111	190	195	200	180	158	229	197	198.4
July	213	236	197	221	114	191	199	203	184	161	233	202	202.8
August	221	225	210	230	114	197	205	210	189	170	235	208	209.2
September	222	247	217	230	115	198	206	211	190	171	236	210	210.4
October	221	246	216	229	115	199	206	211	190	172	236	211	210.2
November	227	252	221	237	115	200	207	211	189	175	237	214	212.4
December	228	250	230	243	115	202	207	210	191	175	237	217	213.2
January	229	253	244	243	115	210	209	211	194	176	237	218	215.3
February	229	255	247	239	115	210	210	212	196	177	239	219	216.4
March	227	256	246	231	115	214	213	211	198	178	242	222	217.7
1992-93													
April	227	258	244	226	115	214	216	214	199	179	243	224	219.4
May	229	262	243	225	115	214	219	219	198	181	244	226	221.6
June	233	271	245	225	115	214	221	221	197	183	254	226	224.1
July	238	275	248	232	116	214	223	227	197	184	257	228	226.6
August	241	277	251	238	117	214	225	230	198	188	258	228	228.8
September	238	274	246	234	116	225	228	227	200	199	259	229	230.7
October	237	274	240	231	116	235	229	230	201	200	233	235	232.4
November	236	274	239	227	116	235	229	225	202	202	234	235	231.7
December	235	272	239	227	116	235	229	225	202	199	259	235	231.4
January	235	271	240	230	116	237	229	222	202	202	235	236	231.6
February	235	273	236	224	118	243	230	222	206	200	262	236	232.8
March	233	270	239	224	118	246	231	224	207	201	265	233	233.1
1993-94													
April	234	272	238	224	118	249	232	228	209	201	266	233	234.6
May	237	274	239	227	121	252	234	235	211	203	266	235	237.0
June	242	276	241	233	136	253	236	243	210	204	266	235	239.8
July	248	284	250	238	136	254	239	245	212	205	271	235	243.1
August	253	290	255	245	136	254	242	252	216	208	276	235	247.0
September	256	294	263	249	136	263	246	258	219	209	279	236	250.9
October	259	295	267	255	136	266	246	255	219	209	279	238	252.2
November (P)	258	295	267	252	136	266	245	252	219	209	279	235	251.3
December(P)	255	289	269	254	136	266	245	247	221	209	280	236	250.3

P Provisional

Source : Offie of the Economic Adviser. Ministry of Industry

BRAOU

పట్టిక - 26.1 టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు (ఆధారం : 1981 - 82 = 100)

	Primary Articles						Manufactured Products						
	Total	Food Total	articles Food grains	Non-food articles	Minerals	Fuel-power, light & lubricants	Total	Food products	Textiles	Chemicals & chemical products	Basic metals, alloys, & metal products	Mechinery & machine tools	All commodities
Weight	32.30	17.9	7.9	10.08	4.83	10.66	57.04	10.14	11.55	7.36	7.63	6.27	100.00
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Last week of													
1982-83	110	117	118	102	100	110	105	97	108	106	107	104	107.2
1983-84	119	124	115	118	104	116	112	110	113	109	114	108	114.9
1984-85	123	130	118	121	106	123	121	112	123	114	133	115	121.8
1985-86	129	137	129	126	107	137	126	118	115	121	140	124	127.7
1986-87	136	144	130	138	101	140	132	130	120	128	144	129	134.2
1987-88	157	168	151	167	98	148	144	142	135	133	161	139	148.5
1988-89	157	174	166	156	99	155	157	149	144	137	192	158	156.9
1989-90	167	177	160	176	110	165	175	169	169	144	210	171	171.1
1990-91	196	211	196	211	109	189	190	191	178	154	228	189	191.8
1991-92	225	255	243	228	115	214	214	210	198	178	242	223	217.8
1992-93	232	269	239	224	118	246	231	244	209	201	265	233	233.1
Average of weeks													
1982-83	107	111	109	101	103	107	104	97	105	104	105	103	104.9
1983-84	118	127	119	112	100	113	110	108	110	107	112	107	112.8
1984-85	126	132	117	125	105	117	118	114	120	112	123	112	120.1
1985-86	126	134	125	120	107	130	124	117	120	118	140	121	125.4
1986-87	137	148	129	134	104	139	129	129	116	125	141	127	132.7
1987-88	153	161	141	163	101	143	139	141	127	132	150	132	143.6
1988-89	160	177	162	160	99	151	152	148	140	136	176	151	154.3
1989-90	164	179	165	166	102	157	169	165	158	140	206	166	165.7
1990-91	185	201	179	194	109	176	183	182	171	148	220	180	182.7
1991-92	218	241	216	229	114	199	203	206	188	168	235	208	207.8
1992-93	235	271	242	229	116	227	226	224	201	193	257	231	228.7
1991-92													

BRAOU

ii) సున్నితమైన (sensitive) సూచీ సంఖ్యలు

సాధారణ ధరల స్థాయిలోని మార్పులను ప్రతిబింబించేందుకు సాధారణ ఉద్దేశ సూచకాలను నిర్మిస్తారు. అందుకు గాను సాధ్యమైనంత వరకు ఎక్కువ వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకొంటారు. సున్నితమైన సూచక సంఖ్యలో కొన్ని ముఖ్యమైన వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకొంటారు. టోకు ధరల (సున్నితమైన) సూచీ సంఖ్యలను Economic Adviser ప్రచురించేవారు. ఈ సూచీ సంఖ్యలు 23 వస్తువులపై ఆధారపడి ఉండేవి. ఈ వస్తువులను నాలుగు వర్గాల క్రింద వర్గీకరించారు.

i) ఆహారం, పొగాకు

ii) వ్యవసాయక వస్తువులు

iii) ముడి వస్తువులు

iv) తయారి వస్తువులు

ఈ సూచీ సంఖ్య ఉత్తమమైనది కాకపోవడం వల్ల దీనిని ఆపివేసినారు. దీనిని లెక్కించుటకు గుణ మధ్యమంను ఉపయోగించారు. ప్రజలు తరచుగా వినియోగించే ఉప్పు, పప్పు ధాన్యాల వంటి అతి ముఖ్యమైన వస్తువులు ఈ సూచీలో చేర్చబడలేదు. ఇందులో చేర్చబడిన 23 వస్తువులకు సమాన భారాలు ఇచ్చారు. అంటే సున్నితమైన సూచీ అభారిత సూచీగా పేర్కొనవచ్చు.

కొబ్బరి, కాఫీ లాంటి కొన్ని ముఖ్యంకాని వస్తువులను ఈ సూచీలో చేర్చడం జరిగింది. ఈ సూచీలో చేర్చబడిన వస్తువుల సంఖ్య చాలా తక్కువ. ఈవిధంగా దేశ ఆర్థిక పరిస్థితిని తెలియచేయడంలో ఈ సూచీ విఫలంకావడం వల్ల 1947 డిసెంబర్‌లో దీనిని నిలిపివేసారు.

సున్నితమైన సూచీసంఖ్యలో ఉన్న లోపాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని 1939 సంవత్సరంను ఆధారం చేసుకొని 1944 నుంచి అన్ని వస్తువులకు Economic Adviser కార్యాలయంవారు సాధారణ ఉద్దేశ (general purpose) సూచీని నిర్మించారు. అందుకుగాను 78 వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకొన్నారు. దీనిని లెక్కించుటకు భారిత గుణ మధ్యమాన్ని ఉపయోగించారు. ఈ సూచీ సంఖ్యలను ప్రతివారం, నెల, సంవత్సర కాలాలకు లెక్కించి ప్రచురించేవారు.

దేశ విభజన తరువాత దేశంలోని వివిధ రంగాలలో విపరీతమైన మార్పులు రావడంవల్ల, అప్పటి వరకు ఉపయోగిస్తున్న భారాలు ఆధార కాలం పాతబడి పోవడం వల్ల స్వాతంత్ర్యం లభించాక ధరల వివరాలు, దత్తాంశం దేశ వ్యాప్తంగా లభించడం వల్ల 1939 ఆధారంగా నిర్మించే సూచీ సంఖ్యను నిలిపివేసి, 1952-53 సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నారు. టోకు ధరల సూచీని నిర్మించుట గాను లాస్పేర్ సూత్రంను ఉపయోగించారు. అంకమధ్యమంను సగటుగా ఉపయోగించబడింది. అంతకు ముందు Economic Adviser సూచీ నిర్మాణ రేఖకి భారిత గుణమధ్యమాన్ని ఉపయోగించారు. " Index Numbers of Wholesale Prices in India " పేరున టోకు ధరల సూచీలు ప్రచురించ బడ్డాయి. వ్యక్తిగత వస్తువులకు, ఉప - వర్గం, ముఖ్యమైన వర్గాలకు చెందిన వస్తువులకు సూచీ సంఖ్యలు లభిస్తాయి. కాలక్రమేణా ఆధార సంవత్సరం పాతబడటంతో కొత్త ఆధార సంవత్సరంగా 1961 - 62 ని తీసుకోవడం జరిగింది. అప్పుడు 139 వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకొన్నారు. టోకు ధరల సూచీసంఖ్యలను నిర్మించుటకు ఆధార సంవత్సరాన్ని 1961 - 62 = 100 నుండి 1981 - 82 = 100 సంవత్సరానికి మార్చారు. 1981 - 82 సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరంగా తీసుకోవడం ద్వారా 447 వస్తువుల ధరల మార్పులను ప్రతిబింబించేలా సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం జరిగింది. 1981 - 82 = 100 ఆధార సంవత్సరంగా లెక్కించ బడిన టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యల వివరాలను ఈ క్రింది పట్టిక తెలియజేస్తుంది.

BRAOU

ప్రతిబింబింపచేసే అతిముఖ్యమైన ఆర్థిక దత్తాంశంగా ధరల వివరాలను పరిగణించడం జరుగుతోంది.

26.2 ధరల సాంఖ్యాక వివరాల వల్ల ప్రయోజనాలు

ఈ క్రింది అంశాల నుండి ధర సాంఖ్యాక వివరాల ప్రాముఖ్యత స్పష్టమవుతుంది.

i) ఉద్యోగస్తుల వేతనాలను సరిదిద్దుటకుగాను ప్రభుత్వ, ప్రవేటు యాజమానులకు ధర సాంఖ్యకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. సామాన్యంగా ధరలు ఎప్పుడైతే పెరుగుతాయో సిబ్బంది తమ వేతనాలను పెంచాల్సిందిగా ఒత్తిడి చేస్తారు. ఖచ్చితమైన, సరైన ధరల సాంఖ్యక వివరాలు లభ్యంకాక పోయినట్లయితే సరైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడం కష్టంగా వుంటుంది.

ii) వస్తువుల ధరలను అదుపుచేసేందుకు ధరల తాలూకు వివరాలు అవసరమవుతాయి.

iii) వర్తక నిబంధనలను మూల్యాంకనం చేయుటకు ధర సాంఖ్యక వివరాలు అవసరమవుతాయి.

iv) ద్రవ్యోల్బణ, ప్రతి ద్రవోల్బణ పరిస్థితులను తెలుసుకోవడానికి ధరల వివరాలు అవసరం అవుతాయి. ద్రవ్యోల్బణ, ప్రతి ద్రవ్యోల్బణ పరిస్థితులను అదుపుచేయుటకు సరైన నిర్ణయాలు తీసుకొనుటకు ధరల వివరాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

v) భారతదేశంలో ఆధునిక గణాంకాలు అభివృద్ధి చెందిన తొలి రోజుల్లోనే ధరల వివరాలు కొన్ని ముఖ్యమైన వస్తువుల దృష్ట్యా సేకరించడం ఆరంభమయింది. భారతదేశంలో ధరల వివరాలను సేకరించి, వాటిని వ్యాప్తిలోకి తెచ్చేందుకు 1895లో Department of Commercial Intelligence and Statistics ని స్థాపించడం జరిగింది. ప్రస్తుతం అధికారికి ధరల సాంఖ్యక శ్రేణులు క్రింది వాటికి సంబంధించి ఉన్నాయి.

(i) టోకు ధరలు

(ii) ఎగుమతి - దిగుమతి ధరలు

(iii) వ్యవసాయక వస్తువుల (పంటకోత కాలపు) ధరలు

26.3 టోకు ధరలు

టోకు ధరల గణాంకాలను క్రింది సంస్థలు సేకరిస్తాయి.

(1) Office of the Economic Adviser

(2) The Directorate of Economic and Statistics, Ministry of Agriculture and Irrigation.

(3) The Directorate General of Commercial Intelligence and Statistics.

(4) వివిధ రాష్ట్రాలకు చెందిన బ్యూరో ఆఫ్ ఎకనామిక్స్ అండ్ స్టాటిస్టిక్స్

Economic Adviser కార్యాలయం వారు సేకరించే టోకు ధరలను క్రింది అంశాల క్రింద వర్గీకరిస్తారు.

i) టోకు ధరల సూచి కోసం ధర దత్తాంశం

ii) దినసరి మార్కెటు రేట్లు

iii) ముడి సరుకుల, ఎగుమతి వస్తువుల విదేశీ ధరలు

iv) దిగుమతి చేసుకొన్న ముఖ్యమైన వస్తువుల మార్కెటు ధరలు

26.4 భారతదేశంలో టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు

టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు రెండు రకాలు

i) సాధారణ ఉద్దేశం నిమిత్తం సూచీ సంఖ్యలు

BRAOU

భాగం - 26 : ధర, ద్రవ్య సప్లయి గణాంకాలు

విషయక్రమం

26.0	ఉద్దేశాలు
26.1	పరిచయం
26.2	ధరల సాంఖ్యాక వివరాల వల్ల ప్రయోజనాలు
26.3	టోకు ధరలు
26.4	భారతదేశంలో టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు
26.5	చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు
26.6	వ్యవసాయక ధరల గణాంకాలు
26.7	ధరల గణాంకాల పరిమితులు
26.8	ధరల గణాంకాలను మెరుగు పరిచేందుకు సూచనలు
26.9	ద్రవ్యం సప్లయ్ గణాంకాలు
26.10	ముగింపు
26.11	చదువ దగిన పుస్తకాలు / నివేదికలు
26.12	నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు
26.13	పదకోశం

26.0 ఉద్దేశాలు

ఈ అధ్యాయంలో టోకు, చిల్లర ధరల వివరాలను, ధరల గణాంకాలవల్ల కలిగే ప్రయోజనాలు, వ్యవసాయ శ్రామికుల కోసం వినియోగ ధర సూచీ, వ్యవసాయక ధరలు, ద్రవ్యం సప్లయి తాలూకు గణాంకాలను అందించడం జరిగింది.

BRAOU

26.1 పరిచయం

వివిధ ఆర్థిక వ్యవస్థలలోని మార్పులను ప్రతిబింబించే అతిముఖ్యమైన దత్తాంశంగా ధరల వివరాలను పరిగణించడం పరిపాటి. ధరలలో సంభవించే మార్పుల వల్ల ఆర్థిక వ్యవస్థలో వివిధ రంగాలు, ఉత్పత్తి దారులు వినియోగదారులు ప్రభావితం అవుతారు. అందువల్ల ధరల వివరాలను చాలా సందర్భాలలో వివరించడం జరుగుతుంది. అయితే ఆర్థిక వ్యవస్థలోని వివిధ చలరాశుల నిజ స్వరూపాన్ని గమనించేందుకు వాటిని ధరలచే భాగిస్తారు. ఈవిధంగా ఆర్థిక వ్యవస్థను మదింపు చేయడానికి ధరల స్థాయిని సూచకాంశాలుగా తీసుకోవడం జరుగుతుంది. అయితే, ఆర్థిక వ్యవస్థలలో ఉండే విభిన్న రంగాలలో వివిధ స్థాయిల వద్ద ధరల స్థాయిలను/ మార్పులను పరిశీలించాలంటే ధరలను వివిధ రకాలుగా పరిశీలించవలసి వుంటుంది. అంటే వ్యవసాయ రంగంలో, పారిశ్రామిక రంగంలో, తృతీయ సేవా రంగంలో వివిధ కోణాల నుండి ధరల మార్పులను గమనించడం ద్వారా ఆర్థిక వ్యవస్థలో ధరల పోకడను అర్థం చేసుకొన వీలుంటుంది. మన దేశంలో ముఖ్యంగా టోకు, చిల్లర, వినియోగ ధరలను పరిశీలించడం పరిపాటి.

ధరలను సేకరించి, సక్రమమైన పద్ధతిలో వాటికి సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించి ప్రచురించడం మనదేశంలో పరిపాటి. సమాజంలోని అన్ని వర్గాల ప్రజలను ధరలు ప్రభావితం చేయడం వల్ల ఆర్థిక వ్యవస్థలోని మార్పులను

25.10 పదకోశం

ఉత్పత్తి పద్ధతి	-	Output method
ఆదాయాల పద్ధతి	-	Income method
వ్యయాల పద్ధతి	-	Expenditure method
తరుగుదల	-	Depreciation
స్థూల జాతీయోత్పత్తి	-	Gross National Product
నికర జాతీయోత్పత్తి	-	Net National Product
ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయం దృష్ట్యా జాతీయాదాయం	-	National income at factor cost
వ్యష్టి ఆదాయం	-	Personal income
వ్యయార్హ ఆదాయం	-	Disposable income
తలసరి ఆదాయం	-	Per capita income
ద్రవ్య విలువ	-	Money value
పరోక్ష పన్నులు	-	Indirect taxes
బదిలీ చెల్లింపులు	-	Transfer payments
వ్యష్టి వినియోగం	-	Personal consumption
వ్యష్టి పొదుపు	-	Personal savings

- డా॥ ఎం. ఉపేందర్

BRAOU

25.7 ముగింపు

జాతీయాదాయాన్ని ఒక దేశంలో ఒక సంవత్సర కాలంలో ఉత్పత్తి అయిన వస్తు సేవల అంతిమ విలువగా చెప్పవచ్చు. జాతీయాదాయ అంచనాలు ఆర్థికవ్యవస్థలో ఎంతో ప్రాముఖ్యతను కలిగి ఉన్నది. జాతీయాదాయాన్ని ఉత్పత్తి మదింపు పద్ధతి ద్వారా, ఆదాయాల మదింపు పద్ధతి ద్వారా, వ్యయాల మదింపు పద్ధతి ద్వారా లెక్కించవచ్చు. మూడు పద్ధతులు ఒకేరకమైన ఫలితాలనిస్తాయి. జాతీయాదాయపు తాలుకు వివిధ భావనలు- స్థూల జాతీయోత్పత్తి, నికర జాతీయోత్పత్తి, కారకాల వ్యయం దృష్ట్యా జాతీయాదాయం, వ్యష్టి ఆదాయం, వ్యయార్హ ఆదాయం, తలసరి ఆదాయం జాతీయార్థిక వ్యవస్థలో ఎంతో ప్రాముఖ్యంను కలిగి ఉన్నవి. వినియోగ వస్తువులు, పెట్టుబడి వస్తువులు, ప్రభుత్వ వ్యయం, ఎగుమతుల - దిగుమతుల తేడాలను జాతీయాదాయ భాగాలుగా పేర్కొంటారు. భారతదేశంలో జాతీయాదాయ అంచనాలు వ్యక్తిగత హోదాలో ఆరంభమై ఇప్పుడు కేంద్ర గణాంక వ్యవస్థ ద్వారా ప్రతి సంవత్సరం అంచనా వేయబడుతూ ప్రచురించబడుతున్నవి.

25.8 చదువదగిన పుస్తకాలు / నివేదికలు

1. Ackley : Macro - Economic Theory
2. V.K.R.V.Rao : Essays in Economic Development
3. S.P. Gupta : Indian Statistics,
4. Economic Survey, 1993 - 94, 1994 - 95
5. C.S.O. : Quick Estimates of National Income and Related Aggregates (1990-91)

25.9 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు సుమారు 30 - 40 పంక్తులలో జవాబులు రాయండి.

1. జాతీయాదాయం అంటే ఏమిటి ? జాతీయాదాయ వివిధ భావనలను వివరింపుము.
2. జాతీయాదాయాన్ని అంచనా వేయు వివిధ పద్ధతులను వివరింపుము.
3. భారతదేశంలో జాతీయాదాయం అంచనాల గురించి వివరంగా చర్చించుము.

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సుమారు 15 - 20 పంక్తులలో జవాబులు రాయండి.

1. ఈ క్రింది భావనలను సంక్షిప్తంగా వివరింపుము

   (ఎ) స్థూల జాతీయోత్పత్తి (బి) నికర జాతీయోత్పత్తి
2. ఉత్పత్తి మదింపు పద్ధతి ద్వారా జాతీయాదాయంను ఏవిధంగా లెక్కిస్తారు ?
3. జాతీయాదాయ గణాంకాల వల్ల ఎలాంటి ప్రయోజనాలున్నవి ?
4. " భారతదేశంలో స్వాతంత్ర్యంనకు ముందు జాతీయాదాయం అంచనాలు " సంక్షిప్తంగా వివరింపుము.
5. వ్యష్టి ఆదాయం అంటే ఏమిటి ?

BRAOU

జాతీయాదాయంలో ప్రబలంగా వున్న వ్యవసాయ రంగం ఇప్పుడు ద్వితియ స్థానంలో ఉంది. రంగాల వారీగా వాటి వాటాలను క్రింది పట్టిక -25. 2లో ఇవ్వబడింది.

పట్టిక - 25.2 : వివిధ రంగాల వారిగా జాతీయోత్పత్తి (ప్రస్తుత ధరలలో)

సంవత్సరం	వ్యవసాయ రంగం	పారిశ్రామిక రంగం	సేవల రంగం	మొత్తం	శాతంలో వ్యవసాయ రంగం	శాతంలో పారిశ్రామిక రంగం	శాతంలో సేవల రంగం
1950-51	5,009	1,366	2,604	8,979	55.8	15.2	29.0
1951-52	5,172	1,527	2,781	9,480	54.6	16.1	29.3
1952-53	5.038	1,442	2,869	9,349	53.9	15.4	30.7
1954-55	5,551	1,583	3,046	10,180	54.5	15.6	29.9
1955-55	4,772	1,664	3,177	9,563	49.4	17.4	33.2
1955-56	4,579	1,780	3,358	9,717	47.1	18.3	34.6
1956-57	5,817	2,096	3,687	11,600	50.1	18.1	31.8
1957-58	5,697	2,187	3,975	11,859	48.0	18.4	33.5
1958-59	6.609	2,375	4,282	13,266	49.8	17.9	32.3
1959-60	6,640	2,655	4,639	13,934	47.7	19.1	33.3
1960-61	6,990	3,157	5,107	15,254	45.8	20.7	33.5
1961-62	7.240	3,442	5,415	16,097	45.0	21.4	33.6
1962-63	7,392	3,803	6,017	17,212	42.9	22.1	35.0
1963-64	8,700	4,335	6,636	19,671	44.2	22.0	33.7
1964-65	10,630	4,841	7,510	22,981	46.3	21.1	32.7
1965-66	10,600	5,268	8,195	24,063	44.1	21.9	34.1
1966-67	12,331	5,884	9,174	27,389	45.0	21.5	33.5
1967-68	15,431	6,465	10,291	32,187	47.9	20.1	32.0
1968-69	15,906	7,023	11,014	33,943	46.9	20.7	32.4
1969-70	17,397	8,031	11,900	37,328	46.6	21.5	31.9
1970-71	17,937	8,703	13,068	39,708	45.2	21.9	32.9
1971-72	18,323	9,606	14,319	42,248	43,4	22.7	33.9
1972-73	20,154	10,601	15,718	46,473	43.4	22.8	33.8
1973-74	26,558	12,313	18,083	56,954	46.6	21.6	31.8
1974-75	29,096	15,436	22,507	67,039	43.4	23.0	33.6
1975-76	28,839	16,898	25,464	71,201	40.5	23.7	35.8
1976-77	29,463	19,172	27,901	76,536	38.5	25.0	36.5
1977-78	34,884	21,647	30,820	87,351	39.9	24.8	35.3
1978-79	35,851	24,343	33,686	93,880	38.2	25.9	35.9
1979-80	37,088	27,383	37,971	102,442	36.2	26.7	37.1
1980-81	46,649	31,715	44,063	122,427	38.1	25.9	36.0
1981-82	52,685	38,195	52,336	143,216	36.8	26.7	36.5
1982-83	56,151	43,392	59,852	159,395	35.2	27.2	37.5
1983-84	67,498	50,737	68,488	186,723	36.1	27.2	36.7
1984-85	71,950	57,850	78,733	208,533	34.5	27.7	37.8
1985-86	77,224	65,814	90,761	233,799	33.0	28.1	38.8
1986-87	82,413	73,746	103,871	260,030	31.7	28.4	39.9
1987-88	92,379	83,829	118,643	294,851	31.3	28.4	40.2
1988-89	114,073	100,880	138,564	353,517	32.3	28.5	39.2
1989-90	127,049	118,060	160,718	405,827	31.3	29.1	39.6
1990-91	150,083	136,092	186,485	472,660	31.8	28.8	39.5
1991-92	174,337	151,147	216,404	541,888	32.2	27.9	39.9

ఆధారం : Basic Statistics Relating to the Indian Economy.

BRAOU

పట్టిక - 1: స్థూల జాతీయోత్పత్తి , నికరజాతీయోత్పత్తి

సంవత్సరం	ఉత్పత్తి కారకం వ్యయం దృష్ట్యా స్థూల జాతీయోత్పత్తి (కోట్ల రూ॥లు)		ఉత్పత్తి కారక వ్యయందృష్ట్యా నికర జాతీయోత్పత్తి		తలసరి నికర జాతీయోత్పత్తి	
	ప్రస్తుత ధరలలో	1980-81 ధరలలో	ప్రస్తుత ధరలలో	1980-81 ధరలలో	ప్రస్తుత ధరలలో	1980-81 ధరలలో
1950-51	8938	42644	8574	40454	238.8	1126.9
1951-52	9445	43730	9034	41443	247.5	1135.4
1952-53	9324	45002	8882	42613	238.8	1145.5
1953-54	10161	47768	9696	45292	255.8	1195.1
1954-55	9534	49750	9023	47111	233.8	1220.5
1955-56	9707	51119	9161	48288	233.1	1228.7
1956-57	11583	54002	10972	50955	273.6	1270.7
1957-58	11839	53304	11177	50051	273.3	1223.7
1958-59	13231	57311	12459	53869	298.1	1288.7
1959-60	13877	58434	13035	54775	306.0	1285.8
1960-61	15182	62532	14242	58602	328.2	1350.3
1961-62	15999	64359	14946	60168	336.6	1355.1
1962-63	17104	65657	15947	61165	351.3	1347.2
1963-64	19559	69006	18258	64216	393.5	1384.0
1964-65	22936	74121	21373	68942	450.9	1454.5
1965-66	23899	71338	22247	65734	458.7	1355.3
1966-67	27159	72092	25215	66089	509.4	1335.1
1967-68	31929	77845	29745	71519	587.8	1413.4
1968-69	33688	79945	31311	73285	604.5	1414.8
1669-70	37057	85149	34421	78177	650.7	1477.8
1970-71	39424	89465	36503	82211	674.7	1519.6
1971-72	41957	90281	38717	82675	698.9	1492.3
1972-73	46171	89997	42510	81991	749.7	1446.0
1973-74	56629	94395	52362	86010	902.8	1482.9
1974-75	66748	95885	61290	87116	1033.6	1469.1
1975-76	70946	104660	64623	95433	1064.6	1572.2
1976-77	76303	105996	69523	96253	1121.3	1552.5
1977-78	87118	113903	79749	103670	1257.9	1635.2
1978-79	93724	120302	85298	109466	1316.3	1689.3
1979-80	102595	114379	92324	102937	1390.4	1550.3
1980-81	122772	122772	110685	110685	1630.1	1630.1
1981-82	143256	129928	128797	117140	1861.2	1692.8
1982-83	158761	133299	141875	119704	2003.6	1690.7
1983-84	185779	143861	166550	129392	2303.6	1789.7
1984-85	207109	149256	185018	133808	2503.6	1810.7
1985-86	232370	155365	206133	139025	2730.2	1841.4
1986-87	258225	161535	228402	144242	2962.4	1870.8
1987-88	292232	168121	258891	149787	3285.4	1900.9
1988-89	348207	185277	309286	165751	3842.1	2059.0
1989-90	402930	198082	357931	177552	4354.4	2160.0
1990-91	468059	207488	416495	185683	4964.2	2213.1
1991-92	540143	208651	477868	185503	5582.6	2167.1
1992-93 *	616504	217597	544935	193222	6249.3	2215.8

* Quick Estimates

ఆధారం : Economic Survey - 1993 - 94, Govt. of India, Ministry of Finance, Economic Division

అంగాల వారీగా పరిశీలిస్తే 1950 - 51 సంవత్సరంలో జాతీయోత్పత్తిలో వ్యవసాయ రంగం వాటా 55.8 శాతం కాగా అది 1991 - 92 సంవత్సరంలో 32.2 శాతానికి పడిపోయింది. అయితే పారిశ్రామిక రంగం వాటా 1950 - 51 సంవత్సరంలో 15.2 శాతం అయితే 1991 - 92 సంవత్సరంలో 27.9 శాతానికి పెరిగింది. అదేవిధంగా సేవల రంగం వాటా 1950-51 సంవత్సరంలో 29.0 శాతం అయితే అది 1991 - 92 సంవత్సరంలో 39.9 శాతానికి పెరిగింది. ప్రస్తుతం జాతీయోత్పత్తిలో సేవల రంగం ప్రథమ స్థానాన్ని, వ్యవసాయ రంగం ద్వితీయ స్థానాన్ని, పారిశ్రామిక రంగం తృతీయ స్థానాన్ని ఆక్రమించినట్లు స్పష్ట మవుతుంది. అంటే ఒకప్పుడు

BRAOU

పుస్తకమైన Brocher of Revised Series of National Product for 1960 - 61 to 1964 - 65 తెలియచేయబడింది. తరువాత National Accounts Statistics - Sources and Methods లో కూడా వివరించారు. సవరించిన పద్ధతి తాలూకు వివరాలను 1989 సంవత్సరపు National Accounts Statistics లో తెలియచేయడమైంది. జాతీయాదాయాన్ని మదింపు చేయుటకు అనుసరించిన పద్ధతి ఆదాయ - ఉత్పత్తి పద్ధతుల సమ్మేళనం. అంటే ఆదాయ - ఉత్పత్తి పద్ధతుల సమ్మేళనం ద్వారా జాతీయాదాయంను మనదేశంలో లెక్కిస్తున్నారు. భారతదేశంలో జాతీయాదాయంను మదింపు చేయుటకు ఆర్థిక వ్యవస్థను స్థూలంగా 13 భాగాలుగా విభజించారు. భారత దేశంలో జాతీయాదాయంను మదింపు చేయుటకు అనుసరిస్తున్న పద్ధతి సంక్షిప్త రూపంను క్రింద పట్టికలో తెలియచేసాం.

భారతదేశంలో జాతీయాదాయంను మదింపు చేయుటకు అనుసరిస్తున్న పద్ధతి తాలుకు వివరాలు

రంగం	లభ్యమవుతున్న దత్తాంశ స్వభావం	అంచనా పద్ధతి - వివరణ
కేటగిరి ఎ వ్యవసాయం, అడవులు, చేపలు, గనులు, క్యారీలు, నమోదైన మ్యాన్ ఫ్యాక్టరింగ్, నిర్మాణం	వివిధ వస్తువుల వారిగా అనేక రకాల ఉత్పాదకాల విలువ, ధరలు, ఉత్పత్తి తాలూకు వార్షిక అంకెలు	**ఉత్పత్తి పద్ధతి** వస్తువు వారిగా ధర - ఉత్పత్తుల మొత్తం, వాల్యూ ఆడెడ్ ను పొందుటకు గాను స్థూల ఉత్పత్తి విలువ నుండి ఉత్పాదకాల విలువను తీసివేయుదురు.
కేటగిరి బి విద్యుచ్ఛక్తి,రైల్వేలు, వాయు రవాణా, కమ్యూనికేషన్లు, బ్యాకింగ్, భీమా, రియల్ ఎస్టేట్, ప్రభుత్వ పాల రక్షణ	వివిధ కంపెనీల ప్రభుత్వ సంస్థల వార్షిక అకౌంట్స్ నివేదించిన అన్ని రకాల కారకాల ఆర్జనల వాస్తవిక అంకెలు (ఈ అకౌంట్స్ చాలా వర కు రెగ్యులరుగా ప్రచురించబడుతాయి.	**ఆదాయ పద్ధతి** వివిధ సంస్థలలోని ప్రతి రంగంలో లాభాల, ఆపరేటింగ్ మిగులు, భాటకం, వడ్డీ, ఉద్యోగుల వష్ట పరిహారం తాలూకు వాస్తవిక అంకెలు వాటిని కలపడం ద్వారా వాల్యు ఆడెడ్ ను పొందుతారు,
కేటగిరి సి నమోదు కాని మ్యాన్ ఫ్యాక్చరింగ్ గ్యాస్, నీటి సరఫరా, అసంఘటిత రోడ్లు, నీటి రవాణా, స్టోరేజి, వర్తకం హోటల్లు, రెస్టారెంట్లు, ఇతర సేవలు	జనాభా సెన్సెస్ నుండి లభ్యమైన శ్రామిక శక్తి, సాంపుల్ సర్వేల నుండి లభ్యమయ్యే శ్రామిక సగటు ఉత్పాదకత తాలూకు అంచనాలు	**ఆదాయ పద్ధతి** ప్రతి సంవత్సరం శ్రామికుల, వారి సగటు ఉత్పాదకతల అంచనాలు; వాటిని గుణించగా వచ్చే వాల్యుఆడెడ్ అంచనాలు

భారతదేశంలో జాతీయాదాయానికి సంబంధించిన కాలశ్రేణి దత్తాంశాన్ని పట్టిక - 25. 1 లో ఇచ్చాం. వాటిని పరిశీలిస్తే స్థూల జాతీయోత్పత్తి (ప్రస్తుత దరలలో) 1950 - 51 సంవత్సరంలో 8938 కోట్లుండగా 1992 - 93 (త్వరితగతి అంచనాలు) లో 616504 కోట్లు రూపాయలుగా అంచనా వేయబడింది. నికర జాతీయోత్పత్తికూడా 1950 - 51 సంవత్సరంలో రూ.లు 8574 కోట్లుండగా అది 1992 - 93 (త్వరిగతి అంచనాల ప్రకారం) లో రు.లు 544935 కోట్లుగా అంచనా వేయబడింది. తలసరి జాతీయోత్పత్తి 238.8 రు.ల నుండి (1950 - 51 సంవత్సరంలో) 6249.3 రు.లకి పెరిగింది. (1992 - 93 సంవత్సరంలో) ఈవిధంగా జాతీయోత్పత్తి పెరుగుదలను గమనిస్తే మన ఆర్థిక వ్యవస్థ అభివృద్ధి తీరును గమనించవచ్చు.

పై అంచనాలను పోల్చడానికి వీలు లేదు. వాటికి గల ప్రధాన కారణాలను కింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

1. భౌగోళిక పరిధి ఒకే విధంగా లేదు. ఉదాహరణకు, అవిభక్త భారతదేశాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా షిరాస్ అంచనా వేసాడు. 1921 సంవత్సరానికి గాను అతని అంచనా పోల్చడానికి వీలు లేదు.

2. వివిధ పరిశోధనలు అనుసరించిన పద్ధతులు వేర్వేరుగా ఉన్నవి. కొంతమంది సేవలను పరిగణనలోకి తీసుకొంటే మరికొందరు తీసుకోలేదు.

3. ఈ అంచనాలను పోల్చడానికి వీలులేదు. దీనికి ముఖ్య కారణము ఈ అంచనాలు ప్రస్తుత ధరలలో ఉన్నవి మరియు వివిధ తేదీలకు సంబంధించినవి. ధరలలోని విపరీత మార్పుల వల్ల నిలకడ ధరలలో అంచనాలు వేయ వలసి వుంటుంది.

4. వ్యవసాయ గణాంకాలను సేకరించుటకు ఎలాంటి సంస్థ లేకపోవడం వల్ల వ్యవసాయ రంగం నుండి సేకరించిన అంచనాలపై (దత్తాంశాలపై) ఆధారపడిన వ్యవసాయ గణాంకాలను విశ్వసింప వీలులేదు.

ఈ పరిమితులున్నప్పటికీ, జాతీయాదాయ అంచనాలకు కృషి చేసిన ఈ వ్యక్తులు అభినందనీయులు. డా. వి.కె. ఆర్. వి. రావు ప్రతిపాదించిన అంచనాలు మెరుగైనవిగా భావిస్తారు. ఎందుకంటే అతను ఉపయోగించిన భావన, పద్ధతి మిగితా వాటితో పోల్చినప్పుడు మెరుగైనందున ఈ అంచనాలు వాస్తవికతను ప్రతిబింబించాయని అనుకొంటారు. 1931 - 32 సంవత్సరానికి చేసిన అంచనా ప్రకారం మన దేశపు తలసరి ఆదాయం రూ. 65. వీరి కృషి వల్ల 1942 - 43 సంవత్సరంలో మన దేశపు తల సరి ఆదాయం రూ. 114 గా అంచనా వేయడం జరిగింది. అప్పుడు జాతీయాదాయం రూ. 3423 కోట్లు. వ్యక్తిగత హోదాలో నిర్వహించిన కృషి కనుక ఈ అంచనాలలో కొంత దోషం తప్పకుండా ఉండి ఉంటుంది.

దేశంలోని అన్ని రంగాలు పరిగణనలోకి తీసుకోవడం వల్ల, అన్ని రంగాల నుండి కావలసిన సమాచారం లభ్యం కాకపోవడం వల్ల వ్యక్తిగత హోదాలో నిర్వహించిన ఈ అంచనాలను పోల్చడం అంత సమంజసంగా ఉండదు.

25.6.2 స్వాతంత్ర్యం తర్వాత జాతీయాదాయ అంచనాలు

స్వాతంత్ర్యానంతరం కేంద్ర ప్రభుత్వం ఆగస్టు 4, 1949న ఆచార్య పి.సి. మహలనోబిస్ నేతృత్వంలో జాతీయాదాయ కమిటీని నియమించారు. ఈ కమిటీలో ఇతర సభ్యులు ఆచార్య ఆర్. గాడ్గిల్, ఆచార్య వి.కె.ఆర్.వి.రావు. జాతీయాదాయానికి సంబంధించిన అంచనాలను అంచనా వేసే బాధ్యతను ఈ కమిటికీ అప్పగించారు. అంతే కాకుండా జాతీయాదాయ రంగంలో అనుసరించాల్సిన ఉత్తమ పద్ధతులను, దత్తాంశపు నాణ్యతను మెరుగు పరుచుటకు సలహాలను కూడా ఇవ్వవలసిందిగా ఈ కమిటీని కోరారు. ఫలితంగా, ఈ కమిటీ తమ మొదటి నివేదికను 15 ఏప్రిల్, 1951 నాడు సమర్పించింది. మనదేశ చరిత్రలోనే ఈ నివేదికలు మైలురాళ్ళుగా పేర్కొనవచ్చు. ఎందుకంటే మొదటి సారిగా భారతదేశం మొత్తానికి జాతీయాదాయానికి సంబంధించి సవివరమైన దత్తాంశాన్ని అందచేయడం జరిగింది. అప్పటి నుండి (1951 నుండి) భారత దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ జాతీయాదాయ అధికారిక అంచనాలను ప్రతి సంవత్సరం మదింపు చేయు గురుతరమైన బాధ్యతను కేంద్ర ప్రభుత్వపు కేంద్ర గణాంక వ్యవస్థ (Central Statistical Organisation - CSO) నిర్వహిస్తున్నది.

25.7 భారతదేశంలో జాతీయాదాయం అంచనా వేయు పద్ధతి

భారతదేశంలో జాతీయాదాయంను అంచనా వేయుటకు అనుసరించే పద్ధతి గూర్చి వాస్తవంగా CSO

B R A O U

25.5.6 తలసరి ఆదాయం

జాతీయాదాయాన్ని దేశంలో ఉన్న జనాభాచే భాగిస్తే తలసరి ఆదాయం వస్తుంది.

$$\text{తలసరి ఆదాయం} = \frac{\text{జాతీయాదాయం}}{\text{జనాభా}}$$

ప్రజల జీవన ప్రమాణాన్ని తెలుసుకొనుటకు తలసరి ఆదాయం ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

25.6 భారతదేశ జాతీయాదాయం

స్వాతంత్ర్యానికి పూర్వం మన జాతీయాదాయంనకు సంబంధించిన అధికారిక అంచనాలు లభ్యం కాలేదు. కొంతమంది ఆర్థిక వేత్తలు తమ వ్యక్తిగత స్థాయిలో జాతీయాదాయాన్ని అంచనా వేసారు. వివిధ అంశాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని ఈ అంచనాలను రూపొందించారు. కావున వీటిని పోల్చడం కాని, ఆర్థిక వ్యవస్థలోని మార్పులను గమనించడం కాని కష్టం అని గమనించాలి. జాతీయాదాయం తాలూకు అంచనాలను రెండు రకాలుగా పరిశీలించవచ్చు.

1. స్వాతంత్ర్యానికి ముందు జాతీయాదాయ అంచనాలు
2. స్వాతంత్ర్యం తర్వాత జాతీయాదాయ అంచనాలు

25.6.1 స్వాతంత్ర్యానికి ముందు జాతీయాదాయ అంచనాలు

1876 సంవత్సరంలో దాదాభాయి నౌరోజి భారత దేశ జాతీయాదాయాన్ని అంచనా వేసాడు. 1868వ సంవత్సరానికి తలసరి ఆదాయం రూ. 20/-గా అంచనా వేసాడు. 19, 20 శతాబ్దాలలో లార్డ్ కర్జన్, వకీల్ మురంజన్, అటికిన్‌సన్, వి.కె. ఆర్. వి. రావు లాంటి వారు జాతీయాదాయాలను అంచనా వేసారు. వీటి తాలూకు అంచనాలు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

అంచనా వేసిన వ్యక్తి పేరు	సం॥నకు సంబంధించి అంచనా	తలసరి ఆదాయం (రూపాయలలో)
1. దాదాభాయి నౌరోజి	1867 - 68	20 = 00
2. బేరింగ్ బార్బర్	1881	27 = 00
3. లార్డ్ కర్జన్	1897 - 98	30 = 00
4. ఇ.జి. అటికిన్‌సన్	1875	27 = 30
5. ఇ.జి. అటికిన్‌సన్	1895	35 = 20
6. బి.యన్. శర్మ	1911	50 =00
7. వాడియా జోషి	1913 - 14	44 = 30
8. వకీల్ మురంజన్	1910 - 14	58 = 50
9. యఫ్. షిరాస్	1921	107 = 00
10. షాకంభత్తా	1921 - 32	64 = 00
11. వి.కె.ఆర్.వి. రావు	1931 - 32	64 =00
12. వి.కె.ఆర్.వి. రావు	1942-43	114=00

BRAOU

నికర జాతీయోత్పత్తి = స్థూల జాతీయోత్పత్తి - తరుగుదల

వస్తూత్పత్తికి వివిధ రకాల ఉత్పత్తి కారకాలను ఉపయోగిస్తాం. వీటిని అదేపనిగా నిరంతరం వాడుతూ పోతే అవి పాతవై కొంత కాలం తరువాత అరుగుదలకు లేదా తరుగుదలకు లోనవుతాయి. అంటే కొంత కాలం తర్వాత ఉత్పాదక వస్తువులు నిరుపయోగమవుతాయి. ఈలాంటి తరుగుదలను స్థూల జాతీయోత్పత్తి నుండి మినహాయిస్తే మిగిలిన మొత్తాన్ని నికర జాతీయ ఉత్పత్తిగా పరిగణిస్తారు.

25.5.3 ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయం దృష్ట్యా జాతీయాదాయం

వస్తూత్పత్తి ప్రక్రియలో పాల్గొను ఉత్పత్తి కారకాల యజమానులకు ప్రతిఫలాలను ద్రవ్య రూపంలో చెల్లిస్తారు. ఇది వారికి ఆదాయాలవుతాయి. శ్రామికులకు వేతనాలు, భూమికి భాటకం, మూలధనముకు వడ్డీ, వ్యవస్థాపకుడికి లాభాల / నష్టాల రూపంలో ప్రతిఫలాలు చెల్లించడం పరిపాటి. ఇలా ఉత్పత్తి కారక యజమానులకు చెల్లించిన ప్రతిఫలాల మొత్తం వస్తూత్పత్తికైన ఉత్పత్తి వ్యయం అవుతుంది. అంటే ఉత్పత్తి విలువ కారకాలకు చెల్లించిన ఆదాయానికి సమానమవుతుంది. నికర జాతీయోత్పత్తి (NNP = GNP - Depreciation) అంతా ఉత్పత్తి కారకాల మధ్య పంపిణీకే కాదు. నికర జాతీయోత్పత్తిలో కొంతభాగం పరోక్ష పన్నుల రూపంలో ప్రభుత్వానికి ముడుతుంది. ఇలాంటి పన్నులను నికర జాతీయోత్పత్తి నుండి తీసివేయగా మిగిలిన ఆదాయం ఉత్పత్తి కారకాల మధ్య పంపిణీ అవుతుంది. కొన్ని తరహా వస్తూత్పత్తి అమ్మకాలకు ప్రభుత్వం సబ్సిడీలు చెల్లిస్తుంది. అలాంటి సబ్సిడీల మేరకు వస్తువుల ధరలను తగ్గిస్తారు. అట్లాంటి సబ్సిడీలను నికర జాతీయోత్పత్తికి కలపాలి.

ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయం దృష్ట్యా జాతీయాదాయం = మార్కెటు ధరలలో నికర జాతీయోత్పత్తి - పరోక్షపు పన్నులు + సబ్సిడీలు.

25.5.4 వ్యష్టి ఆదాయం

జాతీయాదాయంలో కొంతభాగం కార్పోరేటు ఆదాయం పన్నులు, పంచిపెట్టని కంపెనీ లాభాలు, సాంఘిక సంక్షేమ విరాళాలు మినహాయిస్తే మిగిలిన జాతీయాదాయం మాత్రమే వ్యక్తులకు ముడుతుంది. పెన్షన్ దారులకు ఇచ్చే పెన్షన్‌లు నిరుద్యోగులకిచ్చే ఆర్థిక సహాయం, శరణార్థుల కిచ్చే ఆర్థిక సహాయం (భృతి) మొదలైన వాటిని బదిలీ చెల్లింపులని అంటాం. దీనిని వ్యక్తుల ఆదాయానికి కలిపితే వ్యష్టి ఆదాయం స్పష్టమవుతుంది.

వ్యష్టి ఆదాయం = నికర జాతీయోత్పత్తి - కార్పొరేటు పన్నులు - పంచిపెట్టని కంపెనీ లాభాలు - సాంఘీక సంక్షేమ విరాళాలు + బదిలీ చెల్లింపులు.

25.5.5 వ్యయార్హ ఆదాయం

ప్రజలు పొందే ఆదాయం మొత్తాన్ని అనుభవించ వీలులేదు. తమకందిన ఆదాయంలో నిబంధనల మేరకు ప్రభుత్వానికి పన్ను రూపంలో చెల్లించ వలసి ఉంటుంది. ఇలాంటి పన్నులను (ఆదాయం పన్ను, ఆస్తిపన్ను, వృత్తిపన్ను మొదలైనవి) వ్యష్టి ఆదాయం నుండి తీసివేస్తే వ్యయార్హ ఆదాయం వస్తుంది.

వ్యయార్హ ఆదాయం = వ్యష్టి ఆదాయం - పన్నులు.

ఈ వ్యయార్హ ఆదాయాన్ని, ప్రజలు వ్యష్టి వినియోగం క్రింద, వ్యష్టి పొదుపు క్రింద కేటాయిస్తారు.

వ్యష్టి వినియోగం + వ్యష్టి పొదుపు = వ్యయార్హ ఆదాయం లేదా

వ్యష్టి పొదుపు = వ్యయార్హ ఆదాయం - వ్యష్టి వినియోగం.

BRAOU

M= దిగుమతుల విలువ

సంక్షిప్తంగా (X - M) ని నికరమైన విదేశీయ పెట్టుబడి అనవచ్చు.

మిగతా పద్ధతులతో పోల్చినప్పుడు వ్యయాల మదింపు పద్ధతిని తక్కువగా ఉపయోగిస్తారు. ఎందుకంటే ఈ పద్ధతి ప్రకారం కావలసిన దత్తాంశాలు సామాన్యంగా లభ్యం కావు. సిద్ధాంతరీత్యా పై మూడు మదింపు పద్ధతులు ఒకేవిధమైన ఫలితాలనిస్తాయి. ఒక దేశంలో ఉత్పత్తి అయిన వస్తు సేవల విలువను జాతీయాదాయం అంటాం (ఉత్పత్తి మదింపు పద్ధతి). ఈ వస్తు సేవలకు దోహదం చేసే ఉత్పత్తి కారకాలకు ప్రతిఫలాలు చెల్లించబడతాయి (ఆదాయ మదింపు పద్ధతి). ఈ ఆదాయం వస్తు సేవల స్థూల విలువకు సమానంగా ఉంటుంది. ఈ ఆదాయం వివిధ వస్తు సేవలపై వ్యయం అవుతుంది (వ్యయాల మదింపు పద్ధతి). మొత్తం ఆదాయం, మొత్తం వ్యయానికి సమానమవుతుంది. దీనినే వస్తు సేవల విలువ = కారకాల ఆదాయం= వస్తు సేవలపై వ్యయంగా తెలియచేయవచ్చు.

25.5 జాతీయాదాయ భావనలు

క్రింది వాటిని జాతీయాదాయానికి సంబంధించిన కొన్ని భావనలు

1. స్థూల జాతీయోత్పత్తి (Cross - National Product)
2. నికర జాతీయోత్పత్తి (Net National Product)
3. ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయం దృష్ట్యా జాతీయాదాయం (National Income at Factor Cost)
4. వ్యష్టి ఆదాయం (Personal Income)
5. వ్యయార్హ ఆదాయం (Disposable Income)
6. తలసరి ఆదాయం (Per capita Income)

25.5.1 స్థూల జాతీయోత్పత్తి

ఒక దేశంలో ఒక సంవత్సర కాలంలో ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తు(వినియోగానికి సిద్ధంగా ఉన్న) సేవల మొత్తం ద్రవ్యం విలువ (money value) ను స్థూల జాతీయాదాయం అనవచ్చు. ప్రస్తుత మార్కెటు ధరలతో వస్తు సేవల పరిమాణంను హెచ్చిస్తే ఈ ద్రవ్య విలువ వస్తుంది. ఇందులో తరుగుదల, పునస్థాపిత బకాయిలు కూడా చేరి ఉంటాయి. ఇందులో వినియోగ వ్యయం, పెట్టుబడి వ్యయం, ప్రభుత్వ వ్యయం, ఎగుమతి - దిగుమతుల నికర తేడా తాలూకు భాగాలుంటాయి. దీనిని

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

ఇక్కడ, C= వినియోగ వస్తువులను ; I= పెట్టుబడి (ఉత్పాదక) వస్తువులను ; G= వస్తు సేవలపై ప్రభుత్వ వ్యయాన్ని : X - M = ఎగుమతుల దిగుమతుల నికర తేడాను తెలియచేస్తాయి.

C,I,G, X - M లను స్థూల జాతీయాదాయంలో భాగాలుగా పరిగణిస్తారు.

25.5.2 నికర జాతీయోత్పత్తి

స్థూల జాతీయోత్పత్తి నుండి తరుగుదలను లేదా పున : స్థాపిత బకాయిలను తీసివేయడం ద్వారా నికర జాతీయోత్పత్తిని పొందవచ్చు.

25.4.2 ఆదాయాల మదింపు పద్ధతి

ఉత్పత్తి కారకాల ఆదాయ పంపిణీ దృష్ట్యా జాతీయాదాయాన్ని లెక్కించడం జరుగుతుంది. వ్యక్తులు, వ్యాపార వేత్తలు పొందిన ఆదాయాల మొత్తాన్ని జాతీయాదాయమని ఈ పద్ధతి తెలియచేస్తుంది. ఉత్పత్తి కారకాలైన, శ్రమ, భూమి, మూలధనం, వ్యవస్థాపకుడు వారికి చెల్లించే ప్రతిఫలాల - వేతనాలు, భాటకం, వడ్డీ, లాభాల - మొత్తాన్ని జాతీయదాయ మొత్తంగా చెప్పవచ్చు. అమెరికాలోని గణాంక కార్యాలయం క్రింది అంశాలను లెక్కలోకి తీసుకోవడం ద్వారా ఆదాయాల మదింపు పద్ధతిననుసరించి జాతీయాదాయాన్ని లెక్కించవచ్చని సిఫారసు చేసింది.

1. వేతనాలు, జీతాలు (ప్రభుత్వ , ప్రైవేటు, మిలిటరీ సిబ్బంది)
2. మిగతా శ్రామికుల ఆదాయాలు
3. పన్నులు చెల్లించక ముందు కార్పోరేట్ లాభాలు
4. ప్రభుత్వ సంస్థల లాభాలు
5. వడ్డీలు
6. భూముల, గృహాలపై నికర భాటకాలు
7. ఇతర దేశాల నుండి వచ్చే ఆదాయాలు, డివిడెండ్లు.

పై వర్గాల మొత్తాన్ని, ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయాల దృష్ట్యా జాతీయాదాయంగా చెప్పవచ్చు. అయితే ఆదాయపు పన్ను అధికారులు సేకరించే వివరాలపై ఈ పద్ధతి ఎక్కువగా ఆధారపడి ఉన్నందున భారతదేశం లాంటి ఆర్థిక వ్యవస్థలో పన్ను చెల్లింపు దారులు తక్కువగా ఉండడం వల్ల జాతీయాదాయాన్ని లెక్కించుటకు ఈ పద్ధతి సరైనది కాదు.

BRAOU

25.4.3 వ్యయాల పద్ధతి

ఈ పద్ధతి ప్రకారం జాతీయాదాయం అంతిమ వినియోగ వస్తువుల, సేవల, విదేశీ నికర పెట్టుబడుల పై అయ్యే వ్యయానికి సమానంగా ఉంటుంది. దీనినే క్రింది విధంగా తెలియచేయవచ్చు.

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

ఇక్కడ, Y= మొత్తం వ్యయం

C= ప్రైవేటు కుటుంబ వినియోగ వ్యయం (వ్యక్తులు, కుటుంబాలు వస్తు సేవలపై చేసే వ్యయం)

I = ప్రైవేటు పెట్టుబడి వ్యయం (కొత్త ఉత్పాదక వస్తువులను నిర్మించడానికి అయిన వ్యయం + తరుగుదల నిధులకు చేర్చిన నిధులు + ఇన్వెంటరీలలో పెరుగుదల—— ఇలాంటి పెట్టుబడి వ్యయాన్ని వ్యాపార సంస్థలు చేస్తాయి)

G= వస్తు సేవలపై ప్రభుత్వ వ్యయం (అభివృద్ధి + అభివృద్ధేతర వ్యయం)

X= ఎగుమతుల విలువ

ఈ పద్ధతి ప్రకారం ఉత్పత్తి ప్రక్రియలో అయిన ఖర్చులను మొత్తం విలువల నుండి తీసివేస్తే నికర విలువలు లభిస్తాయి. అయితే అన్ని రంగాలలో ఖర్చులకు సంబంధించి వివరాలు లభించవు. ఉదాహరణకు, వ్యవసాయ రంగంలో ఉత్పత్తి ప్రక్రియలో ఉపయోగించబడే ఉత్పత్తి కారకాలైన విత్తనాలకు, ఎరువులకు, వ్యవసాయ శ్రామికుల వేతనాల తాలుకు ఖర్చు వివరాలు వివరంగా లభ్యం కావు. అదేవిధంగా పారిశ్రామిక రంగంలో కూడా ముడి పదార్థం విద్యుచ్ఛక్తిలపై అయిన ఖర్చు లభిస్తుంది కాని అవసరమయ్యే ఇతర ఖర్చుల (incidental expenses) తాలూకు వివరాలు లభ్యం కాకపోవచ్చు. అదేవిధంగా తరుగుదలకు (depreciation) సంబంధించిన అన్ని వివరాలు అన్ని రంగాలలో లభ్యం కాకపోవచ్చు. కావున ఈ పద్ధతి ప్రకారం లెక్కించబడే జాతీయాదాయ వివరాలు విశ్వసనీయంగా ఉండకపోవచ్చు. అయినప్పటికీ చాలా దేశాలలో ఈ పద్ధతి వల్ల జాతీయాదాయంలో వివిధ రంగాల వాటాను సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. అమెరికాలోని గణాంక కార్యాలయం ఈ కింది అంశాలను పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా జాతీయాదాయాన్ని లెకించవచ్చని సిఫారసు చేసింది.

1. వ్యవసాయం, అడవులు, చేపలు
2. గనులు, విద్యుచ్ఛక్తి, గాస్, మంచినీటి సరఫరా
3. నిర్మాణాలు
4. వాణిజ్యం
5. రవాణా, కమ్యూనికేషన్స్
6. బ్యాకింగ్, భీమా, రియల్ ఎస్టేట్లు
7. ప్రభుత్వ సేవలు
8. నికర విదేశాయాదాయం (ఎగుమతులు - దిగుమతులు)

ఈ పద్ధతి వెనుకబడిన ఆర్థిక వ్యవస్థలలో విస్తృతంగా ఉపయోగించబడుతున్నప్పటికీ కొన్ని రంగాలను తొలగించే లేక రెండుసార్లు పరిగణనలోకి తీసుకొనే అవకాశముంటుంది. ఈ విషయం పట్ల గణాంకకులు జాగ్రత్తగా ఉండాలి. ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించినప్పుడు క్రింది జాగ్రత్తలు పాటించాలి.

1. ఒక నిర్దిష్ట సంవత్సరం దృష్ట్యా జాతీయాదాయాన్ని తెలియచేయాలి. ప్రస్తుత మరియు నిలకడ ధరలలో జాతీయాదాయ వివరాలను తెలియచేసినట్లయితే వాటి మధ్య సందిగ్ధత ఉండదు.
2. అంతిమ వస్తువులను తీసుకోవడం ద్వారా రెండుసార్లు లెక్కించడాన్ని తప్పించుకోవచ్చు. అంటే ముడి పదార్థాలను, పూర్తిగా తయారు కాని వస్తువులను మినహాయించాలి. ఒక వేళ ఉత్పత్తి చేయబడిన వస్తు సేవలను మార్కెటు ధరలతో గుణిస్తే " మార్కెటు ధరలలో జాతీయదాయం " అంటాం. ఉత్పత్తి కారకాలు పొందిన చెల్లింపులకు సమానంగా ఉండే ధరల దృష్ట్యా గణన చేస్తే " ఉత్పత్తి కారకాల వ్యయాల దృష్ట్యా జాతీయాదాయం " అంటాం.

BRAOU

సార్థకమైన స్థానంను ఆక్రమించిన వ్యవసాయ రంగం ఇప్పుడు సేవల రంగం కంటే వెనుకబడి ఉంది. దీనికి గల కారణాలను అన్వేషించుటకు జాతీయాదాయ గణాంకాలు ఉపయోగపడతాయి.

3. ప్రజల జీవ ప్రమాణ స్థాయిని తెలుసుకొనేందుకు జాతీయాదాయ అంచనాలు ఉపయోగపడతాయి. మిగతా విషయాలలో మార్పు లేనట్లయితే (ధరల స్థాయి, జనాభా, ఆదాయ పంపిణీలలో మార్పు లేనప్పుడు) ప్రజల జీవన ప్రమాణం మెరుగవుతుంది. జీవన ప్రమాణ స్థాయిలో మార్పును తెలుసుకొనేందుకు

తలసరి ఆదాయాన్ని $\left\{\frac{\text{జాతీయాదాయం}}{\text{జనాభా}}\right\}$ లెక్కిస్తారు.

4. ఆర్థికాభివృద్ధి ప్రణాళికల ప్రగతిని మూల్యాంకనం చేయుటకు జాతీయాదాయ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగిస్తారు. ఈ దత్తాంశంతో వివిధ అంశాలను పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా సాధించదలచుకొన్న వృద్ధి రేటును ముందుగానే నిర్ధారించవచ్చు.

5. సంపూర్ణ ఉద్యోగితా స్థాయికి దగ్గరగా చేరుకోవడానికి గాను ఉండాల్సిన జాతీయాదాయ వృద్ధి రేటును అంచనా వేసి అందుకు అనుగుణంగా నిర్మాణాత్మకమైన మార్పులను చేపట్టవచ్చు. ఎందుకంటే జాతీయాదాయంతో ఉద్యోగితా స్థాయి ముడిపడి వుంది. అంటే జాతీయాదాయం పెరుగుదలపైన ఉద్యోగితా అవకాశాలు ఆధారపడి వున్నవి. వివిధ రంగాల మధ్య ఆదాయ తీరులను పోల్చుటకు ఈ గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. అమలులో వున్న వివిధ విధానాలను గమనిస్తూ నూతన విధాన నిర్ణయాల రూప కల్పనకు కూడా జాతీయాదాయ గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

6. ఒక దేశంలో వివిధ రాష్ట్రాల, ప్రాంతాల మధ్య జాతీయాదాయ పంపిణీని తెలుసుకోవడం ద్వారా ఏ రాష్ట్రాలు ఏ ప్రాంతాలు ఎక్కువ జాతీయాదాయంను కలిగి వున్నాయో వాటికి ఏయే రంగాలు ఎంతశాతంలో దోహదం చేస్తున్నాయో తెలుసుకోవడానికి జాతీయాదాయ గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. మరియు వివిధ దేశాల మధ్య, జాతీయాదాయం ఏ విధంగా పంపిణీ అవుతున్నది తెలుసుకోవడం ద్వారా ప్రపంచ ఆర్థిక వ్యవస్థలో వాటి కార్యకలాపాల తీరును, స్థానాన్ని అర్థం చేసుకొవవచ్చు.

B R A O U

25.4 జాతీయాదాయ మదింపు పద్ధతులు

ఈ విధంగా ఎన్నో ప్రయోజనాలున్న జాతీయాదాయాన్ని మూడు పద్ధతుల ద్వారా లెక్కిస్తున్నారు.

1. ఉత్పత్తి మదింపు పద్ధతి (Output method)
2. ఆదాయాల మదింపు పద్ధతి (Income method)
3. వ్యయాల మదింపు పద్ధతి (Expenditure method)

25.4.1 ఉత్పత్తి మదింపు పద్ధతి

ఈ పద్ధతి ప్రకారం వివిధ ఉత్పత్తి రంగాలలోని స్థూల ఉత్పత్తిని లెక్కించడం జరుగుతుంది. ఉత్పత్తి ప్రక్రియలో ఉపయోగించే ఉత్పాదక పరికరాలకు అయ్యే తరుగుదలను కూడా లెక్కిస్తారు. స్థూల ఉత్పత్తి నుండి ఈ తరుగుదలను మినహాయిస్తే మిగిలిన దానిని ఆయా రంగాల నికర ఉత్పత్తిగా పరిగణిస్తారు. వ్యవసాయ, పారిశ్రామిక, సేవల లాంటి వివిధ రంగాలలోని మొత్తం ఉత్పత్తులను సంబంధిత ధరలతో గుణిస్తే ఆయా రంగాల స్థూల ఉత్పత్తి తెలుస్తుంది.

1961-62	0.4	4.6	2.7
1962-63	3.8	8.9	1.7
1963-64	6.2	12.0	5.0
1964-65	11.0	11.2	7.4
1965-66	7.6	9.6	-4.7
1966-67	13.9	9.5	0.5
1967-68	11.6	7.9	8.2
1968-69	-1.1	8.4	2.5
1969-70	3.8	10.7	6.7
1970-71	5.5	12.0	5.2
1971-72	8.2	13.7	0.6
1972-73	12.3	16.4	-0.8
1973-74	20.2	15.4	4.9
1974-75	25.2	6.6	1.3
1975-76	-1.1	9.5	9.5
1976-77	2.1	18.7	0.9
1977-78	5.2	-10.2	7.7
1978-79	0.0	20.2	5.6
1979-80	17.1	15.7	-6.0
1980-81	17.7	17.2	7.3
1981-82	9.8	6.4	5.8
1982-83	7.2	14.4	2.1
1983-84	7.2	17.0	8.0
1984-85	6.0	11.7	3.5
1985-86	4.8	9.8	4.8
1986-87	5.8	16.8	3.6
1987-88	10.6	13.7	3.5
1988-89	5.7	14.0	11.1
1989-90	7.4	22.5	4.6

Data for 1989-90 are provisional.

Sources: (1) Reserve Bank of India, Report on Currency and Finance, (various issues)

(2) Reserve Bank of India, Reserve Bank of India Bulletin,)various issues)

(3) Government of India, Economic Survey, (various issues)

BRAOU

పై దత్తాంశంను పరిశీలిస్తే ద్రవ్యం సప్లయి 1952 - 53, 1977 - 78 సంవత్సరాలలో 6.5 శాతంనకు, 10.2 శాతంనకు తగ్గినట్లు గమనించవచ్చు.

26.10 ముగింపు

ధరల వివరాల ద్వారా ఆర్థిక వ్యవస్థలోని ద్రవ్యోల్బణ స్థితులను అర్థంచేసుకోవచ్చు. ఈ ధరలను టోకు, చిల్లర సూచీల ద్వారా గమనించవచ్చు. ఈ సూచీలను నిర్మించుటకు ఏయే వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకోవడం జరిగిందో వివరించాం. ఎక్కువ వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకొన్నప్పుడు రూపొందించబడే సూచీ ఎంతో మెరుగైనదిగా చెప్పవచ్చు. వ్యవసాయ శ్రామికుల కోసం నిర్మించబడే వినియోగ ధర సూచీ ధరలలోని మొత్తం మార్పులను కొలుచుటకు ఉపయోగపడ్తుంది. ఈ సూచీ భారాలపైన ఆధారపడింది. వ్యవసాయ పంటల ధరలకి సంబంధించిన ధరలు వివిధ స్థాయిలలో లభ్యమవుతున్నాయి. అంటే పంటకోత నుండి వినియోగ దారులకు చేరుకోనేంతవరకు అమలులో వుండే ధరలు మనదేశంలో లభ్యమవుతున్నాయి. ఇదేవిధంగా ద్రవ్యం సప్లయి ఏవిధంగా పెరుగుతుందో గణాంక వివరాలు తెలియజేస్తున్నాయి. ద్రవ్యం సప్లయి, అధిక ధరలు ద్రవ్యోల్బణంను ఎక్కువగా ప్రభావితం చేస్తాయి.

26.11 చదువదగిన పుస్తకాలు / నివేదికలు .

1. Economic Survey(వివిధ వార్షిక సంచికలు)
2. Report on Currency and Finance
3. Statistical Tables Relating to Banks
4. Basic Statistics Relating to the Indian Economy
5. S.P. Gupta, Indian Statistics, Sultan Chand and Sons

26.12 నమూనా పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

1. ధర గణాంకాల వల్ల లాభాలేమిటో వివరింపుము.
2. టోకు ధరలకు, చిల్లర ధరలకు మధ్యగల తేడాను వివరింపుము.

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. వ్యవసాయక ధరల గణాంకాల గురించి వివరించండి.
2. ధరల గణాంకాల పరిమితులను తెలుపండి.
3. ద్రవ్యం సప్లయి తాలూకు గణాంకాలను విశ్లేషించండి.

26.13 పదకోశం

టోకు ధరలు	Wholesale prices
చిల్లర ధరలు	Retail prices
సేవా రంగం	Tertiary sector
ధర సాంఖ్యకాలు	Price statistics

BRAOU

వర్తక నిబంధనలు	Terms of trade
ద్రవ్యోల్బణం	Inflation
ప్రతి ద్రవ్యోల్బణం	Deflation
ధరల సూచీ	Price index
తయారీ వస్తువులు	Manufactured goods / products
వినియోగదారుని ధరసూచీ	Consumer price index
సాధారణ సూచీ	General index
ద్రవ్యం సప్లయ్	Money supply

- డా . ఎం. ఉపేందర్

BRAOU

భాగం -27 జనాభా గణాంకాలు (Population Statistics)

పాఠ్యాంశాలు

27.1 ఉద్దేశాలు

27.2 పరిచయం

27.3 జనాభా గణన - చారిత్రక వివరాలు

27.4 జనాభా గణాంకాల ఉపయోగం

27.5 సెన్సస్ లక్షణాలు

27.6 భారతదేశంలో జనాభా గణన

27.6.1 చారిత్రక వివరాలు

27.6.2 వంద సంవత్సరాల భారతదేశ జనాభా గణన (1881 - 1981)

27.6.3 1991 జనాభా గణన - ఒక పరిశీలన

27.6.4 మన జనాభా గణన - విమర్శనాత్మక పరిశీలన

27.7 జీవగణాంకాలు

27.7.1 శాంపిల్ నమోదు పద్ధతి

27.7.2 కొన్ని ముఖ్య జీవ గణాంకాల నిర్వచనాలు

27.8 సారాంశము

27.9 అవగాహన ప్రశ్నలు

27.10 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

27.11 చదువ వలసిన పుస్తకాలు (Recommended Books)

27.12 సంప్రదింపు గ్రంథాలు (References)

27.13 పదకోశము (Glossary)

27.1 ఉద్దేశాలు

ఒక దేశపు ప్రణాళికాబద్ధమైన ప్రగతికి మానవ వనరులు మూల కారణము. ఈ మానవ వనరుల స్థితిగతుల గురించి తెలుసుకోగలిగే అతి ముఖ్యమైన మార్గము ఒక నిర్ణీత గడువులో జరిగే జనాభా గణన(Population census). ఈ జనాభా గణన వలన జనసంఖ్య మాత్రమే కాకుండా, అనేక ఇతర వివరాలు కూడా తెలుస్తాయి. జనాభా వయో విభాజనము, వృత్తులు, జాతులు, అక్షరాస్యత, జనసాంద్రత, ఆర్థిక స్థితిగతులు, హరిజన గిరిజనుల సాంఘిక - ఆర్థిక పరిస్థితులు మొదలైన అనేక వివరాలు జనాభా గణన ద్వారా తెలుస్తాయి.

భారతదేశం లాంటి అతి పెద్ద దేశాలలో జనాభా గణన అన్నది ప్రభుత్వానికి చాల శ్రమ, ఖర్చులతో కూడుకున్న పని. అందువల్ల ప్రభుత్వం సైతం, ఈ గణన ప్రతి పది సంవత్సరాల కొకసారి మాత్రమే చేయగలుగుతూ ఉంది. మనదేశంలోనూ, ఇతర దేశాలలోనూ యీ జనాభా గణన లలో జరుగుతూ వచ్చిన

B R A O U

సేకరించడం. అందులో యేది విస్మరించినా, అది సెన్సస్ పద్ధతికి వ్యతిరేకం. అంతేకాదు సెన్సస్ వివరాలు, ఒక తేదీకి సంబంధించినదిగా ఉండాలి. వ్యక్తిగత వివరాలను గోప్యంగా ఉంచాలి. సెన్సస్ క్రమ బద్ధంగా జరగాలి. అంటే అయిదేళ్లకో, పదేళ్లకో ఒకసారి క్రమంగా ఖచ్చితంగా జరగాలి. అంతేగాక, ప్రతి వ్యక్తి నుంచి ఒకేవిధమైన వివరాలను, ఖచ్చితమైన ప్రశ్నల పట్టికతో సేకరించాలి.

27.6 భారత దేశంలో జనాభా గణన (Population Census in India)

27.6.1 చారిత్రక వివరాలు

భారతదేశ పురాతన చారిత్రక వివరాలకు, హరప్ప, మొహంజదారో త్రవ్వకాలలో బయటపడ్డ అంశాలు ఆధారము. క్రీ॥ పూ॥ 3, 4 వేల సంవత్సరాలు, అంతకంటె ముందుగానే భారతదేశములో అతి పెద్ద నగరాలు, సుందరంగా నిర్మించిన గృహాలు, ఆలయాలు, ఇటుకలతో నిర్మించిన ప్రభుత్వ భవనాలు ఉన్నట్లు విదితమవుతుంది. ఆ తరువాత క్రీ॥ పూ॥ 2000 సం॥ క్రితం ఆర్యులు భారతదేశానికి వచ్చిన తరువాత, వ్యవసాయాభివృద్ధిలో గణనీయమైన ప్రగతి కనబరచినట్లుగా తెలుస్తోంది. క్రీ॥ పూ॥ 800 సం॥ ల క్రితంజన సాంద్రత ఎక్కువగా నున్న ప్రాంతాల్లో, వ్యవసాయోత్పత్తులు జనసాంద్రతకు తగ్గట్టుగా ఉన్నట్టు, దానికి తగ్గట్టు సాంకేతిక నైపుణ్యమున్నట్లు కూడా వెల్లడవుతుంది.

క్రీ॥ పూ॥ 800 - 600 వ సం॥ లలో జనాభా చిన్న చిన్న పల్లెలలో చెదురు మొదురుగా ఉండేవారని, చిన్న పల్లెలు పట్టణాలుగా మారాయని, ఋగ్వేదంలో వ్రాసి యుంది. బౌద్ధ మత గ్రంథాలలో, క్రీ॥ పూ॥ 7 - 4 శతాబ్దాల మధ్య కాలంలో, భారత ఆర్థిక వ్యవస్థ చాల పటిష్టంగానూ, ఐరోపా ఆర్థిక వ్యవస్థకు దీటుగానూ ఉండేదని, చిన్న పట్టణాలలో 30 నించి 1000 కుటుంబాలు నివసించేవని, ఉత్తర భారతదేశంలో అలాంటి పట్టణాలు 20 ఉండేవని వ్రాసి యుంది. క్రీ॥ పూ॥ 327 - 26 లో అలెగ్జాండరు సైన్యము భారతదేశంపై దండెత్తి వచ్చినప్పుడు, జనసాంద్రత ఎక్కువగా నున్నట్లు తెలుపబడింది. క్రీ॥ పూ॥ 321 - 297 సం॥ లలో చంద్ర గుప్త మౌర్యుని సైన్యము 7,00,000 ఉండేదని, దానిని పోషించేందుకు ఎక్కువ జనాభా కావాలని అనుకున్నట్లు గ్రంథాలు తెలుపుతున్నాయి. క్రీ॥ పూ॥ 274 - 236 సం॥ లలో అశోకుని పరిపాలనలో ప్రజలు సుఖ, సంతోషాలతో నుండేవారని చరిత్ర పుటలలో ఉంది. దీన్ని బట్టి చూస్తే క్రీ॥ పూ॥ భారతదేశంలో జనాభా గణన, జనసాంద్రత, ప్రజల ఆర్థిక, సాంఘిక పరిస్థితుల గురించిన వివరాలు సేకరించినట్లు వెల్లడవుతుంది. అంతేకాదు, కౌటిల్యుని అర్థశాస్త్రములోనూ, అక్బరు వ్రాసిన " అయిని - అక్బరి " (Ain-i-Akbari)లోనూ జన గణాంకాలు, పారిశ్రామిక వివరాలు, తదితర ఆర్థికపరమైన అంశాల గురించి ఎన్నో వివరాలు పొందుపరచబడ్డాయి.

క్రీ॥ శ॥ 1865లో సాధారణ జనాభా గణాంకాలు (General Population Census) సేకరించాలని ఉద్దేశ్యంతో H. Beverley ని Registrar General గా నియమించారు. క్రీ॥ శ॥ 1867 - 72 కాలంలో ఒకే ప్రశ్నావళి (questionnaire)తో దేశమంతా జనాభా వివరాలు సేకరించారు. వీటినే 1872 జనాభా గణాంకాలుగా పేర్కొన్నారు. అయితే యీ ప్రక్రియ 1881 లోనే పూర్తవడముతో, భారతదేశంలో మొట్ట మొదటి జనాభా గణాంకాలు 1881 లోనే జరిగినట్లు పేర్కొనవచ్చు. అప్పటి నుంచి ప్రతి పదేళ్లకు ఒకసారి నిరాటంకంగా మన దేశంలో జనాభా వివరాలు సేకరించడము జరుగుతూనే వుంది. ఇటీవల 1991లో ముగిసిన జనాభా గణాంకాలు 12వది, స్వాతంత్ర్యము వచ్చిన తరువాత 5 వది.

27.6.2 వంద సంవత్సరాల భారతదేశ జనాభా గణన (1881 - 1981)

జనాభా గణనకు ఉపయోగించేవి రెండు పద్ధతులు (i) వాస్తవిక జనసంఖ్య (defacto population) (ii) న్యాయ సమ్మత జన సంఖ్య (deJure population) . వాస్తవిక జన సంఖ్య అంటే జనాభా గణన

చేసేటపుడు ఒక ప్రదేశము లేదా చోటులో ఉన్న జనాభా. న్యాయ సమ్మత జనసంఖ్య అంటే ఆ ప్రదేశంలో స్థిర నివాసము ఏర్పరచుకున్న జనాభా అంటే తాత్కాలికంగా అక్కడ లేకపోయినా మామూలుగా అక్కడ ఉండేవారిని కూడా చేర్చినారు. తాత్కాలికంగా అక్కడ ఉన్నవారిని వదిలివేస్తారు.

వాస్తవిక జన సంఖ్య పద్ధతిని తారీకు పద్ధతి (date system) అని కూడా అంటారు. గణన ఒకే రోజున దేశమంతటా జరుగుతుంది కాబట్టి దీనికి తారీకు పద్ధతి అనే పేరు వచ్చింది. ఆ రోజు ఎవరు ఎక్కడుంటే వారిని అక్కడ గణన చేస్తారు. ఆ పద్ధతిలో ముఖ్య సదుపాయము అతి తేలికైనది కావడము, ఒక దేశంలో నివసించే ప్రజలను ఉజ్జాయింపుగా ఖచ్చితమైన అంచనా వేసేటందుకు వీలవడము. అయితే, యీ పద్ధతిలో లోపాలు లేకపోలేదు. ప్రయాణము చేస్తున్నవారిని, యుద్ధరంగంలో ఉన్న వారిని, అడవులలో పనిచేస్తున్న వారిని లెక్కించడం చాలా కష్టము. సిబ్బంది కూడా ఎక్కువ మంది కావాలి.

న్యాయ సమ్మత జనాభా పద్ధతి ప్రకారము, లెక్కించే రోజున ఎక్కడ ఉన్నారనే దానిని లెక్కచేయక, మామూలుగా ఎవరు ఎక్కడ ఉంటారో వారిని ఆ ప్రదేశం లోనే గణన చేస్తారు. తాత్కాలికంగా, గణన చేసే చోట నుండే వారిని వదిలి వేస్తారు. అలాగే ఆ రోజు అక్కడ లేకపోయినప్పటికీ గణనలో చేరుస్తారు.

ప్రస్తుతము మన దేశంలో అమలులో నున్నది విస్తృత వాస్తవిక జనాభా గణన పద్ధతి (extended de facto system). ఈ పద్ధతిలో ఒక తారీకున ఎక్కడ వారిని అక్కడ గణనలోకి తీసుకుంటూ , అప్పటికి తాత్కాలికంగా ఉన్నవారిని, తరువాత సవరణలలో తీసివేస్తారు.

1881 నుంచి 1991 వరకు జరిగిన జనాభా గణాంకాలలో " ఇల్లు " ను " పొయ్యి " (Chulha) ఆధారంగా నిర్వచించినారు. ఒకే పొయ్యి లేదా ఒకే వంట ఇంటి నుంచి భోజనం చేసే వారందరు ఒక యింటికి చెందిన వారుగా భావించినారు. దీని ప్రకారం, ఒకే ఇంటిలో అనేక కుటుంబాలు ఉండవచ్చు కాబట్టి, మామూలుగా ఒక యిల్లుగా లెక్కించి ఒకే దానిలో 'సెన్సస్' నిర్వచనం ప్రకారం అనేక 'ఇల్లు' ఉండవచ్చు. 1931వ సం॥ వరకూ అమలులోనున్న వాస్తవిక జనాభా గణన పద్ధతికి స్వస్తిచెప్పి , 1941లో న్యాయ సమ్మత జనాభా గణన పద్ధతిని ప్రవేశపెట్టినారు . రెండవ ప్రపంచ యుద్ధం తరువాత, ప్రాంతీయ ఆహార అవసరాలను అంచనా వేయడానికి, యీ పద్ధతిని అవలంబించారు. ఈ సెన్సస్ మూడు వారాల పాటు జరిగింది. ఫిబ్రవరి 8, 1941న మదలై, ఫిబ్రవరి 28, 1941 వరకు జరిగింది. మార్చి 1 నుంచి 3 వరకు సేకరించిన వివరాలను సరిచూడటం (verify) జరిగింది. 1941లో రెండు క్రొత్త ప్రశ్నలు చేర్చినారు. (1) పుట్టిన శిశువుల సంఖ్య, (2) మొదట పుట్టిన శిశువు ఆడశిశువు అయితే, అప్పటి తల్లి వయస్సు. జనాభా పెరుగుదల రేటును అంచనా వేయడానికి యివి ఉపయోగపడతాయి. 1911, 1921, 1931 జనాభా లెక్కలలో సేకరించిన కులాల వారిగా జనాభా పద్ధతిని, 1941లో వదలి వేశారు.

1951 జనాభా గణన : 1951 జనాభా లెక్కలు స్వాతంత్ర్యము వచ్చిన తరువాత సేకరించిన మొట్టమొదటిది. మొదటి పంచవర్ష ప్రణాళిక కూడా ఆ యేడాదిలోనే ప్రారంభమవడము, ఈ లెక్కలకు చాలా ప్రాముఖ్యత నివ్వబడింది. మొదటిసారిగా, ఒక్కొక్క గ్రామానికి సంబంధించిన జనాభా వివరాలు విడిగా తయారు చేసినారు. ఆ గ్రామ విస్తీర్ణము, అక్షరాశ్యత, జనాభా, బ్రతుకు తెరువు వివరాలు ప్రకటించారు. ఫిబ్రవరి 9 నుంచి మార్చి 1 వరకు జనాభా వివరాలు సేకరించి, మార్చి 1 నుంచి 5 వరకు సేకరించిన సమాచారాన్ని సరిచూడటం (checking) జరిగింది. సెన్సస్ కమిషనరు కార్యాలయం శాశ్వతం చేయబడింది. కులాల వారిగా జనాభా సేకరణ జరగకూడదన్న ప్రభుత్వ విధానమైనప్పటికి షెడ్యూల్డ్ కులాలు, తెగలకు సంబంధించిన వివరాలను

BRAOU

మాత్రము సేకరించారు. విడాకులు పొందిన వారి వివరాలు, కాందిశీకుల (displaced persons) వివరాలు తెలుసు కున్నారు. ఇంగ్లీషు భాషాజ్ఞానము గురించిన వివరాలను 1951లో వదలివేసినారు.

1961 జనాభా గణన : 1961లో సెన్సస్ నిర్వహించేటందుకు, విస్తృతమైన యేర్పాట్లు జరిగాయి. 1951 - 61 మధ్య రాష్ట్రాల సరిహద్దులలో అనేక మార్పులు వచ్చాయి. భాషాప్రయుక్త రాష్ట్రాలు యేర్పడటము, యూనియన్ ప్రాంతాల యేర్పాటు మొదలైన ప్రాంతీయ వ్యవస్థాపనము జరిగింది. వివిధ ప్రాంతాలలో పరిపాలనా యంత్రాంగ నిర్మాణంలో తేడాలున్నప్పటికీ, లెక్కల సేకరణ ఒకేవిధంగా అన్ని ప్రాంతాలలో ఉండేటట్లు జాగ్రత్తలు తీసుకున్నారు. సరిహద్దులను సరిచూసిన తరువాత, లెక్కలను తయారు చేయడానికి సులువుగా ఉండే విధంగా ప్రాంతాలను విభజించారు. దేశాన్నంతటిని తగినంత చిన్న చిన్న యూనిట్‌లుగా విభజించినారు. ఏ ప్రాంతాన్నీ వదిలి వేయడంగాని, ఒకే ప్రాంతం ఇద్దరికి ఒప్పచెప్పడం గాని జరుగకుండా ఈ విభజన జరిగింది. ప్రతి యింటికి ఒక సంకేతం (code) ద్వారా నిరూపించడము జరిగింది.

సెన్సస్ నిర్వహణాధికారి కేంద్రంలో రిజిస్ట్రార్ జనరల్ మరియు సెన్సస్ కమిషనర్ ఉంటారు. ప్రతి రాష్ట్రానికి ఒక సెన్సస్ సూపరింటెండెంట్, ప్రతి జిల్లాకు ఆ జిల్లా కలెక్టరును సెన్సస్ అధికారిగా నియమిస్తారు. గ్రామ, పట్టణ స్థాయిలో ఇన్‌చార్జి ఆఫీసర్లు ఉంటారు. గణకులను (ఎన్యూమరేటర్) గ్రామాల్లో అయితే 150 కుటుంబాలు లేక 750 మంది జనాభాకు ఒకరు, పట్టణాల్లో అయితే 120 కుటుంబాలు లేక 600 మంది జనాభాకు ఒకరిని నియమించారు. ప్రతి 5, 6 గణకులకు ఒక పర్యవేక్షకున్ని (supervisor) నియమించారు. రాష్ట్ర ప్రభుత్వ ఆఫీసుల నుంచి, పాఠశాలల నుంచి, స్థానిక సంస్థలనుంచి గణకులను, పర్యవేక్షకులను నియమించారు. సెన్సస్ పనికి నియోగించిన అందరు అధికారులకు ప్రత్యేక శిక్షణ నిచ్చారు.

1961 సెన్సస్‌లో కుటుంబ చీటీ (Household Schedule) ని మొదటిసారిగా ప్రవేశపెట్టినారు. ఎన్ని కుటుంబాలు ఉన్నాయో తెలుసుకోవడం, వ్యవసాయంలో, గృహ పరిశ్రమలలో లేదా రెండింటిలోను ఎంతమంది పనిచేస్తున్నారో తెలుసుకోవడం దీనిని ప్రవేశపెట్టడంలో ముఖ్య ఉద్దేశాలు. వ్యక్తి చీటిలో 13 ప్రశ్నలున్నాయి. సెన్సస్ లెక్కల సేకరణ ఫిబ్రవరి 10 నుంచి మార్చి 5 వరకు జరిగింది. మార్చి 1వ తేదీ సూర్యోదయం ఈ గణనకు ఆధారముగా నిర్ణయించారు.

1961 లో సేకరించిన జనాభా వివరాలు విస్తృత ప్రాతిపదిక మీద ప్రచురించారు. సుమారు 1400 ప్రచురణలను, 1961 జనాభాల మీద ప్రచురించారు. జనాభా సాంఘిక - ఆర్థిక విషయాల మీద ప్రత్యేక వ్యాసాలు తయారు చేసారు. వాటిలో కొన్ని ముఖ్యమైనవి (1) జనాభా అట్లాసు (ఇది ప్రపంచంలోనే మొట్ట మొదటిది) (2) గ్రామాల మోనో గ్రాఫ్‌లు (3) సంతలు, పండుగలు (fairs and festivals) (4) భారతీయ భాషల వివరాలు (5) వైజ్ఞానిక, సాంకేతిక నిపుణుల గణన (6) శిశు జననాల కొలతలు (fertility surveys) (7) ఆర్థిక విషయాలు, వలస పోయే వారి గురించిన వివరాలను కూడా ప్రచురించారు. 1961లో జరిగిన జనాభా గణన అతి ముఖ్యమైనది ; విపులమైనదిగా నిర్ద్వందంగా చెప్పవచ్చు.

1971 జనాభా గణన : 1971 జనాభా గణనతో, భారతదేశ జనాభా గణాంకాల సేకరణ ఒక శతాబ్దం పూర్తి చేసుకుంది. 1971లో జరిగిన జనాభా గణాంకాలు, 1961 గణాంకాలకు సామీప్యంగా ఉన్నాయి. అయితే, గణాంకాల తేదీ మాత్రమే మార్చి 1వ తేదీ నుంచి ఏప్రిల్ 1వ తేదీకి మార్చడం జరిగింది. అందుకు కారణం లోకసభ ఎన్నికలు.

1961 జనాభా గణన మాదిరిగానే, 1971లో కూడా (1) ఇండ్ల పట్టిక (house list) (2) కుటుంబ పట్టిక (household schedule) (3) వ్యక్తి చీటి (individual slip) లున్నాయి. వీటితో పాటుగా, 1971లో

BRAOU

మొట్టమొదటి సారిగా సంస్థల పట్టి (establishment schedule) ను ప్రవేశపెట్టారు. ఇందులో పని చేసే ఉద్యోగుల వివరాలు, పని వివరాలు, ఉత్పత్తి మొదలైన అంశాలను పొందుపరచారు.

1971 జనాభా గణన ప్రాధమిక ఫలితాలు (provisional results) అత్యంత వేగంగా అంటే 12 దినాలలోనే (ఏప్రిల్ 12వ తేదీన) ప్రకటించారు. ఇందుకు కారణం, మొట్ట మొదటిసారిగా లెక్కల యంత్రాలను యీసెన్సస్ లో వాడినారు. వలసపోయే వారి గురించి, ఉద్యోగుల, వ్యాపార సంస్థల గురించి, సాంకేతిక నిపుణుల గురించిన వివరాలను విస్తృత ప్రాతిపదిక మీద సేకరించారు. ఈ గణనలో ప్రణాళిక సంఘాన్ని, కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలను, విద్య, వ్యాపార సంస్థలను, విశ్వ విద్యాలయాలను సంప్రదించి వివిధ ప్రశ్నలను రూపొందించారు. అంతర్జాతీయ సంస్థలైన " ఎస్కాప్ " (Escap) మొ॥ వాటిని కూడా సంప్రదించారు.

1981 జనాభా గణన : 1948 భారతదేశ జనాభా గణన చట్టం ప్రకారము, కేంద్ర ప్రభుత్వానికి, దేశము మొత్తానికి గాని, కొంత భాగానికి గాని జనాభా వివరాలు సేకరించే అధికారము సంక్రమించింది. ఏ వ్యక్తి కూడా గణకుని ప్రశ్నలకు సమాధానము చెప్పడం నిరాకరిస్తే అది చట్టరీత్యా నేరంగా పరిగణిస్తారు. అంతేగాక, సేకరించిన వ్యక్తి గత వివరాలు గుప్తంగా ఉంచబడతాయి. వాటిని కోర్టులలో సాక్ష్యాలకు గాని, మరే యితర విషయాలకు గాని ఆ వివరాలను ఉపయోగించబడవు. ఈ విషయాలను ప్రజలకు తెలియజేసే ప్రయత్నం జరిగింది.

1981 జనాభా వివరాలను సేకరించడానికి ఉపయోగించిన ప్రశ్నావళి (questionnaire)గత అనుభవాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని రూపొందించారు. దానిని 1978 ఫిబ్రవరిలో జరిగిన జాతీయ సదస్సులో వివరంగా చర్చించారు. 1971లో ప్రవేశపెట్టిన సంస్థల పట్టి (establishment schedule) 1981లో చేపట్టలేదు. 1971లో మాదిరిగానే, యిపుడు కూడా మూడు దశలలో వివరాలను సేకరించారు. అవి : (1) ఇండ్ల పట్టిక (house listing) (2) కుటుంబపట్టి (household schedule) (3) వ్యక్తి చీటి (individual slip) .

ఇండ్ల పట్టికలో ముఖ్యంగా అన్ని రకాల ఇళ్లకు నంబరులివ్వడం, ఆ యిళ్లు నివాసానికా లేక ఇతర ఉపయోగాలకా అన్న విషయాలు సేకరించడం మొదలయిన పనులు 1980లోనే చేపట్టారు. 1981వ సంవత్సరం వికలాంగుల సంవత్సరం కాబట్టి, ఇండ్ల పట్టిక తయారు చేస్తున్నప్పుడే పూర్తిగా గుడ్డివారి, పూర్తిగా వికలాంగుల, కుంటి వాళ్ళ వివరాలను సేకరించారు. 1931వ సంవత్సరానికి ముందు వికలాంగుల వివరాలు సేకరించేవారు కాని, 1931 సెన్సస్ తర్వాత మానివేసారు. కుటుంబ పట్టికలో రెండు భాగాలున్నాయి. మొదటి భాగంలో ఇంటికట్టడం వివరాలు, త్రాగు నీటి ఆధారం, కరెంట్ ఉన్నదీ లేనిది, సామాన్యంగా ఇంట్లో ఉంటున్న దంపతుల సంఖ్య , వ్యవసాయం చేసేదీ లేనిదీ, కుటుంబంలో మొత్తం జనాభా వివరాలు ఉన్నాయి. రెండవ భాగంలో, ఆ యింట్లో మామూలుగా ఉంటున్న సభ్యుల వివరాలు, కుటుంబ యజమానితో సంబంధము, వయస్సు , స్త్రీ / పురుష వివరాలు, వైవాహిక వివరాలు, షెడ్యూల్డు కులములు, తెగలు, అక్షరాస్యత వివరాలు ఉన్నాయి.

వ్యక్తి చీటి (individual slip) అతి ముఖ్యమైన మూడవ అంశము. ప్రతివ్యక్తి యొక్క వివరాలను సేకరించే యీ చీటిలో 16 ప్రశ్నలున్నాయి. వ్యక్తిపేరు, వయస్సు , వైవాహిక వివరము, మాతృభాష, షెడ్యూల్డు కులము లేక తరగతి, అక్షరాశ్యత, విద్యాస్థాయిల వివరాలు మొదటిభాగంలో ఉన్నాయి. రెండో భాగంలో చేస్తున్నపని యొక్క వివరాలు రూపొందించారు. 1981 వ సెన్సస్‌లో వ్యక్తి చీటిని రెండు విధాలుగా రూపొందించి, ఒకటి అందరు వ్యక్తులకు, మరొకటి శ్యాంపుల్‌గా గుర్తించిన వ్యక్తుల వివరాలకు ఉపయోగించారు. పైన వివరించిన ప్రశ్నలు అందరి వ్యక్తులకు సంబంధించినవి. శ్యాంపుల్ వ్యక్తులకోసం రూపొందించిన వ్యక్తి చీటిలో జన్మస్థలము, గత నివాస స్థలము, వలస రావడానికి కారణాలు, ప్రస్తుతము నివసిస్తున్న స్థలంలో ఎన్నాళ్ల నుంచి ఉంటున్నది, వివాహ వయస్సు, ప్రస్తుతమున్న పిల్లల వివరాలు, మొత్తము సజీవ జననాల వివరాలు, గత సంవత్సరములో

BRAOU

జన్మించిన శిశువు వివరాలను సేకరించారు. ఈ రెండో వ్యక్తి చీటిలో ముఖ్యంగా జననాలకు, వలస వచ్చేవారి వివరాలను తెలుసుకోవడానికి మాత్రమే వాడినారు.

1981 వ సెన్సస్ ఫిబ్రవరి తొమ్మిదవ తేదీన ప్రారంభమై 28వ తేదీతో పూర్తయింది. మార్చి ఒకటవ తేదీ సూర్యోదయానికి ఆ వివరాలను సరిచేసారు. మార్చి 1 నుంచి 5 వరకు జనాభా వివరాలను పునర్విమర్శ చేశారు.

27.6.3 1991 జనాభా గణన - ఒక పరిశీలన

1991 సెన్సస్ పనులు 1987లోనే ప్రారంభమయ్యాయి. మొట్ట మొదట రాష్ట్రాల, కేంద్ర పాలిత ప్రాంతాల సెన్సస్ అధికారులు, వారి వారి ప్రాంతాలలో 1981వ సంవత్సరం నుండి రాష్ట్ర, జిల్లా, గ్రామాల సరిహద్దులలో వచ్చిన మార్పులను పరిగణనలోకి తీసుకుని క్రొత్త సరిహద్దులతో చిత్ర పటాలను తయారు చేశారు. ఏప్రిల్ 18 - 20, 1988 లో మొదటి జాతీయ సమావేశంలో ప్రభుత్వ అధికారులు, జనాభా శాస్త్రవేత్తలు, విశ్వవిద్యాలయాల నుంచి సాంఘిక, వైజ్ఞానిక శాస్త్రవేత్తలు, స్వచ్ఛంద సంస్థల కార్యకర్తలు మొదలగు వారు పాల్గొని 1991 సెన్సస్ లో ఉపయోగించదలచిన చీటీలను క్షుణ్ణంగా పరిశీలించి సలహాలనిచ్చారు. 1991 సెన్సస్ తేదీని మార్చి ఒకటిగానే నిర్ణయించారు. 1941, 1951, 1961, 1981లలో మార్చి ఒకటిగానే సెన్సస్ తేదీ అయితే, 1971లో మాత్రం, మధ్యంతర ఎన్నికల కారణంగా ఏప్రిల్ ఒకటవ తేదీగా నిర్ణయించారు.

1991వ సెన్సస్ న్యాయసమ్మత (de jure method), వాస్తవిక (de facto) జనాభా గణన పద్ధతులలో రెండింటిని కాకుండా విస్తృత వాస్తవిక జనాభా గణన (extended de facto) పద్ధతిని 1981 సెన్సస్‌లో మాదిరిగానే అమలు చేశారు. ఈ పద్ధతిలో, కుటుంబ సభ్యుల వివరాలు సేకరించేటప్పుడు క్రింది అంశాలను గుర్తుపెట్టుకోవలసిందిగా గణకులను (ఎన్యూమరేటర్లను) కోరడం జరిగింది.

(1) జనాభా గణన జరిగే కాలంలో (ఫిబ్రవరి 9 నుంచి ఫిబ్రవరి 28వరకు) సామాన్యంగా ఆ యిళ్లలో నివసించే వారిని గణనలోకి తీసుకుంటారు.

(2) సామాన్యంగా ఆ యింట్లో ఉండి, ఎన్యూమరేషన్ కాలంలో కొంత భాగం ఉంటూ, ఎన్యూమరేటరు వెళ్లేటప్పటికి యింట్లో లేకపోయినా వారిని గణనలోకి తీసుకుంటారు.

(3) సామాన్యంగా ఆ యింట్లో ఉంటూ, గణకుడు వెళ్లేటప్పటికి యింట్లో లేకపోయినా, ఫిబ్రవరి 28వ తేదీలోగా వచ్చేసే వారిని గణనలోకి తీసుకుంటారు.

(4) ఎన్యూమరేషన్ కాలంలో యింట్లోనున్న అతిధులు మరెక్కడా వారిని గణనలోకి తీసుకోనట్లయితే, వారిని కూడా కుటుంబ సభ్యులుగానే పరిగణిస్తారు.

పని నిర్వచనము : 1991 సెన్సస్‌లో అవలంబించిన ఆర్థికపరమైన ప్రశ్నలు, 1981వ సెన్సస్‌లో మాదిరిగానే ఉన్నాయి. జనాభానంతటిని మూడు భాగాలుగా విడదీశారు. అవి (1) ముఖ్యపని (main work) (2) ఉపముఖ్యపని (marginal work) (3) యే పని చేయని వారు (non workers). ముఖ్య పనిచేసేవారి గురించిన నిర్వచనము, 1981 వ సెన్సస్‌లో మాదిరిగానే ఉంచారు. జనాభా గణన తేదీకి ముందు ఒక సంవత్సరకాలంలో కనీసం 6 నెలలు (183 రోజులు) యేదైన పనిచేస్తే వారిని ముఖ్యపనివారిగాను, 6 నెలలుకాక అంతకంటే తక్కువ కాలము మాత్రమే పనిచేసినట్లయితే వారిని ఉపముఖ్యపని వారలుగా పరిగణిస్తారు. గత యేడాదిలో యే పనిచేయని వారిని ఆ విధంగానే పరిగణిస్తారు. యే పనిచేయని వారిలో యింటి పనిచేసే వారిని

(H), విద్యార్థులు (St), ఇతరుల మీద ఆధారపడేవారు (D), పదవీ విరమణ చేసేవారు (R), ముష్టివారు(B), ఆస్పత్రులలో, ధర్మసత్రాలలోనున్నవారు (I), ఇతరులు (O) గా విభజించారు. పనివారలను వ్యవసాయదారులు (C), వ్యవసాయ కూలీలు (AL), కుటీర పరిశ్రమలలో పనిచేసేవారు (HH), ఇతర పనివారు (OW) గా విభజించారు.

సేకరించిన జనాభా వివరాలను మరల పరిశీలించి సరిచేయడం చాలా అవసరము. దీనినే వివరాంతర పరిశీలన (post-enumeration check) అంటారు. ఈ పద్ధతి 1951 నుంచి అమలులోనుంది. వదలివేసిన, లేక రెండుసార్లు సేకరించిన జనాభా వివరాలను సరిచేస్తారు. 1981 వ సంవత్సరంలో వదిలి వేసిన జనాభా ప్రతి వెయ్యి మందికి 17.95గా గుర్తించారు. అలాగే వ్యక్తి చెప్పిన వయస్సులో మున్నతప్పులు సరి చేయడం కూడా జరిగింది.

1991లో తీసుకొచ్చిన యితర మార్పులు

1991వ సెన్సస్‌లో ప్రత్యేకంగా కొన్ని మార్పులు తీసుకొచ్చారు. అవి క్రింది విధంగానున్నాయి.

(1) ఇండ్ల పట్టిక (House Listing) వివరాలు సేకరిస్తున్నప్పుడు, యింట్లోనున్న సౌకర్యాల వివరాలను సేకరించారు. ఈ వివరాలు 1981 లో వ్యక్తి కుటుంబ వివరాలతోపాటు సేకరించారు. అంతేగాక, ఈ వివరాలను 6 - 10 నెలల ముందు సేకరించడం వల్ల, వాటిని ముందుగా ప్రకటించడానికి వీలవుతుంది.

(2) ఇండ్ల పట్టిక తయారు చేస్తున్నప్పుడు, యింట్లో ఏ రకమైన ఇంధనం (వంట చెరుకు / కిరోసిన్ /LPG) వాడుతున్నారో కూడా సేకరించారు. ఈ వివరాలు మొట్ట మొదటిసారిగా సేకరిస్తున్నారు. దీనివల్ల వాతావరణ సమతౌల్యానికి తగిన చర్యలు, వేరే యింధనాలను సమీకరించడానికి తగు ప్రణాళికలు తయారు చేయడానికి వీలవుతుంది.

(3) 1981వ సెన్సస్‌లో పట్టణ ప్రాంతాలలో మాత్రమే మరుగు దొడ్డి వివరాలను సేకరించారు. కాని 1991 లో గ్రామ ప్రాంతాలలో కూడా ఈ వివరాలను సేకరించడం జరిగింది.

(4) కుటుంబ పట్టిక (household schedule) లోనే కుటుంబ సభ్యుల మాతృభాష, మతము వివరాలను సేకరించారు. ఈ వివరాలను త్వరగా ప్రచురించడానికి చేతితోనే టాబ్యులేషన్ (manual tabulation) చేసి, గ్రామం, పట్టణ వార్డు వరకు యివ్వడానికి యేర్పాటు చేశారు.

(5) 1991 వ సెన్సస్‌లో మాజీ సైనికోద్యోగుల వివరాల సేకరించడం కొత్తగా చేపట్టారు. వీరి హోదా, పించనుదారుడా కాదా మొదలయిన వివరాలను సేకరించారు. ఈ ప్రశ్న వ్యక్తి చీటిలో ఉంది.

(6) 1981 వ సెన్సస్‌లో, 0 - 4 సంవత్సరాలు వయస్సు గల పిల్లలను నిరక్షరాస్యులుగా పరిగణించారు. మానవ వనరుల మంత్రిత్వ శాఖ ఆదేశాల మేరకు 0 - 6 సంవత్సరములు వయస్సు గల పిల్లలకు 1991 సెన్సస్‌లో నిరక్షరాస్యులుగానే పరిగణించడం జరిగింది. గ్రామ ప్రాంతాలలో పిల్లలు ఆలస్యంగా పాఠశాలకు వెళ్లడం, చదవడం వ్రాయడం యేడవ సంవత్సరం వరకూ రాకపోవడం యిందుకు కారణమైంది.

(7) ప్రతి సెన్సస్‌లో " పని " గురించిన నిర్వచనం మీద చాలా తర్జన భర్జనలు జరుగుతుంటాయి. 1971వ సెన్సస్‌లో " పని " నిర్వచనం మారడంతో, మిగత సెన్సస్‌తో పోలికకు వీలులేకుండా పోయింది. అందుచేత 1981వ పని నిర్వచనాన్నే వాడుతూ, ఎన్యూమరేటర్లకు ప్రత్యేక ఆదేశాలనివ్వడం జరిగింది. ముఖ్యంగా స్త్రీలు, పిల్లల పని వివరాలు సేకరించేటపుడు ప్రత్యేక శ్రద్ధ చూపవలసిందిగా కోరారు. జాతీయ,

BRAOU

అంతర్జాతీయ స్త్రీ హక్కుల పోరాట సమితుల విన్నపాలను దృష్టిలో నుంచుకొని యీ ప్రత్యేక శ్రద్ధను చూపించడం జరిగింది.

(8) 1981వ సెన్సస్ లో వ్యక్తుల ఆర్థిక పరమైన పని (economic activity) వివరాలను 20 శాతం శాంపుల్ పద్ధతిలో టాబ్యులేషన్ చేశారు. కాని ఈ సారి చీటి నుంచి నేరుగా అందరి పని వివరాలను టాబ్యులేట్ చేయాలని నిర్ణయించారు.

(9) 1981వ సెన్సస్ మాదిరిగానే పనిచేయగోరే వ్యక్తుల (seeking / available to work) వివరాలను యే పనిచేయని వారి నుంచి (non-worker), అంతంత మాత్రము పనిచేస్తున్న వారి నుంచి (marginal workers) మాత్రమే సేకరించారు. అయితే పని చేయగోరే వ్యక్తుల నుంచి, యింతకు ముందు యేమైన పని చేసిందీ, లేనిదీ కూడా తెలుసుకోవడం 1991 సెన్సస్‌లోని విశేషము. దీనివల్ల శ్రామికుల సంఖ్యలోకి చేరిన క్రొత్త వ్యక్తుల సంఖ్య తెలుస్తుంది.

(10) వలసపోయే వారి వివరాలు సేకరించేటపుడు, అందుకు కారణాలలో మరో రెండు కారణాలను 1991లో చేర్చారు. అవి వ్యాపార రీత్యా వలస పోవడం, ప్రకృతి వైపరీత్యాల మూలంగా వలస పోవడం.

27.6.4 మన జనాభా గణన - ఒక విమర్శనాత్మక పరిశీలన

భారతదేశంలాంటి సువిశాలదేశంలో, అత్యధిక శాతం నిరక్షరాస్యులున్న దేశంలో, విభిన్నమతాలు, కులాలు, భాషలున్న దేశంలో జనాభా వివరాలను సేకరించడం అతి కష్టతరమైన విషయం. ఉదాహరణకు జమ్మూ, కాశ్మీరు, అస్సాం మొదలగు రాష్ట్రాలలో, మిగతా దేశంలో జనాభా వివరాలను సేకరించే కాలంలోనే జరగడం అరుదు. అలాగే వ్యక్తిగత వివరాలు సేకరించేటపుడు, చాలా మంది గణకులకు సహకరించరు. అంతేగాక, సంస్థాపరంగా కూడా సెన్సస్ వ్యవస్థలో చాలా మార్పులు తేవడం చాలా ముఖ్యము. జనాభా శాస్త్ర వేత్తలు కొంతమంది, పూర్తి సెన్సస్ నుంచి శాంపుల్ పద్ధతిలో జనాభా వివరాలను సేకరించడం ఎంతో ఉత్తమమని అభిప్రాయ పడుతున్నారు. ప్రస్తుతమున్న పద్ధతిలోని కొన్ని లోటుపాట్లను కొన్ని క్రింద వివరించడం జరిగింది.

(1) సెన్సస్ వ్యవస్థకు ప్రత్యేక విభాగము లేదు. ప్రతి సెన్సస్‌లోను పాఠశాల ఉపాధ్యాయులను, రాష్ట్ర ఉద్యోగులను, గణకులుగాను, పర్యవేక్షకులుగాను నియమించడం వల్ల, వారిలో జనాభా వివరాల పట్ల ప్రత్యేక శ్రద్ధ లేక పోవడంవల్ల, ఎన్నో యిబ్బందులున్నాయి.

(2) జనాభాలో అత్యధిక శాతం నిరక్షరాస్యులవడంవల్ల వారు ఎన్యూమరేటర్లకు సరైన వివరాలందివ్వడంలో విఫలమవుతున్నారు. కొంతమంది తప్పుడు వివరాలను కూడా యివ్వడం జరుగుతుంది. ముఖ్యంగా వయస్సు చెప్పడంలో చాలా మంది పొరపాటు పడుతుంటారు. 43 సంవత్సరాలకు 40 సంవత్సరాలని, 28 సంవత్సరాలకు 30 అని చెప్పడాన్ని సంఖ్యల ఎంపిక (digital preference) అని అంటారు. ఇందులో స్త్రీ పురుషులలో పిల్లలు, వృద్ధులలో వ్యత్యాసాలు కూడా ఉంటాయి.

(3) పట్టణాలలో యిండ్ల నంబర్లు సరిగా లేనందువల్ల కొన్ని యిండ్లు, కుటుంబాలను గణకులు వదలి వేయడం జరుగుతుంది.

(4) కొన్ని మతాలలో స్త్రీలు పరదా వేయడం, మగ ఎన్యూమరేటర్లే ఎక్కువమంది ఉండటం వల్ల స్త్రీల వివరాలు సేకరించడంలో కొన్ని యిబ్బందులెదురవుతున్నాయి.

BRAOU

(5) ఎన్యూమరేటర్లకు గౌరవ వేతనము అతి తక్కువ. ఇండ్ల పట్టికకు రూ. 100లు. ముఖ్యమైన ఎన్యూమరేషన్‌కు రూ. 225లు, వాణిజ్య సంస్థల పట్టిక తయారు చేయడానికి రూ. 50లు, ఉన్నత విద్యా వివరాలు సేకరించే చీటిని పంచడానికి తిరిగి తీసుకోవడానికి గాను, రూ. 15లు చెల్లిస్తారు. క్లాసులకు వచ్చేటప్పుడు కూడా గౌరవవేతనమిస్తారు.

(6) చాలా రకాలైన ముఖ్యమైన పట్టికలు శాంపుల్ మీద ఆధారపడి తయారు చేస్తున్నారు. ఈవిధంగా చేయడం వల్ల సెన్సస్ యొక్క ప్రాముఖ్యత తగ్గినట్లే.

(7) ప్రతి సెన్సస్‌లో యేదో రకమైన మార్పులు తేవడంతో, పాత సెన్సస్ వివరాలతో పోల్చడానికి కొన్ని యిబ్బందులెదురవుతున్నాయి.

(8) సెన్సస్‌లో అతి ముఖ్యమైన వివరాలను మాత్రమే సేకరించాలి గాని, అన్ని రకాలైన ప్రశ్నలను అడిగి ప్రజలను విసిగించడం వల్ల వచ్చే సమాచారము సరిగా రాదు. అంచేత సెన్సస్ పరిధిని సాధ్యమైనంత వరకు పరిమితంగా ఉంచటం మంచిది.

(9) జనాభా వివరాలను ప్రచురించడం చాలా ఆలస్యం జరుగుతోంది. నిజానికి 1981 సెన్సస్ వివరాలన్నీ పూర్తిగా యిప్పటికీ ప్రచురితమవలేదు.

1991 సెన్సస్ ప్రాధమిక వివరాలు యిప్పుడిప్పుడే ప్రచురితమవుతున్నాయి. వీటిలో కొన్నింటిని పట్టిక -1లో పొందుపరచాము. 1991లో జనాభా 843.9 మిలియన్లు. జనాభా పెరుగుదల రేటు 23.5 శాతం. ప్రతి వెయ్యిమంది పురుషులకు 929 మంది స్త్రీలు. అక్షరాశ్యత 52.11 శాతం. జనసాంద్రత ప్రతి చ॥ కి॥ మీ॥ కు 267 మంది.

పైన పేర్కొన్న వివరాలను గత సెన్సస్ వివరాలకు పోల్చి చూస్తే కొన్ని ముఖ్యమైన మార్పులు కల్పిస్తున్నాయి. జనాభా పెరుగుదల రేటు 1981 వరకూ పెరుగుతూ వచ్చి, 1991లో 25 శాతం నుంచి 23.5 శాతానికి తగ్గింది. ఇదొక శుభ సూచకము. అలాగే స్త్రీ, పురుష నిష్పత్తి 1971లో 932 నుంచి 1981లో 933 కు పెరిగి మరల 1991 లో 929కు తగ్గటము కొంత ఆశ్చర్యకరంగా వుంది. సాంఘిక - ఆర్థిక పురోభివృద్ధి జరుగుతున్నప్పుడు స్త్రీ - పురుష నిష్పత్తి పెరుగుతూండాలి. ఇక అక్షరాశ్యత రేటు చూస్తే గణనీయంగా పెరిగింది. 1981లో 36.2 శాతం వున్న అక్షరాశ్యత రేటు 1991లో 52.11 శాతానికి పెరిగింది. అయితే, 1991లో 0 -6 వయస్సు గల పిల్లలను వదలి అక్షరాశ్యత రేటును కట్టారు. 1981లో 0 - 4 వయస్సు గల పిల్లలను మాత్రమే వదలారు. అందువల్ల, అక్షరాశ్యత రేటు పెరిగే అవకాశముంది. జనసాంద్రత గణనీయంగా పెరిగింది. 1981లో ప్రతి చ॥ కి. మీ. 216 మంది ఉండగా 1991లో 267కు పెరిగింది.

BRAOU

పట్టిక - I

1961, 71, 81, 91 సెన్సస్ నుంచి కొన్ని ముఖ్యమైన భారతదేశ జనాభా వివరాలు

వరుస నంబరు	అంశము	1961	1971	1981	1991
1.	జనాభా (మిలియన్లలో)	439.1	547.4	685.0	846.3
2.	జనాభా పెరుగుదల రేటు (%)	21.5	24.8	25.0	23.5
3.	స్త్రీ పురుష నిష్పత్తి (ప్రతి 1000 మంది మగవారికి)	941	932	933	929
4.	గ్రామీణ జనాభా (%)	82	80.01	76.7	74.29
5.	పట్టణ జనాభా (%)	18	19.09	23.3	25.71
6.	అక్షరాశ్యత (%)	24	29.05	36.2*	52.11**
7.	జనసాంద్రత (చ ॥ కి॥ మీ ॥ జనాభా)	141	178	216	267
8.	వ్యవసాయ దారులు (% in total workers)	52.08	43.03	41.6	38.72
9.	వ్యవసాయ కూలీలు(-do)	16.07	26.03	24.9	26.09
10.	పారిశ్రామికులు (-do)	10.06	9.00	11.3	17.49
11.	వ్యాపార, వాణిజ్య సంస్థల లో పనిచేసే వారు (%)(-do)	4.01	5.03	6.3	7.45
12.	ఇతర పనివారు (%) (-do)	15.08	15.03	15.9	10.25

* అస్సాం, జమ్మూ కాశ్మీరులను మినహాయించి

* 0 - 6 వయస్సు పిల్లలను వదలి.

మూలము : భారతదేశ జనాభా గణన, 1961, 1971, 1981, 1991, పార్టు II - A; వరుస సంఖ్య 10.

27.7 జీవ గణాంకాలు (Vital Statistics)

జీవ గణాంకాలు అనగా జనన, మరణాలు, పెండ్లి, విడాకులకు సంబంధించిన వివరాలు. ఈ వివరాలను నమోదు చేసే పద్ధతి అన్ని దేశాలలోనూ అమలులోనున్నది. జీవ గణాంకాల ఉపయోగము జనాభా శాస్త్ర అధ్యయనములోనే కాక న్యాయ, ప్రజారోగ్య, జీవిత భీమా, వైద్య పరిశోధన రంగాలలో కూడా ఎంతో ఉన్నది.

జీవ గణాంకాలను, ఇతర జనాభా గణాంకాల మాదిరిగానే సమకూర్చ వచ్చినప్పటికీ, వాటికున్న ప్రాముఖ్యత దృష్ట్యా, నిర్బంధ (తప్పనిసరి) నమోదు (compulsory registration) పద్ధతి ద్వారానే అనేక దేశాలలో యీ వివరాలను సమకూర్చుతున్నారు. ఈ తప్పనిసరి నమోదు పద్ధతిలో కొన్ని ఉపయోగ, నిరుపయోగా లున్నాయి. నమోదు చేసే పద్ధతి వలన, నమోదు చేసే అధికారి ఘటన జరిగిన కొద్ది కాలంలోనే దానిని నమోదు చేయడం జరుగుతుంది కాబట్టి యీ వివరాలు పూర్తిగాను, నమ్మదగ్గవిగాను ఉండే అవకాశాలు ఎక్కువ. అలాకాకుండా, సర్వేచేసినట్లయితే, జ్ఞప్తికి రాకనో లేక ఎన్యూమరేటరు సరిగా ప్రశ్న అడగకపోవడం మూలానో, ఎన్నో ఘటనలు విడిచిపెట్టేయడం జరగవచ్చు. కాని చాలా దేశాలలో యీ నమోదు పద్ధతిలో ఉపయోగాలకంటే నిరుపయోగాలే ఎక్కువగా కనబడుతూ ఉన్నాయి. నిజానికి నమోదుచేసే అధికారుల నిర్లక్ష్యవైఖరి వలన, యీ పద్ధతిలో ఎంతో మంది ఉద్యోగుల సహాయ సహకారాలవసరముండటం వలన జనన మరణాల నమోదు తప్పని సరియని ఒక చట్టాన్ని ప్రవేశ పెట్టడంతో భారతదేశంలో ఆ అధికారుల మధ్య సంయమనము లేకపోవడం వలన వీరు నమోదు చేసే వివరాలు చాలా వరకు అసంపూర్ణ అంచనాలు గానే మిగిలిపోతున్నాయి.

భారతదేశంలో జీవ గణాంకాలను నమోదుచేసే పద్ధతిని మొట్ట మొదటిసారిగా క్రీ ॥ శ ॥ 1873 లో బ్రిటిష్ వారు " బెంగాలు జనన మరణాల నమోదు చట్టము " తో ప్రారంభించారు. ఈ చట్టాన్ని క్రీ ॥ శ ॥ 1886లో బీహారు, ఒరిస్సా ప్రాంతాలకు విస్తరించారు. దీనిని జననాల, మరణాల, వివాహాల నమోదు చట్టంగా రూపొందించారు. క్రీ ॥ శ ॥ 1903 సం ॥ నాటికి యీ చట్టాన్ని భారతదేశంలో 80 శాతం జనాభాకు విస్తరించడం జరిగింది. 1956 సం ॥ నాటికి భారతదేశం అంతటికీ విస్తరించారు. 1969వ సంవత్సరంలో భారత ప్రభుత్వం జనన మరణాల తప్పనిసరియని ఒక చట్టాన్ని ప్రవేశ పెట్టడంతో భారతదేశంలో జనన, మరణాల నమోదుకు నిరాకరించిన వారిని శిక్షార్హులుగా ప్రకటించడం జరిగింది. అయితే, యీ చట్టాన్ని సక్రమంగా అమలు జరిపే యంత్రాంగం లేకపోవడం వలన, ప్రజలు చైతన్యవంతులు కాకపోవడం వలన, మనదేశంలో యీ జీవగణాంకాలు యిప్పటికీ అసంపూర్ణంగానే ఉండిపోయాయి. ఈ కారణంగా, భారత ప్రభుత్వం ప్రత్యామ్నాయ జనన, మరణ నమోదు పద్ధతిని ప్రవేశపెట్టింది. అదే శాంపిల్ నమోదు పద్ధతి (sample registration system).

27.7.1 శాంపిల్ నమోదు పద్ధతి (Sample Registration System)

అభివృద్ధి ప్రణాళికలు తయారు చేయడానికి జనన, మరణాలు ఎంతో అవసరము. వీటి అవసరాన్ని గుర్తించిన భారత ప్రభుత్వము ఖచ్చితమైన జనన, మరణాలు కనుగొనేందుకు శాంపిల్ నమోదు పద్ధతిని 1964 - 65లో ప్రవేశపెట్టింది. ఈ పద్ధతి ప్రకారం, కొన్ని గ్రామీణ, పట్టణ ప్రాంత వార్డులను శాస్త్రీయ పద్ధతిలో శాంపిల్ తీస్తారు. ఈ ప్రాంతాలలో నమోదు చేసిన జనన మరణాల నుంచి రాష్ట్రాల వారి జనన, మరణ రేట్లను అంచనా వేస్తారు. ఇందుకోసం, ద్వంద్వ రికార్డుల పద్ధతిని అవలంబిస్తున్నారు. ఈ పద్ధతి ప్రకారం, ఎన్నిక చేసిన ప్రాంతాలలో పనిచేసే, నివసించే ఒక ఉద్యోగిని గుర్తించి, ఆ ప్రాంతంలో జరిగే జనన, మరణాలను విడవకుండా వరుసగా నమోదు చేయమని ఆదేశించారు. ఆ ఉద్యోగికి నెలవారీ రూ. 50లు గౌరవ వేతనాన్ని యిస్తారు. ఈ ఎన్నిక చేసిన ప్రాంతాలలో, ఆరు నెలలకొకసారి తర్ఫీదు పొందిన నిపుణుడు "పునర్విమర్శ సర్వే" (retrospective survey) జరుపుతాడు. మొదటి రికార్డు, రెండో సర్వే రికార్డులు రెండింటిని పోల్చి చూస్తారు. ఏవైనా తేడాలుంటే, ఆ యిద్దరు ఆ ప్రాంతాలను మరల పర్యటించి వాటిని సరిచేస్తారు. ప్రస్తుతం మనదేశంలో మరియు రాష్ట్రాలలో ప్రచురితమైన జనన, మరణ రేట్లు యీ శాంపిల్ నమోదు పద్ధతిలో అంచనాలే. వీటికి, ప్రపంచం మొత్తం మీద మంచి గుర్తింపు లభించింది. ఈ అంచనాలు చాలా వరకు నమ్మదగ్గవేనని దాదాపు అందరు జనాభా శాస్త్ర వేత్తలు అభిప్రాయపడుతున్నారు. అయితే, ఈ శాంపిల్ పద్ధతిలో జిల్లాల వారిగా జనన, మరణ రేట్లను కనుగొనడానికి

BRAOU

వీలుకాదు, ఎందుచేతనంటే శాంపిల్ తీసుకొనేటపుడు జిల్లాలను యూనిట్లుగా తీసుకోలేదు ; ప్రాంతాలను మాత్రమే తీసుకున్నారు.

శాంపిల్ నమోదు పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేసిన భారతదేశ జననాల రేటు, మరణాలరేటు, శిశుమరణాల రేట్లను (1970 - 89) పట్టిక - II లో చూపాం. జననాల రేటు 1970లో ప్రతి వెయ్యి మంది జనాభాకు 36.8 జననాలు ఉండగా 1989 నాటికి 30.5కు తగ్గింది. అలాగే ప్రతి వెయ్యిమంది జనాభాకు 1970లో 15.7 మరణాలు, 1989 నాటికి 10.2 కు తగ్గడం, శిశుమరణాల రేటు 1970లో ప్రతి వెయ్యి జననాలకు 129 శిశుమరణాలు (యేడాదిలోపు మరణాలు) ఉండగా అది 1989 నాటికి 91కి తగ్గింది. ఈవిధంగా మన దేశంలో కూడా జనాభా పరిణామము జరుగుతున్నట్లు (demographic transition) గా గుర్తించాలి. అలాగే పట్టిక - III లో రాష్ట్రాల వారీగా జనన, మరణాల రేట్లను యిచ్చాం. ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రంలో జనన, మరణ రేట్లు భారతదేశ మొత్తానికంటె తక్కువగా ఉండటం గమనార్హము.

27.7.2 కొన్ని ముఖ్య జీవగణాంకాల నిర్వచనాలు

జీవ గణాంకాలలోని కొన్ని ముఖ్య నిర్వచనాలు యిపుడు తెలుసుకుంటారు.

(i) ముడి జననాల రేటు (Crude Birth Rate) (C BR)

$$CBR = \frac{B}{P} \times 1000$$

ఇందులో B = ఒక ప్రాంతంలో ఒక యేడాదిలో జరిగిన సజీవ జననాల (live births) సంఖ్య

P = ఆ ప్రాంత మధ్యస్థ జనాభా (mid - year population)

(ii) ముడి మరణాల రేటు (Crude Death Rate) (C D R)

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

ఇందులో D = ఒక ప్రాంతంలో ఒక యేడాదిలో జరిగిన మరణాల సంఖ్య

P = ఆ ప్రాంత మధ్యస్థ జనాభా

(iii) శిశుమరణాల రేటు (Intant Morality Rate) (IMR)

$$1MR = \frac{Do}{B} \times 1000$$

ఇందులో Do = ఒక ప్రాంతంలో ఒక యేడాదిలో శిశుమరణాల (12 నెలల వయస్సులోపు) సంఖ్య

B = సజీవ జననాల సంఖ్య

(iv) వయో నిర్దిష్ట మరణాల రేటు (Age - Specific Death Rate) (ASDR)

$$ASDR_i = \frac{Di}{Pi} \times 1000$$

ఇందులో $ASDR_i$ = i వ వయస్సులో సంభవించిన మరణాల రేటు

B R A O U

D_i = i వయస్సులో సంభవించిన మరణాల సంఖ్య

P_i = i వయస్సులో గల జనసంఖ్య .

(V) వయో నిర్ణీత సారవత్వపు రేటు (Age - Specific Fertility Rate) (ASFR)

$$ASFRI_i = \frac{B_i}{F_i} x1000$$

ఇందులో $ASFR_i$ = i వయస్సులో గల స్త్రీలకు కలిగిన జననాల రేటు

B_i = i వయస్సులో గల స్త్రీలకు కలిగిన సజీవ జననాల సంఖ్య

F_i = పునరుత్పాదక వయస్సు (15 - 45 సం॥ల మధ్య) లోని స్త్రీలలో i వయస్సు కలిగిన స్త్రీల సంఖ్య.

(vi) మొత్తం సారవత్వపురేటు (Total Fertility Rate) (TFR)

$$TFR = K . \sum_{i=15}^{49} \frac{B_i}{F_i} x\ 1000$$

ఇందులో K = వయోనిడివి (సామాన్యంగా K=5 తీసుకుంటారు అంటే 15 - 19, 20 -24, 25–29, . . .)

Bi, Fi లు పైన చెప్పిన మాదిరే.

(vii) స్థూల పునరుత్పాదన రేటు (Gross Reproduction Rate) GRR

$$GRR = 5 . \sum_{i=15}^{49} \frac{fB_i}{fP_i} x\ 1000$$

ఇందులో fBi = i వ తరగతి వయస్సులో గల స్త్రీలకు కలిగిన ఆడపిల్లల సంఖ్య

fP_i వ తరగతి సం॥నకు చెందిన స్త్రీల సంఖ్య

ఈ పునరుత్పాదన రేటులో, స్త్రీ శిశు జననాల సంఖ్యను, పునరుత్పాదక వయస్సులో గల స్త్రీల సంఖ్యతో పోల్చి చూస్తారు.

(viii) నికర పునరుత్పాదన రేటు (Net Reproduction Rate) (NRR)

GRR లో అకాల మరణ కారకాన్ని (mortality factor) పరిగణనలోకి తీసుకోలేరు. అనగా స్త్రీ శిశు జననాల సంఖ్య క్రమేపి మరణాల మూలంగా తగ్గుతూ వస్తుంది. పునరుత్పాదక వయస్సు (15 సం ॥ లు) వచ్చే సరికి కొంత మంది బాలికలు చనిపోతారు. అందుచేత స్థూల పునరుత్పాదన రేటుకంటె నికర పునరుత్పాదన రేటు ఎక్కువగా ఉంటుంది.

$$NRR = 5 . \sum_{i=15}^{49} \frac{fB_i}{fP_i} \left(\frac{Li}{Lo}\right) x\ 1000$$

ఇందులో $\frac{Li}{Lo}$ అవశేష కారకము అంటారు. Li, Lo లు జీవన పట్టికల (life table) నుంచి గ్రహిస్తారు.

fBi, fPi లు పైన చెప్పిన మాదిరే.

NRR =1 అయితే, జనాభాలోనున్న స్త్రీల సంఖ్యకు జన్మించిన స్త్రీ శిశువులు తిరిగి భర్తీ చేసేటట్లు జనన, మరణ పరిస్థితులున్నాయని తెలుస్తుంది.

B R A O U

పట్టిక - II : భారతదేశ జీవ గణాంకాలు (1970 - 89)

(శాంపిల్ నమోదు పద్ధతి)

సంవత్సరము	జననాల రేటు (CBR)	మరణాలరేటు (CDR)	శిశుమరణాలరేటు (IMR)
1970	36.8	15.7	129
1971	36.9	14.9	129
1972	36.6	16.9	139
1973	34.6	15.5	134
1974	34.5	14.5	126
1975	35.2	15.9	140
1976	34.4	15.0	129
1977	33.0	14.7	130
1978	33.3	14.2	12.7
1979	33.7	13.0	120
1980	33.7	12.6	114
1981	33.9	12.5	110
1982	33.8	11.9	105
1983	33.7	11.9	105
1984	33.9	12.6	104
1985	32.9	11.8	97
1986	32.6	11.1	96
1987	32.2	10.9	95
1988	31.5	11.0	94
1989	30.5	10.2	91

మూలము : రిజిస్ట్రార్ జనరల్, ఇండియా - శాంపిల్ నమోదు పద్ధతి (SRS)

B R A O U

ప్ర 3. భారతదేశ సెన్సస్ వివరణ తేదీ యేది ? అందులో యేదైనా మార్పు ఉందా ?

జ. భారతదేశ సెన్సస్ ఎప్పుడూ మార్చి ఒకటిగానే ఉంది. కాని 1971వ సెన్సస్ మాత్రము సాధారణ ఎన్నికల మూలంగా ఏప్రిల్ ఒకటికి తేదీ మార్చారు.

27.10 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

1 స్వాతంత్ర్యానంతరము జనాభా వివరాల గురించి వ్రాయండి ?

2 స్వాతంత్ర్యానికి ముందు జనాభా వివరాల గురించి వ్రాయండి.

3 1991 సెన్సస్‌లో తీసుకు వచ్చిన మార్పులు తెలుపండి ?

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. సెన్సస్ పద్ధతికి, శాంపుల్ పద్ధతికి గల తేడా యేమిటి ?

2. జనాభా గణాంకాల వల్ల ఉపయోగాలేమిటి ?

2 భారత జనాభా గణనలోని కొన్ని ముఖ్య లోపాలను తెలపండి.

4. భారతదేశంలో శాంపుల్ నమోదు పద్ధతి గురించి వివరించండి.

27.11 చదువవలసిన పుస్తకాలు

1. Srivastava. S.C. - Indian Census in Perspective, Census Centenary Monograph No.1, Census of India, 1971, New Delhi.
2. U.N. - Hand Book of Vital Statistics Methods.
3. Asha A. Bhende and Tara Kanitkar - Principles of Population Studies, Himalaya Publishing House (Second Edition) 1982.
4. Srivastava. S.C. - Studies in Demography, Jai Prakash Nath & co. Second Edition (1988)
5. Ramachandrudu, G - Demographic Methods (1991) A.U. Press & Publications.

27.12 సంప్రదించు గ్రంథాలు

1. Census of India, 1991 - Summary Proceedings of the First Data User's Conference (April 18 -20, 1988), New Delhi, Office of the Registrar General, India.
2. Indian Association for the Study of Population - Contributory Papers of the Thirteenth Annual Conference, 21-23 Dec. 1988, Andhra University.
3. Barclay, G.W .- Techniques of Population Analysis, Willey, New York, 1958.
4. Census of India, 1991 - Provisional Population Totals, Paper - I of 1991.
5. Ashok Mitra - " The Census of India " in Indian Census - (1872 - 1951) : A Check list and Index, Basic Collections in Micro - Edition, Iner Documentation Co - A.G. Zug. (Switzerland, 1966)

BRAOU

27.13 పదకోశం

Census and Sample	పూర్తి జనాభా గణన, శాంపుల్ జనాభా గణన
De facto & De jure methods	వాస్తవిక జనాభా గణన, న్యాయ సమ్మత జనాభా గణన
Universality	సాధారణత
Simultaneity	ఏక కాల పరిశీలన
Worker definition	పని నిర్వచనము
House List	ఇండ్ల పట్టిక
Household Schedule	కుటుంబ పట్టి
Individual slip	వ్యక్తి చీటి
Post - enumeration check	వివరాంతర పరిశీలన
Census	గణన
Infant mortality	బాల మరణాలు
De facto	వాస్తవిక
De jure	న్యాయ సమ్మత
Chulha	పొయ్యి
Displaced persons	కాందిశీకులు
Code	సంకేతము
Supervison	పర్యవేక్షకుడు
Fairs	సంతలు
Festivals	పండుగలు
Establishment schedule	సంస్థల పట్టి
Provisional results	ప్రాథమిక ఫలితాలు
Main worker	ముఖ్య పనివారు
Fertility survey	శిశు జననాల కొలత
Questionnaire	ప్రశ్నావళి
Enumerator	గణకుడు
Digital preference	సంఖ్యల ఎంపిక
S R S - Sample Registration System	శాంపుల్ నమోదు పద్ధతి

- ఆచార్య జి. రామచంద్రుడు

BRAOU

భాగం - 28 : జాతీయ నమూనా సర్వే

విషయక్రమం

28.0 ఉద్దేశాలు

28.1 పరిచయం

28.2 పూర్తి సేకరణ మరియు నమూనా సర్వే

28.3 జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ స్థాపన

28.4 జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ పునర్వ్యవస్థీకరణ

28.5 జాతీయ నమూనా సంస్థ విధులు

28.6 సర్వే చేసే పద్ధతి

- 28.6.1 విచారణ చేసే యూనిట్ ఎంపిక
- 28.6.2 సర్వే రూప కల్పన
- 28.6.3 సర్వే నిర్వహణ
- 28.6.4 రాష్ట్రాల ప్రాతినిధ్యం
- 28.6.5 నమూనా పద్ధతి, ప్రశ్నావళి, పట్టికీకరణ

28.7 విషయ పరిధి

- 28.7.1 వినియుగ వ్యయం
- 28.7.2 జనాభా, జనన మరణాలు
- 28.7.3 ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత
- 28.7.4 భూముల వినియోగం, పంటకోత ప్రయోగాలు
- 28.7.5 ధరల గణాంకాలు
- 28.7.6 పట్టణ చట్రపు సర్వే
- 28.7.7 భూ కమతా సర్వే

28.8 జాతీయ నమూనా సర్వే 47వ రౌండు విపుల వివరణ

- 28.8.1 నమూనా పరిమాణం

BRAOU

28.8.2 నమూనా పద్ధతి

28.8.3 అంచనా విధానం

28.8.4 వినియోగ వ్యయం సర్వే

28.8.5 వినియోగ వ్యయం సర్వే ముఖ్య ఫలితాలు

28.8.6 ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వే

28.8.7 ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వే ముఖ్య ఫలితాలు

28.9 సారాంశము

28.10 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

28.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

28.12 పదకోశం

28.0 ఉద్దేశాలు

జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ స్థాపన, పునర్వ్యవస్థీకరణ విధులు, ఇది చేపట్టే సర్వేలలోని వివిధ విషయాలను పరిశీలించడం ఈ భాగం ముఖ్యోద్దేశం. అంతేగాక ఈ సంస్థ నిర్వహించిన 47వ విడత (round) సర్వే వివరాలను చర్చించి ముఖ్య ఫలితాలను తెలుసుకోవడం కూడా ఈ భాగం ముఖ్యోద్దేశం.

28.1 పరిచయం

భారతదేశపు సాంఘిక, ఆర్థిక పరిస్థితులను అవగాహన చేసుకోవడానికి ఎన్నో గణాంకాలు కావాలి. వీటి సేకరణ రెండు విధాలుగా ఉంటుంది. మొదటి పద్ధతిలో అధ్యయనానికి సంబంధించిన అన్నియూనిట్ల నుండి సమాచారాన్ని సేకరించడం జరుగుతుంది. దీన్ని పూర్తి సేకరణ పద్ధతి (census method) అంటాం. ఉదాహరణకు భారతదేశపు జనాభా లెక్కలను ఈ పద్ధతిలో సేకరిస్తాము. దీనివల్ల కొన్ని ప్రయోజనాలున్నప్పటికీ ఇది వ్యయ ప్రయాసాలతో కూడినది. అంతేకాక, ప్రతి యూనిట్ నుండి తక్కువ సమాచారాన్ని మాత్రమే సేకరించవలసి వచ్చినప్పుడు ఈ పద్ధతి అనుకూలంగా ఉంటుంది. రెండవ పద్ధతిలో అన్ని యూనిట్లను తీసుకోకుండా శాస్త్రీయ పద్ధతిలో కొన్ని నమూనాలను ఎంచుకుని వీటి నుంచి మాత్రమే గణాంకాలను సేకరిస్తాం. దానిని నమూనా పద్ధతి (sample method) అంటాం. ఈ పద్ధతిలో ఒక అంశానికి సంబంధించిన సమాచారాన్ని విపులంగా సేకరించడానికి వీలవుతుంది. తక్కువ వ్యయంతో కావలసిన సమాచారాన్నంతటినీ పొందగలం. నమూనా పద్ధతిలో గణాంక సేకరణకు భారత ప్రభుత్వం ఒక ప్రత్యేక సంస్థను ఏర్పరచింది. దీనినే జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ అంటారు. ఈ సంస్థ స్థాపన, కార్యకలాపాలు, ఇది సేకరిస్తున్న గణాంకాల స్వభావం ఈ భాగంలో చర్చిద్దాం. ముందుగా పూర్తి సేకరణ మరియు నమూనా సర్వేలను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

28.2. పూర్తి సేకరణ మరియు నమూనా సర్వేలు (Census and Sampling Surveys)

ప్రస్తుతం అమల్లో వున్న గణాంక వివరాల లోపాలను సవరించడానికి జాతీయదాయ కమిటీ

యాదృచ్ఛిక నమూనా (random sampling) పద్ధతిని సిఫార్సు చేసింది. ఇది నూతన పద్ధతి కాదు. దైనందిన జీవితంలో పూర్తి సమాచార సేకరణ వీలుకానప్పుడు నమూనా తీసుకునే పద్ధతిని అనుసరిస్తాం. వాస్తవంలో అనుసరణకు యాదృచ్ఛిక నమూనా పద్ధతి చాలా అనుకూలంగా, సమర్థవంతంగా ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిని సులువుగా, వేగంగా, సంతృప్తికరంగా అనుసరించడానికి వీలుంటుంది.

పూర్తి సేకరణ పద్ధతిలో అన్ని యూనిట్ల నుండి సమాచారాన్నిసేకరిస్తాం. అన్ని సందర్భాల్లోను ఈ విధంగా సమాచారాన్ని సేకరించడం వీలుకాదు. కనుక యాదృచ్ఛిక నమూనా పద్ధతిలో ప్రతి అంశానికి సమాన ప్రాతినిధ్యం ఇచ్చే విధంగా నమూనాను ఎంపిక చేయడం జరుగుతుంది. నమూనా పద్ధతిలో ప్రతి అంశానికి సమాన ప్రాతినిధ్యం ఇచ్చే విధంగా నమూనాను ఎంపిక చేయడం జరుగుతుంది. నమూనా పద్ధతిలో కొన్ని అసందర్భమైన అంశాలు ప్రవేశించే ప్రమాదముంది. ఇవి పక్షపాతం వల్ల, నిర్లక్ష్యం వల్ల ప్రవేశిస్తాయి. సరైన పద్ధతిలో నమూనాను ఎంచుకోవడం ద్వారా వాటిని సాధ్యమైనంత వరకు తగ్గించవచ్చు. గణిత శాస్త్ర పద్ధతుల ద్వారా ఈ నమూనాలోని దోషాలను గణన చేసి వాటి పరిమాణాన్ని కనుగొనవచ్చు. పూర్తి సేకరణ పద్ధతిలో కూడా గణాంక దోషాలు చాలా ఎక్కువగా ఉంటాయి. ఇవి నమూనాకు సంబంధించని (non - sampling) దోషాలు. గణిత శాస్త్ర పద్ధతుల ద్వారా వీటిని తొలగించడం కష్టమౌతుంది. అందుచేత యాదృచ్ఛిక నమూనా పద్ధతి ద్వారా నమూనా సేకరణ ఉత్తమ పద్ధతి అవుతుంది. ప్రొఫెసర్ ఆర్.ఎ. ఫిషర్ చెప్పినట్లుగా సులభంగా, వేగంగా, తక్కువ ఖర్చుతో దత్తాంశాన్ని క్రోడీకరించి విశ్లేషించడానికి సేకరణ పద్ధతి కంటె నమూనా పద్ధతి పూర్తి మైలైనది.

28.3 జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ - స్థాపన

భారతదేశం స్వతంత్ర్యాన్ని పొంది ప్రణాళికలను రూపొందించుకోవడం మొదలు పెట్టడంతో అప్పటికీ అందుబాటులో ఉన్న గణాంకాలు సరిపోవని తెలిసింది. 1948లో ఏర్పరచిన మంత్రిత్వ శాఖల గణకుల కమిటీ (Standing Committee of the Departmental Statisticians) మరియు 1949లో ఏర్పరచబడిన జాతీయాదాయ సంఘం అప్పటికి లభ్యమయ్యే సమాచారం ప్రణాళికా రచనలకు, జాతీయాదాయ అంచనాకు సరిపోదని కనుగొంది. దీనితో 1950 ఫిబ్రవరిలో అప్పటి ప్రధానమంత్రి పండిట్ జవహర్‌లాల్ నెహ్రూ సమీకృత మరియు సమన్వయ (integrated and co-ordinated) పద్ధతిలో గణాంక సేకరణకు ఒక పద్ధతిని ఏర్పరచారు. అప్పటి కేబినెట్ గౌరవ గణాంక సలహాదారు ప్రొఫెసర్ P.C. మహలనోబిస్ పర్యవేక్షణలో దీనిని రచించారు. ఈ వ్యూహం ఫలితంగా 1950 జూలైలో 300 ల మంది పరిశోధకులు (investigators) మరికొంత మంది పర్యవేక్షకులతో జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థను ఏర్పరచారు. సాంఘిక, ఆర్థిక అంశాలకు, వ్యవసాయ రంగానికి, జాతీయాదాయ అంచనాలకు, ప్రణాళికా రచనకు కావలసిన గణాంకాలను సేకరించడం ఈ సంస్థ ఆశయం.

28.4 జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ - పునర్వ్యవస్థీకరణ

జాతీయ నమూనా సర్వేను పునర్వ్యవస్థీకరించాలనే ఆలోచన భారత ప్రభుత్వానికి చాలాకాలంగా వుంది. దీని నిమిత్తం అప్పటి కేబినెట్ సెక్రటరీ శివరామన్, ప్రొఫెసర్ వి.యం. దండేకర్, ప్రొఫెసర్ రఘురాజ్ బహదూర్ సభ్యులుగా గల త్రిసభ్య సంఘం ఏర్పరచబడింది. ఈ సంఘం జాతీయ నమూనా సర్వేకు చెందిన అన్ని అంశాలను కేబినెట్ సెక్రటేరియట్‌లో ఏర్పరచబడిన ఒక ప్రభుత్వ సంస్థకు అప్పగించాలని, దీని నిర్వహణకు ఒక గవర్నింగ్ కౌన్సిల్‌ని ఏర్పరచాలని సిఫార్సు చేసింది. ఈ సంఘం సిఫార్సులను ప్రభుత్వం ఆమోదించి

జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థను 1971 మార్చి తీర్మానం ద్వారా కేబినెట్ సెక్రటేరియట్‌లోని గణాంక విభాగంలో ఏర్పాటు చేసింది. జాతీయ నమూనా సర్వే సంచాలక కార్యాలయం (directorate) ఈ వ్యవస్థలో ఒక భాగమై 1971 నుండి ఫీల్డ్ ఆపరేషన్స్ డివిజన్ అని పిలవబడుతుంది. ఇంతవరకు కలకత్తాలోని భారతీయ గణాంక సంస్థ (Indian Statistical Institute ISO) నిర్వహిస్తున్న గణాంక సేకరణకు రూపకల్పన చేయడం, సేకరించిన గణాంకాలను క్రమపద్ధతిలో విశ్లేషించి ప్రచురించడం మొదలైన కార్యక్రమాలు జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థకు అప్పగించబడ్డాయి. 1973వ సంవత్సరంలో ఈ సంస్థ ప్రణాళికా మంత్రిత్వ శాఖకు బదిలీ చేయబడింది.

జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థలో 4 విభాగాలున్నాయి. అవి (1) సర్వే రూప కల్పన ; పరిశోధన (2) గణాంక వివరాల సేకరణ (3) గణాంక వివరాల వర్గీకరణ (4) ఆర్థిక విశ్లేషణ. పై నాలుగు విభాగాలతో కూడిన జాతీయ నమూనాసర్వే సంస్థ (NSSO) ముఖ్య కార్యనిర్వహణాధికారి ఆధ్వర్యంలో పనిచేస్తుంది. ఈ సంస్థ కార్యక్రమాలు నిర్వహణ కౌన్సిల్ ఆధ్వర్యంలో నిర్ణయించబడతాయి. ఈ కౌన్సిల్ లో ఒక అనధికార అధ్యక్షుడు (chairman) నలుగురు అనధికార ఆర్థిక వేత్తలు, ఐదుగురు అధికార ఆర్థికవేత్తలు మరియు పైన ఉదాహరించిన శాఖల అధిపతులు నలుగురు సభ్యులుగా ఉంటారు. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ ముఖ్య కార్య నిర్వహణాధికారి ఈ కౌన్సిల్‌కు సభ్య కార్యదర్శి (member secretary) గా ఉంటారు.

ఈ జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ కు ప్రభుత్వం ఆర్థిక వనరులను అందిస్తుంది. కాని ఈ వనరులను వినియోగించే విధానాన్ని నిర్వహణ కౌన్సిల్ నిర్ణయిస్తుంది. ఈవిధంగా నిర్వహణ కౌన్సిల్ ప్రభుత్వ జోక్యం నుండి విడివడి స్వతంత్ర ప్రతిపత్తిగల సంస్థగా రూపొందింది. అందుచేత దత్తాంశ సేకరణ, విశ్లేషణ మరియు ప్రచురణ విషయాలలో ప్రభుత్వ జోక్యం లేకుండా ఈ వ్యవస్థ పనిచేస్తోంది. ఈ నిర్వహణ కౌన్సిల్ అవసరమైనన్నిసార్లు సమావేశమై జాతీయ నమూనా సర్వే (NSS) విడతలు (rounds) , నమూనా రూపకల్పనలు, షెడ్యూళ్ళు మరియు దత్తాంశ విశ్లేషణలకు సంబంధించిన కార్యక్రమాలను చర్చిస్తుంది.

ఈ సంస్థ కేంద్ర, రాష్ట్ర మంత్రిత్వ శాఖలకు అవసరమైన సాంఘిక, ఆర్థిక విషయాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాల్ని క్రోడీకరిస్తుంది. ఈ సంస్థ విడతల (rounds) రూపంలో ప్రస్తుత సమయానికి సంబంధించిన అంశాలపై బహుళార్థసాధక సమీకృత సర్వేలను(multi - purpose integrated survey) జరుపుతుంది. కావలసిన దత్తాంశ స్వభావాన్ని మరియు లభ్యమైన వనరులను అనుసరించి ప్రతి విడత (round) యొక్క పరిధిని, కాల పరిమితిని నిర్ణయించడం జరుగుతుంది. సాధారణంగా ఈ విడత (round) యొక్క కాలపరిమితి 3 నుండి 8 నెలల వరకు ఉంటుంది. కాని 14వ విడత నుండి ఈ కాల పరిమితిని ఒక వ్యవసాయ సంవత్సరానికి పెంచడమైనది.

28.5 జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ విధులు

కేంద్ర సచివాలయంలోని గణాంక విభాగం పరిధిలో జాతీయ నమూనా సర్వే కార్యాలయం పనిచేస్తుంది. ఇది మూడు ప్రధాన విధులను నిర్వర్తిస్తుంది.

1. దేశానికంతటికీ సంబంధించిన సాంఘిక, ఆర్థిక సమాచారాన్ని విస్తృతంగా, నిర్విరామంగా సేకరించడం దాని ఉద్దేశం. జాతీయాదాయ అంచనాలకు , ప్రణాళికా రచనలకు కావలసిన గణాంక వివరాల్ని అందించడం ; అందుబాటులో ఉన్న సమాచారంలో గల అసంపూర్ణాలను భర్తీ చేయడం దానివిధి.

2. సంఘటిత పారిశ్రామిక రంగంలో వార్షిక సర్వేలను, సంబంధిత విచారణలను నిర్వహించడం చేస్తుంది.

BRAOU

3. వ్యవసాయ రంగంలో సర్వేలను నిర్వహించడానికి రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలకు శిక్షణ, సాంకేతిక సలహాలు ఇవ్వడం కూడా చేస్తుంది.

పై విధులను నిర్వహించడానికి జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ మూడు భాగాలుగా విభజించబడింది.

1. బహుళ ప్రయోజన సాంఘిక, ఆర్థిక గణాంక విభాగం.

2. పారిశ్రామిక గణాంక విభాగం

3. వ్యవసాయ గణాంక విభాగం

కేంద్ర గణాంక సంస్థ (CSO) సర్వే రూపకల్పనలోనూ, పట్టికలను రూపొందించే కార్యక్రమాలను భారాలను (weights) నిర్ణయించడంలోనూ, సర్వేలకు సంబంధించిన వివిధ అంశాల్లోనూ సహకరిస్తుంది. జాతీయ నమూనా సర్వే (NSS) కు విధి నిర్వహణలో జాతీయ నమూనా సర్వే కార్యక్రమ సలహా సంఘం (NSS Advisory Committee) సహాయం చేస్తుంది. ఈ సంఘంలో ప్రణాళికా సంఘంలోని నిపుణులు, ఆర్థిక, పారిశ్రామిక, ఆహార, వ్యవసాయ, శ్రామిక, ఉద్యోగిత మంత్రిత్వ శాఖల నిపుణులు, కేంద్ర గణాంక సంస్థ (CSO) , భారతీయ గణాంక సంస్థ (ISI) మరియు రాష్ట్ర ప్రభుత్వ నిపుణులు ఉంటారు.

28.6 సర్వేచేసే పద్ధతి

28.6.1 విచారణ చేసే యూనిట్ ఎంపిక

దేశమంతా 250 భౌగోళిక ప్రాంతాలుగా విభజించబడింది. వీటి నుండి 1000 గ్రామాలను ఎంపిక చేసుకుంటారు. కాలానుగుణంగా ఎదురయ్యే సమస్యలను, గత అనుభవాన్ని పురస్కరించుకొని గ్రామాల ఎంపిక మారుతూ వచ్చింది. మొట్ట మొదటి సర్వేలలో గ్రామాలను నేరుగా ఎంపిక చేసేవారు. తరువాత తాలూకాలను ఎంపిక చేసుకుని ఒక్కొక్క తాలూకా నుండి 2 గ్రామాలను ఎంపిక చేసుకోవడం మొదలైంది. గ్రామాల ఎంపిక తరువాత కుటుంబాల ఎంపిక జరుగుతుంది. ఇదేవిధంగా పొలాలను కూడా భూమి వినియోగ సర్వేల గురించి ఎంపిక చేయడం జరుగుతుంది.

మూడవ సర్వే నుండి ఈ సర్వేల పరిధిని పట్టణ ప్రాంతాలకు విస్తరించడం జరిగింది. ఇక్కడ కూడా గ్రామాల్లో వలె ముందుగా పట్టణాలను గుర్తించి వాటిలో కుటుంబాలను ఎంపిక చేయడం జరిగింది.

26.8.2 సర్వే రూపకల్పన

జాతీయ నమూనా సర్వే ప్రారంభించే నాటికి కలకత్తాలోని భారతీయ గణాంక సంస్థ (ISI) , పూనాలోని గోఖలే రాజకీ, ఆర్థిక సంస్థలు సర్వేలను నిర్వహిస్తూ ఉండేవి. ప్రొఫెసర్ P.C. మహల్‌నోబిస్ చే స్థాపించబడిన జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ పై రెండు సంస్థల సహాయంతో రూపకల్పన చేయబడింది. సర్వే నిర్వహించడం, షెడ్యూళ్ళను తయారు చేయడం మొదలైన పనులను భారతీయ గణాంక సంస్థ నిర్వహించేది.

28.6.3 సర్వే పని నిర్వహణ

సర్వే నిర్వహణ ఆర్థిక మంత్రిత్వ శాఖలోని ఆర్థిక విషయాల విభాగానికి, ఆఫీసు పని కలకత్తాలోని భారతీయ గణాంక సంస్థకు అప్పగించబడ్డాయి. శ్రీ. S.P. పిన్హా నిర్వహణ శాఖకు ముఖ్య సంచాలకునిగా

నియమించబడిరి. కొంతమంది అధికార్లు రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలచే నియమించబడగా మరికొంతమంది ప్రత్యక్షంగా నియమితులయ్యేవారు. ముందుగా ఈ అధికార్లు ఒక వారం శిక్షణ పొంది తిరిగి పరిశోధకులకు (investigators) శిక్షణ ఇస్తారు. ప్రతి నలుగురు పరిశోధకులకు ఒక సహాయ పర్యవేక్షణాధికారి ఉంటాడు. ఒక బ్లాకులోని 32 మంది పరిశోధకులకు 8 మంది సహాయ పర్యవేక్షణాధికారులు, వీరిపై అజమాయిషీకి ఒక పర్యవేక్షణాధికారి ఉంటాడు. ఇతడు సహాయ సంచాలకుని (Assistant Director) యొక్క సాంకేతిక మరియు నిర్వహణ సారథ్యంలో పనిచేస్తాడు. దేశానికంతకీ ఒక సంచాలకుడు, ఇతనికి సహకరించడానికి ఉపసంచాలకులు ఉంటారు.

ప్రాథమిక స్థాయిలో పరిశోధకులు ప్రశ్నావళి సహాయంతో ప్రత్యక్ష సమావేశ పద్ధతిలో దత్తాంశాలను సేకరిస్తారు. వీరు దత్తాంశ సేకరణలో శిక్షణ పొందిన వారు కాబట్టి వీరు సేకరించిన సమాచారం వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉంటుంది.

ప్రతి సంవత్సరం సమాచారాన్ని సేకరించడానికి సర్వేలను నిర్వహిస్తారు. కాల శ్రేణుల రూపంలో లభ్యమయ్యే ఈ సమాచారం భవిష్యత్తుకు సంబంధించిన ధోరణులను తెలుసుకునేందుకు ఉపయోగిస్తుంది.

28.6.4 రాష్ట్రాల ప్రాతినిధ్యం

8వ విడత (1954 - 55) నుంచి రాష్ట్రాలు జాతీయ నమూనా సర్వే కార్యక్రమాల్లో సమాన ప్రాతినిధ్యంపై పాల్గొనడం ప్రారంభించాయి. దత్తాంశాలను సేకరించడానికి, పట్టికలో తయారు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు సమానంగా భరిస్తాయి.

28.6.5 నమూనా పద్ధతి (Sample Design), ప్రశ్నావళి, పట్టీకరణ

24వ విడత (1969 - 70) వరకు నమూనాల సేకరణ పద్ధతి, సమాచార సేకరణ, ప్రశ్నావళి, పట్టీకీకరణ పద్ధతి కేంద్ర గణాంక సంస్థ ఆధ్వర్యంలో జాతీయ నమూనా సర్వే కార్యక్రమ సలహా కమిటి సిఫార్సుల ననుసరించి నిర్ణయించబడేవి. ఈ పనులకు సంబంధించిన సాంకేతికమైన అంశాలను 1972 మే వరకు భారతీయ గణాంక సంస్థ నిర్వహించేది. 1972 జూన్ 1వ తేదీ నుండి ఈ విధులు జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ లోని సర్వే పద్ధతి (Survey design) మరియు పరిశోధనా విభాగము, దత్తాంశ పట్టీకీకరణ విభాగాలకు అప్పగించబడ్డాయి.

28.7 విషయ పరిధి (Subject Coverage)

రెండు కాని అంతకంటే ఎక్కువ విషయాలపై విషయ సేకరణ చేసేటప్పుడు సౌలభ్యము, ఆదాల కోసం సమీకృత బహు విషయ సర్వేను ఏకీకృత సమష్టి సర్వే పద్ధతి (Single Joint survey operation) ద్వారా సాంఘీక, ఆర్థిక విభాగం నిర్వహిస్తోంది. వినియోగ వ్యయం, జనాభా, జనన మరణాలు, ఉద్యోగిత, నిరుద్యోగితలు, గ్రామీణ చిల్లర ధరలు మొదలైన విషయాల్లో విషయ సేకరణ ప్రతి ఏడాది, ప్రతి విడతలోను జరుగుతుంది. ఇవిగాక కొన్ని అంశాలపై కొన్ని కొన్ని విడతలలో తాత్కాలిక (adhoc) పద్ధతిలో విషయ సేకరణ చేపట్టబడుతుంది. ఇట్టి వాటిలో భూకమతాలు, గృహ పరిశ్రమలు, వర్తకము, రవాణా సంస్థలు, పెట్టుబడి, కుటుంబ నియంత్రణ, గృహ నిర్మాణం ముఖ్యమైనవి. గ్రామీణ వ్యవసాయ కూలీలు, శ్రామిక మధ్యతరగతి కుటుంబాలు, బలహీన వర్గాలు మొదలైన ప్రత్యేక వర్గాలకు సంబంధించిన సర్వేలను కూడా కొన్ని విడతలలో చేపడతారు.

BRAOU

28.7.1 వినియోగ వ్యయం (Consumer Expenditure)

1950 - 51 సం ॥ లో ప్రారంభమైన మొదటి విడత నుండి 1973 - 74 సం ॥ లోని 28వ విడత వరకు ప్రతీ విడతలోను వినియోగ వ్యయాన్ని గూర్చి సర్వే జరుపబడింది. 26వ విడత సర్వే తర్వాత NSS గవర్నింగ్ కౌన్సిల్ వినియోగ వ్యయం, ఉద్యోగిత, నిరుద్యోగితలను గూర్చిన సర్వేలను రెంటిని కలిపి 5 సంవత్సరములకు ఒకమారు నిర్వహించాలని నిర్ణయించింది. దీని ఫలితంగా 27,32, 38, 43 వ విడతల్లో వినియోగ వ్యయం మరియు ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగితలపై సర్వే జరుపబడింది. ఈ విడతల్లో ఒకే కుటుంబం నుండి రెండు సర్వేలకు సంబంధించిన సమాచారం సేకరించబడింది. అయితే, ప్రణాళికా కర్తలకు, పరిశోధకులకు వినియోగ వ్యయంపై సంవత్సరం వారీగా దత్తాంశాలు అవసరమయ్యాయి. అందుచే తగ్గించబడిన ప్రశ్నావళికి తక్కువ ప్రమాణం గల నమూనాతో అనగా ప్రతీ గ్రామానికి లేదా పట్టణ బ్లాకుకు 2 కుటుంబాలు చొప్పున ఎంపిక చేసుకుని ప్రతి సంవత్సరం ఈ సర్వేను నిర్వహించడం మొదలు పెట్టారు. 42వ విడత నుండి ఈ పద్ధతి అమల్లోకి వచ్చింది. మరల 45వ విడత నుండి ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగితల సూచికలను కూడా ఈ సర్వేలో చేర్చాలని నిర్ణయించారు.

ఈ సర్వేలో సేకరించబడిన దత్తాంశాలు అనేక విశ్లేషణాత్మక అధ్యయనాలకు ఉపయోగపడుతున్నాయి. ఉదాహరణకు ప్రణాళికా సంఘం తయారు చేసిన పెర్స్పెక్టివ్ ఆఫ్ డెవలప్మెంట్ (perspective of development) 1961 - 76 అనే అధ్యయనంలో వివిధ వస్తువుల గిరాకీలు ఈ దత్తాంశాల ఆధారంగా తయారు చేయబడ్డాయి. ప్రణాళికా సంఘం చే నియమించబడిన ఆదాయ పంపిణీ మరియు జీవన స్థాయిల అధ్యయన సంఘం జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశాల ఆధారంగానే తన నివేదికను తయారు చేసింది. ఇంతేకాక పేదరికపు అంచనాలను తయారు చేయడానికి జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశాలు ఎంతగానో సహాయపడుతున్నాయి. 1992 వ సంవత్సరంలో పేదరికం అంచనాలపై వేయబడిన సంఘం ఈ దత్తాంశాల ఆధారంగానే వివిధ రాష్ట్రాల్లోని పేదరికపు స్థితి కాల క్రమేణా ఎలా మారుతూ వచ్చిందో అంచనా వేసింది.

వివిధ తలసరి ఆదాయం కలిగిన కుటుంబాలపై పన్ను అంతిమ భారాన్ని గూర్చి అధ్యయనం చేయడానికి కూడా ప్రణాళికా సంఘం జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించింది. ఆరోగ్య మంత్రిత్వ శాఖ కేలరీల్లో ఆహార వినియోగాన్ని మందించడానికి ఈ దత్తాంశాలనే ఉపయోగిస్తోంది. మొదటి విడతలకు సంబంధించిన నివేదికలు వినియోగానికి సంబంధించిన వస్తు పరిమాణాన్ని సూచించకుండా వ్యయాన్ని మాత్రమే సూచించేవి. దీనివల్ల జీవనస్థాయిపై ఆర్థికాభివృద్ధి యొక్క ప్రభావాన్ని వాస్తవ పద్ధతిలో తెలుసుకోవడానికి సాధ్యపడదు. ఎందుకంటే వినియోగ వ్యయ దత్తాంశాలు ప్రస్తుత ధరలో ఇవ్వబడతాయి.

BRAOU

28.7.2 జనాభా, జనన మరణాలు (Population, Births and Deaths)

వ్యక్తిగత వివరాలు, వివాహం, భార్యా భర్తలకు సంబంధించిన ఇతర వివరాలు, జనన మరణాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాలు, వివాహిత స్త్రీల యొక్క సంతానోత్పత్తి చరిత్ర మొదలైన అంశాలను జాతీయ నమూనా సర్వే సేకరించింది. జనన మరణాలు మరియు శిశు మరణాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాలు రిజిస్ట్రార్ జనరల్ కార్యాలయంచే ఉపయోగించబడుతున్నాయి. రెండవ పంచవర్ష ప్రణాళికలో తీసుకోబడిన జనాభా భవిష్యదంచనాలు తక్కువ అంచనాలని 14వ విడత జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశాలు నిరూపించాయి. మూడవ ప్రణాళికలోని జనాభా అంచనాలు జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశాల నుండి తీసుకోబడ్డాయి. ఇవి 1961 జనాభా లెక్కలతో సరిపోయాయి. ప్రణాళికా రచనల్లోని ముఖ్య ప్రమేయాలు అనగా సంతానోత్పత్తి రేటు జాతీయ నమూనా సర్వే దత్తాంశాలతో ధృవీకరించబడ్డాయి. 23వ విడత వరకు జనాభా, జనన మరణాలు ఒక

ప్రత్యేక ప్రశ్నావళి ద్వారా సేకరించబడ్డాయి. జాతీయ నమూనా సర్వే సేకరించిన మరణాల రేటు తక్కువ అంచనాగా గుర్తించబడుతోంది. అందుచే జాతీయ నమూనా సర్వే మరియు రిజిస్ట్రార్ జనరల్ వారి నమూనా రిజిస్ట్రేషన్ స్కీంల దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను విశ్లేషించడానికి కొన్ని అధ్యయనాలు చేపట్టబడ్డాయి. వీటి ఫలితంగా జనన మరణాల లెక్కలను సేకరించడానికి ప్రతీ కుటుంబానికి మూడు నెలలకు మించకుండా ఏడాదిలో కనీసం 4 సార్లు వెళ్ళాలని నిర్ణయించారు.

28.7.3 ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత (Employment and Unemployment)

ఆర్థిక వ్యవస్థలో ఈ అంశం ప్రాతినిధ్యం వహిస్తోంది. కనుక దానిపై 19వ విడత మొదలుకొని సమాచార సేకరణ మొదలైంది. శ్రామిక కాలాన్ని, అందులో శ్రామిక శక్తిలో పాల్గొనడానికి సిద్ధంగా ఉన్న కాలాన్ని, నిరుద్యోగిత మరియు అల్ప ఉద్యోగితలను అంచనా వేయడం ఈ సేకరణ ముఖ్యోద్దేశం. ఈ అంచనాలు గ్రామీణ ప్రాంతాలకే కాక పట్టణ ప్రాంతాలకి కూడా తయారు చేస్తారు. ఈ సర్వేల భావనలను, పద్ధతులను పున : పరిశీలించడానికి ప్రణాళికా సంఘం ప్రొఫెసర్ యం.సి. దంత్వాలా అధ్యక్షతతో నిపుణుల సంఘాన్ని నియమించింది. ఈ సంఘం విచారణ పద్ధతుల్లోను, భావనల్లోను మార్పుల్ని సూచించింది. అప్పటి వరకు అమల్లో ఉన్న పద్ధతి ప్రకారం జనాభాను శ్రామికులు, నిరుద్యోగులు, శ్రామిక శక్తిలో లేనివారు అని మూడు విధాలుగా విభజించడాన్ని ఈ సంఘం తిరస్కరించింది. ఈ సంఘం ఒక వారంలో ప్రతిరోజు పాల్గొనే కార్యకలాపాల వివరాలను సేకరించి అంచనాలను వివిధ ఋతువులకు, వివిధ జనాభా వర్గాలకు వేరువేరుగా తయారు చేయాలని సూచించింది. జాతీయ నమూనా సర్వే 27వ విడత నుండి ఈ సిఫార్సులు అమల్లోకి వచ్చాయి. ఇంతేకాక ప్రస్తుతం శ్రామిక శక్తిలో పాల్గొంటున్న వారిని తీసుకొని వారి నిత్య కార్యకలాపాల వివరాలను, శ్రామిక శక్తిలో పాల్గొనక పోవడానికి గల కారణాలను సేకరించాలని సిఫార్సు చేసింది.

28.7.4 భూముల వినియోగం - పంటకోత ప్రయోగాలు (Land Utilization and Crop Cutting Experiemnts)

ముఖ్య ఆహార ధాన్యాల ఉత్పత్తులను అంచనా వేయడానికి జాతీయ నమూనా సర్వే 10వ విడత నుంచి పంట విస్తీర్ణం దిగుబడులపై అంచనా వేయడం ప్రారంభించింది. పంట విస్తీర్ణం అంచనాలను 4వ విడత నుంచే ప్రారంభించింది. పంట దిగుబడి అంచనాలు, కొన్ని ప్రయోగాత్మక భూములపై వాస్తవంగా పంటకోత, నూర్పు జరిపి తయారు చేస్తున్నారు.

28.7.5 ధరల గణాంకాలు (Price Statistics)

శ్రమ మరియు ఉద్యోగితల మంత్రిత్వ శాఖ కోరికపై కొన్ని ముఖ్య వస్తు సేవల నెలవారీ ధరలను సేకరించడం జాతీయ నమూనా సర్వే 16వ విడత నుండి ప్రారంభించింది. దుకాణదారుల సహకారం కాలక్రమేణా సన్నగిల్లుతోందని వారిలో నిర్లక్ష్య భావం పెరుగుతోందని సర్వే అనుభవాన్ని బట్టి తెలుస్తోంది. వినియోగ పద్ధతి (consumption pattern) లో కాలక్రమేణా వస్తున్న మార్పుల కనుగుణంగా ఎంచుకోబడిన వస్తువుల్లోనూ, వస్తు వస్తు సమూహాల్లోనూ మార్పులు చేయబడుతున్నాయి.

28.7.6 పట్టణ చట్రపు సర్వే (Urban Frame Survey)

పట్టణ ప్రాంతాల్లో చిన్న చిన్న భాగాలను గుర్తించడం కష్టం. కనుక పట్టణాన్ని 700 నుండి 750 జనాభా ఉంటూ 120 నుండి 150 కుటుంబాలు గల యూనిట్లుగా విభజించడం అవసరమైంది. 1959 - 61లో మొదటి

BRAOU

సారిగా పట్టణ చట్రపు సర్వే చేపట్టబడింది. 1971లో మళ్ళీ ఈ సర్వేను చేపట్టి కొన్ని మార్పులను చేసారు. పట్టణ చట్రపు సర్వే బ్లాకులను ప్రతి దశాబ్దానికి ఒక మారు జరిగే జనాభా లెక్కల్లోను, జాతీయ నమూనా సర్వే విడతల్లోను సమాచార సేకరణ బ్లాక్‌గా తీసుకోబడుతున్నాయి.

28.7.7 భూకమతాల సర్వే (Land Holding Survey)

భూకమతాలపై సర్వే మొట్టమొదటి సారిగా 8వ విడతలో జరిగింది. ఆహార, వ్యవసాయ సంస్థ (Food and Agricultural Organisation) ప్రారంభించిన ప్రపంచ వ్యవసాయ లెక్కల సేకరణలో (census) భాగంగా 8వ విడతలో (1954 - 55) భూకమతాల సర్వే ప్రారంభించబడింది. ఇటువంటి సర్వే మళ్ళీ 16, 17 విడతల్లో (1960 - 62) నిర్వహించబడింది. 1960 లో ప్రపంచ వ్యవసాయ సెన్సెస్‌లో పాల్గొనే ఉద్దేశంతో ఈ సర్వే చేపట్టారు. నిర్వహణ కమతాల స్వభావం, పంపిణీ, వినియోగం మొదలైన అంశాలపై గణాంకాలు సేకరించబడ్డాయి. తిరిగి 26వ విడత (1971 - 72)లో ఈ సమాచారం సేకరించబడింది. వ్యవసాయ రంగంలో వచ్చే అభివృద్ధి కార్యకలాపాలను ఈ సర్వేలో పరిగణనలోకి తీసుకుంటారు.

28.8 జాతీయ నమూనా సర్వే 47వ విడత - విపుల వివరణ

జాతీయ నమూనా సర్వే 47వ విడత 1991 సంవత్సరం జూలై నుంచి డిశంబరు వరకు నిర్వహించ బడింది. ఈ విడతలో వినియోగ వ్యయం, ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత విషయాలు తీసుకోబడ్డాయి. వీటిని గూర్చి విపులంగా చర్చిద్దాము. ఈ రెండు అంశాలపైన ఒకే కుటుంబం నుంచి సమాచారం సేకరించడ బడింది.

28.8.1 నమూనా పరిమాణం (Sample Size)

ఈ విడతలో జమ్ము కాశ్మీర్‌లోని లడక్, కార్గిల్ జిల్లాలు సర్వే నుంచి మినహాయించబడ్డాయి. అంతేకాక, సరైన రవాణా సదుపాయాలు లేకపోవడం వల్ల అండమాన్, నికోబార్ దీవుల్లోని 768 గ్రామాలు, నాగాలాండులోని 172 గ్రామాలు కూడా సర్వే నుంచి మినహాయించబడ్డాయి. మొత్తం 4,468నమూనా గ్రామాలు 2,564 నమూనా పట్టణ బ్లాకుల నుండి 14, 064 కుటుంబాలను ఎంపిక చేసుకొని విషయాన్ని సేకరించారు.

28.8.2 నమూనా పద్ధతి (Sample Design)

ఈ సర్వేలో రెండు స్థాయిల వర్గీకరణ నమూనా పద్ధతి (two stage stratified sampling method) ని వాడారు. మొదటి స్థాయిలో గ్రామ ప్రాంతాలకు గ్రామాలను పట్టణ ప్రాంతాలకు పట్టణ బ్లాకులను ఎంచుకున్నారు. రెండో స్థాయిలో కుటుంబాలను ఎంచుకున్నారు.

ప్రతి రాష్ట్రాన్ని కొన్ని వ్యావసాయిక వాతావరణ ప్రాంతాలు (agro - climatic regions) గా విభజించారు. భారతదేశం 78 ప్రాంతాలుగా విభజించబడింది. ప్రతి ప్రాంతంలోని జిల్లాలను కొన్ని వర్గాలుగా విభజించారు. 1981 జనాభా లెక్కల ప్రకారం 18 లక్షలకు లోపు జనాభా గల జిల్లాను ఒక వర్గం (stratum) గాను అంతకు మించిన జనాభా గల జిల్లాలను 2 లేక 3 వర్గాలుగాను విభజించారు.

దేశపు మొత్తం నమూనా పరిమాణాన్ని వివిధ రాష్ట్రాలకు క్రింది విధంగా కేటాయించారు. మొదటి స్థాయి యూనిట్లైన గ్రామాలు / పట్టణ బ్లాకులను వివిధ రాష్ట్రాలకు సిబ్బంది లభ్యతను బట్టి కేటాయించారు. తర్వాత ఒక రాష్ట్రం లోని యూనిట్లను పట్టణ బ్లాకులకు రెట్టింపు ప్రాధాన్యతనిస్తూ గ్రామాలకు, పట్టణ బ్లాకులకు కేటాయించారు. ప్రతి వర్గంలోని జానాభాని బట్టి ఈ నమూనా పరిమాణాన్ని వివిధ వర్గాలకు కేటాయించారు

BRAOU

ప్రతి వర్గపు నమూనా పరిమాణం 4 యొక్క గుణకంగా వచ్చేటట్లు ఎంచుకున్నారు. దీనివల్ల ప్రతి ఉప విడత (sub - round) లోను ఒకే నమూనా పరిమాణం వుండేటట్లు ఎంచుకునేందుకు వీలవుతుంది.

నమూనా గ్రామాలను క్రమబద్ధ చక్రీయ పద్ధతిలో (Circular systmatic method) గ్రామ ఎంపిక సంభావ్యత జనాభాకి అనుపాతంలో వుండేటట్లు (probability proportional to population size) ఎంచుకున్నారు. ప్రతి గ్రామం నుంచీ, పట్టణ బ్లాకు నుంచీ రెండు కుటుంబాలను ఎంచుకున్నారు. ఈ విడతలో రెండు ఉపవిడతలను మాత్రమే విశ్లేషించారు.

28.8.3 అంచనా విధానం (Estimation Procedure)

ఒక లక్షణపు (Y యొక్క) సమిష్టి విలువను (aggregate value) అంచనా వేయడానికి క్రింది సూత్రాన్ని వాడారు.

$$\hat{Y} = \sum_{s} \frac{N_s}{S_s} \sum_{s} \frac{H_{si}}{h_{si}} \sum_{j=1}^{h_{si}} Y_{aij}$$

Y_{sij} : s వర్గంలోని i గ్రామంలో j కుటుంబపు y విలువ

H_{si} : s వర్గంలోని i గ్రామంలో మొత్తం కుటుంబాలు

h_{si} : s వర్గంలోని i గ్రామంలో నమూనా కుటుంబాలు

N_s : s వర్గంలోని మొత్తం గ్రామాలు

n_s : s వర్గంలోని నమూనా గ్రామాలు

పై సూత్రాన్ని వివరిద్దాము. $\hat{y}$ ని దేశం మొత్తం లో బియ్యం పై నెలసరి వినియోగ వ్యయమనుకుందాము. దీనిని అంచనా వేయడానికి మూడు సోపానాలున్నాయి. మొదటి సోపానంలో గ్రామానికి అంచనాను రాబడతాము. ఇందుకు నమూనా కుటుంబలాన్నిటి బియ్యంపై నెలసరి వినియోగాన్ని కూడి ఈ విలువలను గ్రామంలోని కుటుంబాల సంఖ్యకు నమూనా కుటుంబాల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి చే గుణిస్తాము. ఈ గ్రామపు అంచనా నుండి వర్గపు అంచనాకు రాబడతాము. ఇది రెండవ సోపానము. ఒక వర్గంలోని అన్ని గ్రామపు అంచనా విలువను కూడి ఈ మొత్తం విలువను ఆ వర్గంలో మొత్తం గ్రామాలకు నమూనా గ్రామాలకు గల నిష్పత్తిచే గుణిస్తాము. దీనివల్ల ఒక వర్గపు అంచనా విలువ వస్తుంది. ఇట్టి అన్ని వర్గాల అంచనా విలువల్ని కూడి మొత్తం వర్గాలకు నమూనా వర్గాలకు గల నిష్పత్తిచే గుణిస్తాము. ఇది మూడవ సోపానము.

ఏదైనా నిష్పత్తిలో అంచనా వేయడానికి ముందుగా సమష్టి విలువల అంచనాలను పొంది తర్వాత నిష్పత్తిని కనుగొంటాము. అనగా

$$\hat{R} = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}}$$

అందు $\hat{R}$ నిష్పత్తి అంచనా విలువ. $\hat{Y}, \hat{X}$లు సమష్టి అంచనా విలువలు. ఉదాహరణకు $\hat{Y}$ బియ్యం పై వినియోగ వ్యయమైతే $\hat{X}$ జనాభా అంచనాఅయితే $\hat{R}$ తలసరి వినియోగ వ్యయమవుతుంది.

BRAOU

28.8.4 వినియోగ వ్యయం సర్వే

వినియోగవ్యయంపై సమచారాన్ని పొందుపరచడానికి తలసరి నెలవారీ మొత్తం వినియోగ వ్యయాన్ని ఆధారం చేసుకుని 13 తరగతులుగా విభజించారు. మొదటి తరగతి లోకి రూ. 65 కంటే తక్కువ తలసరి నెలవారీ వ్యయం గల కుటుంబాలను తీసుకున్నారు. అదేవిధంగా 13వ తరగతిలోకి రు. 385కి మించి వ్యయం గల కుటుంబాలను తీసుకున్నారు.

వినియోగ వ్యయాన్ని సర్వే రిఫరెన్సు కాలంలో (ఎ) కొన్నవి (purchased)(బి) స్వంతంగా పండించుకొన్నవి (home produced) (సి) వస్తు సేవల మారకం (exchange) ద్వారా పొందినవి అని మూడు విధాలుగా విభజించారు. ప్రతి వస్తువును సర్వే పరిధిలోకి తీసుకునేందుకు ప్రశ్నావళిలో వందలాది వస్తువులను చేర్చారు. అయితే సమాచారాన్ని పట్టికల్లోకి తీసుకున్నప్పుడు 21 స్థూల వస్తువులుగా విభజించారు. అవి ఏవనగా :

1. ధాన్యాలు(cereals) 2. పప్పు దినుసులు (grams) 3. ధాన్యాల ప్రతిస్థాపకాలు (cereal substitutes) 4. పప్పులు (pulses) 5. పాలు, పాలవస్తువులు (milk and milk products) 6. వంటనూనె (edible oil) 7. మాంసం, గ్రుడ్లు, చేపలు (meat, egg and fish) 8. కాయగూరలు (vegetables) 9. పండ్లు, గింజలు (fruits and nuts) 10. చక్కెర (sugar) 11. ఉప్పు (salt) 12. సుగంధ ద్రవ్యాలు (spices) 13. పానీయాలు (beverages and refreshments) 14. తమలపాకులు, పొగాకు, మత్తుపానీయాలు (pan, tabacco and intoxicants) 15. వంట చెరకు, దీపాలు (fuel and wight) 16. వస్త్రాలు (clothing) 17. పాదరక్షలు (footwear) 18. నానావిధ వస్తుసేవలు (miscellaneous goods and services) 19. దీర్ఘ కాలం మన్నే వస్తు సేవలు (durable goods) 20. అద్దెలు (rents) 21. పన్నులు(taxes) వినియోగ వ్యయం.

28.8.5 వినియోగ వ్యయం సర్వే ముఖ్య ఫలితాలు

1) గ్రామ పట్టణ వ్యత్యాసాలు

ఎ) పట్టణ ప్రాంతాల సగటు వ్యయం గ్రామీణ ప్రాంతాల సగటు వ్యయం కంటే 52 శాతం ఎక్కువ. రాష్ట్రాల స్థాయిలో ఈ వ్యత్యాసాన్ని పరిశీలిస్తే అస్సాం, బీహారుల్లో అతి ఎక్కువగాను (వరుసగా 76 శాతం, 63 శాతం) పంజాబు, హర్యానాల్లో అతి తక్కువగాను (వరుసగా 12 శాతం, 10 శాతం) కనబడుతోంది.

బి) నెలవారీ తలసరి వ్యయం రూ. 385 కంటె ఎక్కువ వున్న వారు గ్రామాల్లో 9 శాతం కాగా పట్టణాల్లో 30 శాతం వున్నారు. అయితే ఈ వర్గపు తలసరి వ్యయం గ్రామ ప్రాంతాల్లో రూ. 691 కాగా పట్టణాల్లో రూ. 678 మాత్రమే. అనగా వినియోగ వ్యయంలో వ్యత్యాసాలు పట్టణ ప్రాంతాల్లో కంటె గ్రామ ప్రాంతాల్లోనే ఎక్కువ.

2. కుటుంబ పరిమాణం - వినియోగ వ్యయం

తక్కువ వినియోగ వ్యయం గల కుటుంబాల్లో కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య ఎక్కువగా వుంది. రూ. 385కి మించిన వ్యయం గల కుటుంబాల్లో సగటున కుటుంబానికి 3.6 మంది సభ్యులుండగా రూ. 385 కి లోపు వ్యయం గల కుటుంబాల్లో 6 మంది సభ్యులున్నారు.

3. ఆంధ్ర ప్రదేశ్ స్థితి

ఆంధ్రప్రదేశ్ వినియోగ వ్యయ స్థాయి భారతదేశపు స్థాయి కంటే కొంచెం తక్కువ. గ్రామీణ

భారతదేశానికి నెలవారీ తలసరి వ్యయం రూ. 243.5 కాగా, గ్రామీణ ఆంధ్రప్రదేశ్ కు. రూ. 237.04 పట్టణ ప్రాంతాల్లో భారతదేశానికి రూ. 370.34 వుండగా ఆంధ్ర ప్రదేశ్ కు రూ 316.13 మాత్రమే వుంది.

4) రాష్ట్రాల మధ్య వ్యత్యాసాలు

గ్రామీణ ప్రాంతాల్లో రూ. 140 లోపు తలసరి వ్యయం గల ప్రజలు 20.3 శాతం కాగా తమిళనాడు, బీహారు, మధ్య ప్రదేశ్ రాష్ట్రాల్లో క్రమంగా 28.1 శాతం, 27.9 శాతం, 27.4 శాతం వున్నారు. ఆంధ్ర ప్రదేశ్ 18.8 శాతం మాత్రమే వున్నారు.

5) ధాన్యాల వినియోగం

గ్రామ ప్రాంతాల్లో నెలకు ధాన్యాల తలసరి వినియోగం 13.8 కి.గ్రా కాగా పట్టణాల్లో ఇంతకంటే 3 కి.గ్రా. తక్కువ. వివిధ రాష్ట్రాల్లో వినియోగాన్ని పరిశీలిస్తే అత్యధిక వినియోగం ఒరిస్సాలోను (16.9 కి.గ్రా.) అత్యల్ప వినియోగం కేరళలోను కనబడుతోంది.

6) ఆకలి (Hunger)

ఈ సర్వేలో ఆహారం సరిపోతుందో లేదో కూడా ప్రశ్నించారు. దేశంలో 7.1 శాతం గ్రామ ప్రాంతాల్లోను, 3 శాతం కుటుంబాలకు పట్టణ ప్రాంతాల్లోను రెండు పూట్ల భోజనం దొరకడం లేదు. ఆంధ్రప్రదేశ్ లో ఇట్టివారు 4.3 శాతం గ్రామాల్లోను, 3.6 శాతం పట్టణాల్లోను వున్నారు.

28.8.6 ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వే

ఈ సర్వేకు కూడా వినియోగ వ్యయ సర్వేకు ఎంచుకున్న కుటుంబాల నుంచే సమాచారాన్ని సేకరించారు. ఒక వ్యక్తి హోదాను గుర్తించడానికి రెండు రకాల భావనలను వాడారు. ఒక భావన సామాన్య హోదా (usual status). దీనికి గల 365 రోజుల కాలపరిమాణాన్ని లెక్కలోకి తీసుకుంటారు. రెండవ భావన ప్రస్తుత హోదా (current status). దీనికి గత 7 రోజులు కాల పరిమాణాన్ని లెక్కలోకి తీసుకుంటారు. ఈ రెండు భావనలను వాడి జనాభాను మూడు విధాలుగా విభజించారు.

1) పని చేస్తున్న వారు (working)

2) పనిచేయక, పనిచేయడానికి సిద్ధంగా వున్నవారు (not working but available for work)

3) పనిచేయక, పనిచేయడానికి సిద్ధంగా లేనివారు (not working and not available for work)

పని అనగా ప్రతిఫలాన్నిచ్చే కార్యకలాపము. సాధారణంగా మారకం (exchange) కొరకు ఉత్పత్తి చేసే వస్తు సేవల్ని పరిగణనలోకి తీసుకొంటారు. ఇదే పద్ధతిని జాతీయాదాయ అంచనాలో కూడా ఉపయోగిస్తారు. అయితే వ్యవసాయ రంగంలో స్వంత వినియోగానికి చేసిన వస్తు సేవల ఉత్పత్తిని కూడా ప్రతిఫలాన్నిచ్చే కార్యకలాపాల క్రిందే గ్రహిస్తారు. ఇటువంటి ప్రతిఫలాన్నిచ్చే కార్యకలాపాల్లో పాల్గొనే వారినే పనివారు (workers) అంటారు.

నిరుద్యోగులు (unemployed) అనగా పని దొరకక పని చేయకుండా వుండి పనికోసం వెతకడం కాని పనికి సంసిద్ధులుగా ఉండడంలో కాని ఉండాలి.

BRAOU

శ్రామిక శక్తి (labour force) అనగా పనిచేయుచున్నవారు మరియు నిరుద్యోగులు. పనిచేయకుండా, చేయడానికి సంసిద్ధులు కాకుండా ఉన్నవారిని శ్రామిక శక్తిలో లేనివారంటాము.

28.8.7 ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వే ముఖ్య ఫలితాలు

1) పనిస్వభావం (Nature of Work)

దేశ గ్రామీణ జనాభాలో పురుషులలో 55 శాతం, స్త్రీలలో 33 శాతం సామాన్య హోదా ప్రకారం పనిచేస్తున్నారు. ప్రస్తుత హోదాను తీసుకుంటే పురుషుల్లో 52 శాతం స్త్రీలలో 33 శాతం పనిచేస్తున్నారు. వీటిలో గత 15 సంవత్సరాలలో చెప్పుకోదగిన మార్పు లేదు. వారిని ఎ) స్వంత పని చేసుకొనే వారు (self employed) బి) క్రమబద్ధ పనివారు (Regular employees) సి) ఆకస్మిక పనివారు (casual labour) అని మూడు రకాలుగా విభజించారు. గ్రామ ప్రాంతాల్లో మగ పనివారిలో 59 శాతం స్వంత పనిచేసుకుంటున్నారు. పట్టణ ప్రాంతాల్లో 42.5 శాతం ఈ కోవకు చెందినవారు . స్త్రీలలో స్వంత పనిలో మున్న వారు గ్రామాల్లో 52 శాతం కాగా పట్టణాల్లో 42.5 శాతం. ఆకస్మిక పనివారు పురుషుల్లో కంటె స్త్రీలలో ఎక్కువ శాతం వున్నారు. గ్రామీణ ప్రాంతాల్లో మగపనివారిలో 32 శాతం ఆకస్మిక పనివారు కాగా స్త్రీలలో 43.9 శాతం వున్నారు. ఇదేవిధంగా పట్టణ ప్రాంతాల్లో కూడా ఆకస్మిక పనివారి శాతం స్త్రీలలో ఎక్కువ (మగవారిలో 17.4% స్త్రీలలో 26.7%). వ్యయసాయ పనివారిలోనున్న వారి శాతం కూడా పురుషుల్లో కంటె స్త్రీలలో ఎక్కువ.

2) నిరుద్యోగిత (Unemployment)

శ్రామిక శక్తిలో నిరుద్యోగుల శాతాన్ని నిరుద్యోగిత రేటు అంటాము. నిరుద్యోగులను జనాభాలో శాతంగా చెప్పరాదు. ఎందుకంటే జనాభాలో కొందరు శ్రామిక శక్తిలో వుండరు. ఉదాహరణకు 100 మంది జానభాలో 15 మంది పిల్లలు, 10 మంది ముసలివారు, 25 మంది శ్రామిక శక్తిలో పాల్గొనడానికి సిద్ధంగా లేనివారు, 40 మంది పనిచేయుచున్నవారు, 10 మంది నిరుద్యోగులు వున్నారనుకుందాము. ఇప్పుడు నిరుద్యోగిత రేటు $\frac{10}{50}x100 = 20$ శాతం. కాని జనాభాలో శాతంగా తీసుకుంటే $\frac{10}{50}x100 = 10$ శాతం . కాబట్టి నిరుద్యోగిత రేటుకు సూత్రాన్ని క్రింది విధంగా రాస్తాము.

$$U = \frac{U.E}{W + U.E} x100$$

ఇందు U అనగా నిరుద్యోగిత రేటు శాతం, W అనగా పనిచేయుచున్న వారు. U.E అనగా నిరుద్యోగులు.

47వ విడత సమాచారం ప్రకారం నిరుద్యోగిత రేటు బహు తక్కువగా వుంది. దీనికి కారణం తక్కువ పరిమాణపు నమూనాలను తీసుకోవడమే అనిపిస్తోంది. 5 సంవత్సరాలకు ఒకసారి జరిపే విస్తృత నమూనా అంచనాల ప్రకారం 1987 - 88 సంవత్సరంలో గ్రామ ప్రాంతాల్లో 4.2 శాతం, పట్టణ ప్రాంతాల్లో 6.6 శాతం నిరుద్యోగిత వుందని తెలుస్తోంది. ఇదేవిధంగా స్త్రీలలో గ్రామ ప్రాంతాల్లో 4.4 శాతం పట్టణ ప్రాంతాల్లో 9.2 శాతం నిరుద్యోగులున్నారని తెలుస్తోంది. కాని 1991లో జరిపిన 47వ విడత సర్వే ప్రకారం పురుషుల్లో నిరుద్యోగుల శాతం గ్రామాల్లో 2.2 శాతం పట్టణాల్లో 4.8 శాతం . ఇదేవిధంగా స్త్రీలలో గ్రామాల్లో 1.2 శాతం, పట్టణాలో 5.6 శాతం. కాబట్టి నిరుద్యోగిత రేటు నమూనా పరిమాణానికి, సర్వే కాలానికి చాలా సులభంగా ప్రభావిత మమవుతుంది.

BRAOU

28.9 సారాంశం

ప్రణాళికా రచనలకు, ప్రణాళికలను అమలు చేయగా వచ్చిన ప్రభావాలను గూర్చి తెలుసుకునేందుకు ఎన్నో దత్తాంశాలు కావాలి. వాటిని పూర్తి సేకరణ, నమూనా సేకరణ అనే రెండు పద్ధతుల్లో సేకరించగలము. పూర్తి సేకరణ పద్ధతి అన్ని సందర్భాల్లోను పనికిరాదు. అంతేకాక ఈపద్ధతిలో నమూనా దోషాలు (sampling errors) లేకపోయినా నమూనాకు సంబంధించిన దోషాలు ఎక్కువగా ఉంటాయి.

పంచవర్ష ప్రణాళికలకు కావలసిన సమాచారాన్ని సేకరించడానికి జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ 1950వ సంవత్సరంలో స్థాపించబడింది. 1973వ సంవత్సరంలో ఈ సంస్థ పునర్వ్యవస్థీకరించబడింది. ఈ సేకరణలో ఇప్పటికి సుమారు 50 విడతలు పూర్తయ్యాయి. అనగా ఒకే సంవత్సరంలో ఒకటి కంటె ఎక్కువ విడతలుండవచ్చు. ఈ సర్వేలలో చేపట్టే విషయాలు విడత విడతకూ మారతాయి. కొన్ని కొన్ని విషయాలు ప్రతిసంవత్సరం తీసుకోబడతాయి. వినియోగ వ్యయంపై సర్వే 28వ విడత (1973 - 74) వరకూ ప్రతీ సంవత్సరం చేపట్టబడింది. కాని తరువాత నుండి ఈ విషయం ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగితతో సమన్వయ పరచబడి 5 సంవత్సరాలకొకసారి మార్చబడింది. అయితే 45వ విడత (1989 - 90) నుండి ఈ సమాచారం తక్కువ నమూనా ఆధారంగా ప్రతీ సంవత్సరం సేకరించబడుతోంది.

జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ చేపట్టే సర్వే విషయాల్లో వినియోగ వ్యయం, జనన మరణాలు, ఉద్యోగిత-నిరుద్యోగిత, భూముల వినియోగం - పంటకోత ప్రయోగాలు, ధరలు, పట్టణ చట్రపు సర్వే, భూకమతాల సర్వే మొదలైనవి ముఖ్యమైనవి.

47వ విడతలో అనగా 1991వ సంవత్సరంలో జరిపిన వినియోగ వ్యయం, ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వేలను పరిశీలించగా క్రింది ముఖ్య విషయాలు తెలుస్తాయి.

1. గ్రామ పట్టణ వ్యయ వ్యత్యాసాలు అస్సాం, బీహారు రాష్ట్రాల్లో అతి ఎక్కువగాను పంజాబు, హర్యానా రాష్ట్రాల్లో అతి తక్కువగాను ఉన్నాయి.

2. వినియోగ వ్యయంలో వ్యత్యాసాలు పట్టణాల్లో కంటె గ్రామాల్లోనే చాలా ఎక్కువ.

3. వినియోగ వ్యయానికి కుటుంబం సభ్యుల సంఖ్యకి ఋణాత్మక సంబంధం ఉంది.

4. ధాన్యాల తలసరి నెలవారీ వినియోగం గ్రామాల్లో 13.8 కి.గ్రా. కాగా పట్టణాల్లో 10.8 కి.గ్రా. ఒరిస్సాలో అత్యధిక వినియోగం గ్రామాల్లో 16.9 కి.గ్రా. పట్టణాల్లో 13.7 కి.గ్రా. కాగా కేరళలో అత్యల్ప వినియోగం గ్రామాల్లో 10.4 కి.గ్రా. ఉంది.

5) దేశంలో 7 శాతం జనాభాకి రెండుపూట్ల భోజనం దొరకడం లేదు.

6) ఆకస్మిక పనివారు పురుషుల్లో కంటే స్త్రీలలో ఎక్కువ.

7) వ్యవసాయపు పనిలో నున్నవారి శాతం కూడా పురుషుల్లో కంటె స్త్రీలలో ఎక్కువ.

8) గ్రామ ప్రాంతాల్లో 60 శాతం మంది స్వంత పనిలో ఉంటున్నారు.

BRAOU

9) నిరుద్యోగిత రేటు నమూనా పరిమాణం వల్ల మరియు సర్వే చేయబడిన ఋతువుల వల్ల చాలా ఎక్కువగా ప్రభావితమౌతుంది. కాబట్టి అల్ప నమూనాపై ఆధారపడ్డ 47వ విడత ఫలితాలను లెక్కలోకి తీసుకోలేము.

28.10 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. Dandekar, V.M. and Venkataramaiah, P (1975) (ed) : Data Base of Indian Economy, Statistical Publishing Society, Calcutta and the Indian Econometric Society, Hyderabad.

2. Government of India (1993), Tables with Notes on Fifth Annual Survey on Consumer Expenditure and Employment Unemployment, NSS 47th Round (July - December, 1991) National Sample Survey Organisation, Department of Statistics, New Delhi.

28.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

1. జాతీయ నమూనా సంస్థ స్థాపన యొక్క ఆవశ్యకతను వివరింపుము ?
2. జాతీయ నమూనా సర్వే పునర్వ్యవస్థీకరణను వివరింపుము ?
3. పూర్తి సేకరణ, నమూనా పద్ధతుల బాగోగులను వివరింపుము ?
4. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ విధులేవి ?
5. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ సర్వేలలో వినియోగ వ్యయపు సర్వే యొక్క ప్రాధాన్యతను వివరింపుము ?
6. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ జరిపే వినియోగ వ్యయం సర్వేలో వచ్చిన ముఖ్యమైన మార్పులను తెలిపి ప్రస్తుతం సర్వే ఏవిధంగా నిర్వహిస్తున్నారో తెలుపుము ?
7. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ జరిపే ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వేలో వచ్చిన ముఖ్యమైన మార్పులను తెలిపి ప్రస్తుతం సర్వే ఏవిధంగా నిర్వహిస్తున్నారో తెలుపుము ?

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా (సుమారు 20 పంక్తుల వరకు) జవాబులు రాయండి.

1. కింది వాటిని క్లుప్తంగా రాయండి.
   i. వినియోగ వ్యయాల సర్వే
   ii. జనాభా, జనన మరణాల సంఖ్య
2. ఈ క్రింది వాటిని సంక్షిప్తంగా రాయండి.
   i. భూముల వినియోగం, పంటకోత ప్రయోగాల సర్వే
   ii. ధరల గణాంకాల సర్వే
   iii. భూకమతాల సర్వే

BRAOU

iv) పట్టణ చట్రపు సర్వే

3. 47వ విడత వినియోగ వ్యయం సర్వే ఫలితాలలోని ముఖ్యాంశాలను తెలుపుము ?

4. జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ వారు నమూనా నుండి సమష్టి విలువ అంచనాను ఎలా పొందుతారు ?

5. 47వ విడతలోని ఉద్యోగిత - నిరుద్యోగిత సర్వే ఫలితాల లోని ముఖ్యాంశాలను తెలుపుము ?

28.12 పదకోశం

విడత - Round

పూర్తి సేకరణ పద్ధతి - Census method

నమూనా - Sample

యాదృచ్ఛిక నమూనా - Random sample

నమూనాకు సంబంధించని - Non - sampling

సమీకృత - Integrated

సమన్వయ - Co-ordinated

పరిశోధకులు - Investigators

సంచాలక కార్యాలయం - Directorate

అధ్యక్షుడు - Chairman

సభ్య కార్యదర్శి - Member secretary

బహుళార్థ సాధక - Multi purpose

భారం - Weight

సలహా సంఘం - Advisory ycommittee

సంచాలకుడు - Director

నమూనా పద్ధతి - Sample design

విషయ పరిధి - Subject coverage

ఏకీకృత సమష్టి సర్వే పద్ధతి - Single joint survey operation

తాత్కాలిక - Adhoc

వినియోగ వ్యయం - Consumer expenditure

జనాభా - Population

జననం - Birth

మరణం - Death

ఉద్యోగిత - Employment

నిరుద్యోగిత		Unemployment
భూమి వినియోగం		Land utilization
పంటకోత		Crop cutting
ప్రయోగం	-	Experiment
ధరల గణాంకాలు	-	Price statistics
వినియోగ పద్ధతి	-	Consumption pattern
చట్రము	-	Frame
భూకమతాలు	-	Land holdings
నమూనా పరిమాణం	-	Sample size
వర్గం	-	Stratum
ఉపవిడత	-	Sub-round
క్రమబద్ధ చక్రీయ	-	Circular systematic
అంచనా విధానం	-	Estimation procedure
సమష్టి విలువ	-	Aggregate value
సామాన్య హోదా	-	Usual status
మారకం	-	Exchange
శ్రామిక శక్తి	-	Labour force
క్రమబద్ధ పనివారు	-	Regular employees
ఆకస్మిక పనివారు	-	Casual labour
కేంద్ర గణాంక సంస్థ	-	Central Statistical Organisation(CSO)
జాతీయ నమూనా సర్వే	-	National Sample Survey (NSS)
జాతీయ నమూనా సర్వే సంస్థ	-	National Sample survey Organisation (NSSO)
భారతీయ గణాంక సంస్థ	-	Indian Statistical Institute (ISI)

- ఆచార్య ఎస్. సుబ్రహ్మణ్యం

B R A O U

భాగం - 29 : సూచీ సంఖ్యలు

విషయ క్రమం

29.0 ఉద్దేశం

29.1 పరిచయం

29.2 ఆధారాన్ని ఎంపిక చేయుట

29.2.1 స్థిర ఆధార పద్ధతి

29.2.2 గొలుసు ఆధార పద్ధతి

29.2.3 సగటు ఆధార పద్ధతి

29.3 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులు

29.3.1 స్థిర ఆధార పద్ధతి

29.3.2 ఉదాహరణలు

29.4 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు

29.5 పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు

29.6 ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యలు

29.7 ప్రత్యేక సూచీ సంఖ్యలు

29.7.1 ధరల సూచీ సంఖ్యలు

29.7.2 పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు

29.8 సారాంశం

29.9 భావనలు

29.10 అవగాహన ప్రశ్నలు

29.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

29.12 సంప్రదింపు గ్రంథాలు

29.13 పదకోశం

BRAOU

29.0 ఉద్దేశం

ఒక చలరాశిలో గాని, కొన్ని సంబంధిత చలరాశుల సమూహంలో గాని , కాలానుగుణంగా గానీ, భౌగోళికంగా గానీ, మార్పులు సంభవిస్తే, ఆ మార్పులను కొలవడానికి ఉపయోగపడే ఒక సాంఖ్యాక సాధనం " సూచీ సంఖ్య ". సూచీ సంఖ్య కూడా ఒక రకమైన సగటు ; సాధారణంగా మొత్తం వస్తువులకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తున్న కొన్ని వస్తువుల ప్రతిచయనం నుండి గణించిన సగటు. సూచీ సంఖ్యలలో గల వివిధ రకాలను, వాటి ఉపయోగాలను, వాటిని నిర్మించడంలో (గణనలో) గల సమస్యలను చర్చించడం ఈ యూనిట్ ముఖ్యోద్దేశం.

29.1 పరిచయం

సాధారణంగా సూచీ సంఖ్యలను గురించి కొన్ని పరిశీలనలను మనం తరచూ గమనిస్తూ వుంటాం. ఉదాహరణకు, " వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య (consumer's price index) క్రిందటి సంవత్సరం కంటే ఈ సంవత్సరం యిన్ని పాయింట్లు పెరిగింది ", " ఒక పట్టణంలో కంటే మరొక పట్టణంలో జీవన ప్రమాణ వ్యయం (cost of living index) ఎక్కువగా ఉంది " మొదలైన పరిశీలనలను మనం వింటూ ఉంటాం. ఇటువంటి పరిశీలనలన్నీ కూడా " సూచీ సంఖ్య " అనే భావనపై ఆధారపడి ఉంటాయి. అయితే, సూచీ సంఖ్యలకు అన్ని పరిస్థితులకు, అన్ని పద్ధతులకు సరిపోయేటట్లు ఒకే నిర్వచనం యివ్వడం సాధ్యపడదు. కాని, సూచీ సంఖ్యను యీ క్రింది విధంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

వివిధ పరిస్థితులలో కొన్ని సంబంధిత వస్తువుల ధరలలో గాని , పరిమాణాలలో గాని, విలువలలో గాని యేర్పడే వ్యత్యాసాలను తులనాత్మకంగా పరిశీలించడానికి (comparitive analysis) " సూచీ సంఖ్య " ను వాడుతాం. ఈ తులనాత్మక పరిశీలనను రెండు కాలాల మధ్యగాని, రెండు స్థలాల మధ్యగాని జరుపుతాం. ఈ పరిశీలన ధరల గురించి అయినప్పుడు , ఆ సూచీ సంఖ్యను " ధరల సూచీ సంఖ్య " (index number of prices) అని, పరిమాణాల గురించి అయినప్పుడు దానిని " పరిమాణాల సూచీ సంఖ్య" (index number of quantities) అని అంటాం. సూచీ సంఖ్యలను ధరల విషయంలోనూ, పరిమాణాల విషయంలోనే కాకుండా మిగిలిన రాశులకు కూడా నిర్మించవచ్చు.

ప్రస్తుత సమయంలో ఉన్న పరిస్థితిని మరొక సమయంలో ఉన్న పరిస్థితితో పోలుస్తున్నప్పుడు, ఆ మరొక సమయాన్ని ఆధార సమయం (base period) అని అంటాం. ఆధార సమయంలో సంబంధిత విలువను (ఆ విలువ ధర అయినా, పరిమాణం అయినా, యింకేదైనా కావచ్చు) 100గా తీసుకొని, ప్రస్తుత విలువను ఆధార సమయంలో ఉన్న విలువలో శాతంగా తెలియబరుస్తాం. ఉదాహరణకు, ఒక పట్టణంలో 1960లో టోకు ధరల సూచీ సంఖ్య (wholesale price index) తో పోలిస్తే 1972లో 187 ఉంది అని అంటే అర్థం, 1960లో టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యను 100 అనుకొంటే 1972లో అది 87% పెరిగింది. అయితే దీని అర్థం అన్ని ధరలు ఈ విధంగా పెరిగాయని కాదు. కొన్ని వస్తువుల ధరలు తగ్గవచ్చు, కొన్ని పెరగవచ్చు. కాని మొత్తం పరిస్థితి అంచనా వేస్తే , ఈ ధరల స్థాయి 1972లో 0.87 శాతం పెరిగిందని అర్థం. ఈవిధంగా, ప్రస్తుత ధర P_1 అయి, ఆధార సమయంలో ధర P_0 అయితే, $\frac{P_1}{P_0} X100 = \frac{\text{ప్రస్తుత ధర}}{\text{ఆధార సమయంలో ధర}} X\ 100$ ను సంబంధిత సూచీ సంఖ్యగా నిర్వచిస్తాం. దీనినే సాపేక్ష ధర (price relative) అని గూడా అంటాం. ధరల విషయంలోనే కాకుండా, మిగిలిన వాటికి గూడా సాపేక్ష విలువలను (relative values) తయారు చేయవచ్చు. ఈ సాపేక్ష విలువలు సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనే సూత్రాలలో చోటు చేసుకుంటాయి.

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఆధార సమయం, వస్తువుల ఎంపిక, నిర్మించే పద్ధతి యివన్నీ గూడా చాలా ముఖ్యమైన పాత్రను వహిస్తాయని పై చర్చ వలన తెలుస్తున్నది. అందుచేత, ఆధార సమయాన్ని నిర్ణయించే పద్ధతులను 29.2 వ విభాగంలో చర్చిస్తాం. ఇందులో స్థిర ఆధారం (fixed base) , గొలుసు ఆధారం (chain base) అను రెండు పద్ధతులను తెలియజేస్తాం. సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడానికి వాడే వివిధ పద్ధతులను (సూత్రాలను) 29.3వ విభాగంలో తెలియజేస్తాం. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను 29.4 వ విభాగంలో చర్చిస్తాం. పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలను 29.5 వ విభాగంలో ప్రవేశపెడతాం. ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య (ideal index number) కు ఉండవలసిన లక్షణాలు యేమిటి, వాటిని యే విధంగా పరీక్షిస్తాం అనే విషయాలను 29.6వ విభాగంలో గమనించగలం. కొన్ని ముఖ్యమైన సూచీ సంఖ్యలను 29.7 వ విభాగంలో ప్రవేశపెట్టాం.

BRAOU

29.2 ఆధారంను ఎంపిక చేయుట (Selection of Base)

ప్రతీ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో ఆధారం ఎంపిక చాలా ముఖ్యం. ఎంచుకున్న ఆధారం ఎటువంటి వైపరీత్యాలకు గురి కాకుండా ఉండాలి. ఉదాహరణకు, ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నప్పుడు, ఆధార సమయంలో యుద్ధాలు, కరువులు, భూకంపాలు, వరదలు మొదలైన ఏ ప్రకృతి వైపరీత్యాలు ఉండకూడదు. ఎందుకంటే, యిటువంటి వైపరీత్యాల ప్రభావం ధరలపై యెక్కువగా ఉండి, నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య వాస్తవ దూరమై ఉపయోగపడే పరిస్థితిలో ఉండదు.

సాధారణంగా ఆధార సమయాలను (a) స్థిర ఆధార పద్ధతి (Fixed Base Method) (b) గొలుసు ఆధార పద్ధతి (Chain Base Method) (c) సగటు ఆధార పద్ధతి (Average Base Method) అను పద్ధతుల ద్వారా ఎంచుకుంటాం. ఈ విభాగంలో ఈ పద్ధతులను చర్చిస్తాం.

29.2.1 స్థిర ఆధార పద్ధతి (Fixed Base Method)

స్థిర ఆధార పద్ధతిలో, ఒక సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరంగా స్థిరపరచి, ఆ ఆధార సంవత్సరంలో ధరలను 100గా పరిగణిస్తాం. అప్పుడు మిగిలిన సంవత్సరాలలో సాపేక్ష ధరలే కావలసిన సూచీ సంఖ్యలు అవుతాయి. క్రింది ఉదాహరణలో యిటువంటి సూచీ సంఖ్యలను పట్టిక ద్వారా చూపినాము.

(i) సరళ సూచీ సంఖ్యలు (Simple Index Numbers)

ఉదా 1 : ఒక వస్తువు (ఉదా ॥ బియ్యం) నకు ధరల సూచీ సంఖ్య :

సంవత్సరం	బియ్యం ధర క్వింటాలుకు (రూపాయలలో)	సూచీ సంఖ్య 1960 ఆధార సంవత్సరంగా	సూచీ సంఖ్య 1957 ఆధార సంవత్సరంగా
1957	40	80	100
1958	36	72	90
1959	48	96	120
1960	50	100	125
1961	44	88	110
1962	52	104	130
1963	46	92	115

ఈ పట్టికలో రెండు ఆధారాలను తీసుకొని సంబంధిత సూచీ సంఖ్యలను ఒక వస్తువునకు నిర్మించడం చూపినాం. ఉదాహరణకు, 1960ను ఆధారంగా తీసుకుంటే, 1963లో సూచీ సంఖ్య $= \frac{46}{50} x100 = 92.$

అదే విధంగా 1957ను ఆధారంగా తీసుకుంటే, 1963లో సూచీ సంఖ్య $= \frac{46}{40} x100 = 115.$ ఇదేవిధంగా మిగిలిన సంవత్సరాలలో సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించాము.

BRAOU

(ii) సంయుక్త సూచీ సంఖ్యలు (Composite Index Numbers)

వస్తువుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు, ఒక్కొక్కదాని సాపేక్ష ధరలను విడివిడిగా ఒక సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా తీసుకుని కనుక్కుంటాం. అటువంటి సాపేక్ష ధరల సగటే సంయుక్త సూచీ సంఖ్య. ఈ సాపేక్ష ధరల సగటును కనుక్కొంటున్నప్పుడు, అంక, గుణ, హార మధ్యమాలను గాని, మధ్యగతమునుగాని, బాహుళకాన్ని గాని వాడవచ్చు. అయితే, సాధారణంగా అంకమధ్యమాన్నే వాడడం జరుగుతుంది. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదా 2 : బియ్యం, గోధుమలు, రాగులకు ధరల సూచీ సంఖ్య (1957 ఆధారంగా)

సంవత్సరం	బియ్యం ధర క్వింటాలుకు (రూ॥లలో)	గోధుమ ధర క్వింటాలుకు (రూ॥లలో)	రాగుల ధర క్వింటాలుకు (రూ॥లలో)	సూచీ సంఖ్యలు			సంయుక్త సూచీ సంఖ్య
				బియ్యం	గోధుమలు	రాగులు	
1957	40	25	20	100	100	100	100
1958	36	21	24	90	84	120	98
1959	48	27	21	120	108	105	111
1960	50	26	22	125	104	110	113
1961	44	23	19	110	92	95	99
1962	52	28	23	130	112	115	119
1963	46	24	17	115	96	85	98.67

ఈ ఉదాహరణలో, 1957ను ఆధారంగా తీసుకుని, ప్రతీ సంవత్సరానికి, మూడు వస్తువుల సాపేక్ష ధరలకు సరళ అంకమధ్యమాన్ని సంయుక్త సూచీ సంఖ్యగా తీసుకున్నాము. ఇందులో ఏ వస్తువుకు భారం (weight)ను యివ్వలేదు. అందుచేత ఈ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో మామూలు అంకమధ్యమాన్ని వాడాము. కాని, కొన్ని సందర్భాలలో కొన్ని వస్తువుల ప్రాముఖ్యతను బట్టి ఆ వస్తువులకు భారములు యివ్వవలసి వుంటుంది. అప్పుడు ఆ వస్తువుల సాపేక్ష ధరలకు భారిత అంకమధ్యమం (weighted arithmetic mean) నిర్ణయించి దానిని సంయుక్త సూచీ సంఖ్యగా తీసుకుంటాం.

BRAOU

29.2.2 గొలుసు ఆధార పద్ధతి (Chain Base Method)

ఏడాది ఏడాదికీ పరిస్థితులను సరిపోల్చాలని అనుకున్నప్పుడు, సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు ఆధార పద్ధతి అనే పద్ధతి ద్వారా నిర్ణయించవలసి ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సరాన్ని దాని తరువాత సంవత్సరానికి ఆధారంగా తీసుకుంటాం. మొదటి యేడాదిని మాత్రం దానికదే ఆధారంగా పరిగణిస్తాం. ఉదాహరణకు, 1957, 58, 59, 60, 61 లకు సూచీ సంఖ్యలను కనుక్కోదలచుకుంటే, 1961 కు 1960ను ఆధారంగా, 1960కు 1959ని, 1959కు 1958ని, 1958కు 1957ను, 1957కు 1957నే ఆధారంగా తీసుకుంటాం.

ఇటువంటి సూచీ సంఖ్యలు సాధారణంగా వ్యాపార విషయాలలో అవసరమవుతాయి. ఎందుకంటే వ్యాపారంలో పరిస్థితులలో వ్యత్యాసాలను అంతకు ముందు సంవత్సరంతో పోల్చడం వలన యెక్కువ ఉపయోగం ఉంటుంది తప్ప, ఎప్పుడో జరిగిన పరిస్థితితో పోలిస్తే అంత ఉపయోగం ఉండదు. ఇటువంటి సూచీ సంఖ్యలు ఋతు వ్యత్యాసాల (seasonal variations) నుండి, స్థిర ఆధారం నుంచి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యల కంటె, స్వతంత్రంగా ఉంటాయి. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదా 3 : బియ్యం ధర సూచీ సంఖ్య (గొలుసు ఆధార పద్ధతిలో)

సంవత్సరం	బియ్యంధర క్వింటాలుకు (రూ॥లలో)	గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలు
1957	40	(40/40) × 100 = 100
1958	36	(36/40) × 100 = 90
1959	48	(48/36) × 100 = 133.3
1960	50	(50/48) × 100 = 104.2
1961	44	(44/50) × 100 = 88
1962	52	(52/44) × 100 = 118.2

29.2.3 సగటు ఆధార పద్ధతి (Average Base Method)

ఈ పద్ధతిలో యిచ్చిన అన్ని సంవత్సరాలలో ధరల సగటును ఆధార సమయంలో విలువగా తీసుకుంటాం. ఈ పద్ధతి వలన యేదైనా ఒక సంవత్సరంలో వైపరీత్యాలు ఉన్నా, దాని ప్రభావం బాగా తగ్గించడానికి వీలుపడుతుంది. క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి.

ఉదా 4 :

సంవత్సరం	1957	1958	1959	1960	1961
ధర (రూపాయకు)	2.5 కె.జి.లు	4 కె.జి.లు	3.125 కె.జి.లు	3.5 కె.జి.లు	2.536 కె.జి.లు

ధరలను రూపాయకు ఎన్ని కె.జి.లో పట్టికలో ఇవ్వడమైనది. దానిని బట్టి క్వింటాలుకు ఎంత ధరో కనుక్కుంటాం. క్వింటాలు అనగా 100 కె.జి.లు ఉదాహరణకు, 1957లో 1 రూ ॥ కు 2.5 కె.జి.లు. కాబట్టి 100 కె.జి.ల ధర $\frac{100x1}{2.5} = 40$. అదేవిధంగా 1958లో ఒక క్వింటాలు ధర $\frac{100x1}{4} = 25$. ఈవిధంగా ధరలను తయారు చేసి వాటి సగటును ఆధార సమయంలో ధరగా తీసుకొని, సూచీ సంఖ్యలను కనుక్కుంటాం. క్రింది పట్టికలో ఈ పద్ధతిని చూపినాము.

ఐదేళ్ల సగటు ధరను ఆధారంగా తీసుకొని కనుక్కునే ధరల సూచీ సంఖ్యను చూపే పట్టిక :

సంవత్సరం	క్వింటాలు ధర (రూపాయలలో)	సగటు ధర (ఆధార సమయంలో ధర (రూ ॥లలో)	సూచీ సంఖ్య
1957	40	[40 + 25 + 32 +28.57+39.43] /5 = 33	(40/33) x 100 = 121.2
1958	25		(25/33) x 100 = 75.8
1959	32		(32/33) x 100 = 97.0
1960	28.57		(28.57/33)x100 = 86.6
1961	39.43		(39.43/33) x 100 = 119.5

BRAOU

భారిత సంఘటిత సూచీ సంఖ్య $= \frac{\Sigma P_1 W}{\Sigma P_0 W} X 100 = \frac{1870}{1571} X 100 = 119.03$

వివిధ వస్తువులకు భారాలను రకరకాలుగా ఇవ్వవచ్చు. భారాలను యిచ్చే ఒక్కొక్క పద్ధతికి అనుగుణంగా సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనే ఒక్కొక్క సూత్రం వస్తుంది. అటువంటి సూత్రాలను క్రింద పేర్కొన్నాం.

1. **లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య**

ఆధార సమయంలో పరిమాణాలను భారాలుగా వాడితే, వచ్చే సూచీ సంఖ్యను లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య (Laspeyre's Index) అంటాం.

లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య $$I_{01} = \frac{P_1^1 Q_0^1 + P_1^2 Q_0^2 + P_1^3 Q_0^3 + \ldots + P_1^n Q_0^n}{P_0^1 Q_0^1 + P_0^2 Q_0^2 + P_0^3 Q_0^3 + \ldots + P_o^n Q_0^n} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times 100$$

$$= \frac{\text{ప్రస్తుత ధరల వద్ద ఆధార సమయంలో పరిమాణాల విలువల మొత్తం}}{\text{ఆధార సమయంలో ధరల వద్ద ఆధార సమయంలో పరిమాణాల విలువల మొత్తం}} \times 100$$

2. **పాషే సూచీ సంఖ్య**

ప్రస్తుత సమయంలో పరిమాణాలను భాగాలుగా వాడితే వచ్చే సూచీ సంఖ్యను పాషే సూచీ సంఖ్య (Paasche's Index) అని అంటాం.

పాషే సూచీ సంఖ్య $$I_{01} = \frac{P_1^1 Q_1^1 + P_1^2 Q_1^2 + P_1^3 Q_1^3 + \ldots + P_1^n Q_1^n}{P_0^1 Q_1^1 + P_0^2 Q_1^2 + P_0^3 Q_1^3 + \ldots + P_o^n Q_1^n} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1} \times 100$$

$$= \frac{\text{ప్రస్తుత ధరల వద్ద ప్రస్తుత పరిమాణాల విలువల మొత్తం}}{\text{ఆధార సమయంలో ధరల వద్ద ప్రస్తుత పరిమాణాల విలువల మొత్తం}} \times 100$$

గమనిక: (a) లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలో ప్రస్తుత పరిమాణాలను వాడలేదు, ప్రస్తుత ధరలను వాడాం. అందుచేత ప్రస్తుత ధరలను సేకరిస్తే చాలు, ప్రస్తుత పరిమాణాల గురించి సమాచారం అవసరం లేదు. కానీ పాషే సూచీ సంఖ్యలో ప్రస్తుత ధరలను, పరిమాణాలను కూడా సేకరించవలసి ఉంటుంది. ఈ విధంగా పాషే సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడంలో విషయసేకరణకు ఎక్కువ శ్రమ పడవలసి ఉంటుంది.

(b) లేస్ పియర్ సూచీ సంఖ్యలో Q_0 లకు బదులు Q_1 లను ప్రతిక్షేపిస్తే, పాషే సూచీ సంఖ్య వస్తుంది.

3. **మార్షల్ - ఎడ్జివర్త్ సూచీ సంఖ్య (Marshall - Edgeworth's Index)**

ఆధార సమయంలోనూ, ప్రస్తుత సమయంలోనూ ఉన్న పరిమాణాల మొత్తాన్ని గాని, సగటుని గాని, భారాలుగా వాడితే వచ్చే సూచీ సంఖ్యను మార్షల్ - ఎడ్జివర్త్ సూచీ సంఖ్య అంటాం.

B R A O U

మార్షల్ -ఎడ్జివర్త్ సూచిసంఖ్య $(I_{01}) = \frac{P_1^1(Q_0^1+Q_1^1)+P_1^2(Q_0^2+Q_1^2)+\ldots+P_1^n(P_o^n+Q_1^n)}{P_0^1(Q_0^1+Q_1^1)+P_0^2(Q_0^2+Q_1^2)+\ldots+P_0^n(Q_o^n+Q_1^n)} X\ 100$

4. బౌలీ సూచీ సంఖ్య $= \frac{\Sigma P_1(Q_0+Q_1)}{\Sigma P_0(Q_0+Q_1)} X\ 100$

లేస్పియర్, పాషే సూచీ సంఖ్యల సగటును బౌలీ సూచీ సంఖ్య (Bowley's Index) అని అంటాం.

బౌలీ సూచీ సంఖ్య $(I_{01}) = \frac{1}{2}$ (Laspeyre's Index + Paasche's index)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} + \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}\right) X\ 100$$

II. సాపేక్ష పద్ధతి (Method of Relatives)

(a) సరళ సంఘటిత పద్ధతి

ఏదైనా ఒక పరిమాణానికి ఒక సంవత్సరంలో గల విలువను ఆ పరిమాణానికి ఆధార సంవత్సరంలో గల విలువలో శాతంగా కనుగొంటే, ఆ శాతాన్ని ఆ పరిమాణానికి ఆ సంవత్సరంలో సాపేక్ష విలువ అంటాం. ధరల విషయంలో యీ సాపేక్ష విలువను సాపేక్ష ధర అని అంటాం. ఒక వస్తువు యొక్క ధర ఒక సంవత్సరంలో P_1 అయి, ఆధార సంవత్సరంలో P_0 అయితే, ఆ సంవత్సరంలో దాని సాపేక్ష ధర $\frac{P_1}{P_0} x\ 100$ అవుతుంది.

ఉదాహరణకు, ఒక వస్తువు ధర 1960లో రూ. 10, 1961లో రూ. 11. అయితే, 1961లో దాని సాపేక్ష ధర $\frac{11}{10} x\ 100 = 110$ అవుతుంది.

ఈ సాపేక్ష విలువల ద్వారా కొన్ని వస్తువులకు సంఘటిత సూచీ సంఖ్యను కనుగొనాలంటే, ఆ సముదాయంలో ఉన్న ఒక్కొక్క వస్తువుకు సాపేక్ష విలువను కనుగొని, ఆ సాపేక్ష విలువలకు సగటును కనుగొనాలి. ఈ సగటు యే సగటైనా కావచ్చు. అనగా అంకమధ్యమంగాని, మధ్యగతం గాని, గుణమధ్యమంగాని, హారమధ్యమం గాని కావచ్చు. కాని, సాధారణంగా అంకమధ్యమాన్నే వాడుతాం. ఒక సముదాయంలో N వస్తువులు ఉంటే, వాటి సాపేక్ష విలువల ద్వారా కనుగొనే సంఘటిత సూచీ సంఖ్య

$$= \frac{\frac{P_1^1}{P_0^1} X\ 100 + \frac{P_1^2}{P_0^2} X\ 100 + \frac{P_1^3}{P_0^3} X\ 100 + \ldots + \frac{P_1^N}{P_0^N} X\ 100}{N} = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} X\ 100\right)$$

(b) భారిత సంఘటిత పద్ధతి

పైవిధంగా సరళ సంపుటిత పద్ధతి ద్వారా కనుగొనే సూచీ సంఖ్య వాస్తవ పరిస్థితిని తెలియబరచలేదు. ఎందుకంటే, ఆ సముదాయంలో గల వస్తువుల ధరల మార్పులను ఈ సూత్రం పరిగణనలోనికి తీసుకోలేదు.

B R A O U

ఈ సూత్రంలో గల యీ విధమైన లోపాన్ని సరిదిద్దడానికి భారిత సంఘటిత పద్ధతిని వాడుతాం. ఈ పద్ధతిలో ప్రతీ సాపేక్ష ధరకు ఆ వస్తువు యొక్క విలువను (అనగా, ధర × ఆ ధర వద్ద కొనుగోలు చేయు వస్తు పరిమాణం) భారంగా యిస్తాం. ఈ భారాలను విలువల భారాలు (Value weights) అంటాం. ఆధార సమయంలో విలువలు తీసుకుంటే, ఈ భారాలు $P_0^1 Q_0^1, P_0^2 Q_0^2, \ldots, P_0^N Q_0^N$ అవుతాయి. ప్రస్తుత సంవత్సరంలో విలువలు తీసుకుంటే, ఈ భారాలు $P_1^1 Q_1^1, P_1^2 Q_1^2, \ldots, P_1^N Q_1^N$ అవుతాయి.

ఆధార సమయంలో విలువలను భారాలుగా తీసుకుంటే ఈ సూచీ సంఖ్యకు సూత్రం

$$= \frac{\Sigma \frac{P_1}{P_0} X P_0 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} = \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0}$$

అయితే యీ సూత్రం, ఆధార సమయంలో విలువలనే భారాలుగా తీసుకున్నప్పుడు, అంకమధ్యమాన్నే సగటుగా తీసుకున్నప్పుడు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

29.3.2 ఉదాహరణలు

పై సూత్రాలను ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనే పద్ధతిని క్రింది ఉదాహరణలలో గమనించవచ్చు.

ఉదా 1 : క్రింది దత్తాంశం నుండి (a)లేస్ పియర్ (b) పాషే (c)మార్షల్ - ఎడ్జివర్త్ సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

	1960		1970	
వస్తువు	ధర	పరిమాణం	ధర	పరిమాణం
A	4	50	10	40
B	3	10	9	2
C	2	5	4	2

B R A O U

సాధన :

వస్తువు	1960 ధర (P_0)	1960 పరిమాణం (Q_0)	1970 ధర (P_1)	1970 పరిమాణం (Q_1)	P_0Q_0	P_0Q_1	P_1Q_0	P_1Q_1
A	4	50	10	40	200	160	500	400
B	3	10	9	2	30	6	90	18
C	2	5	4	2	10	4	20	8
మొత్తం					240	170	610	426

1970 సూచీ సంఖ్య :

(a) లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య $= \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} X\ 100 = \frac{610}{240} X\ 100 = 254.2$

(b) పాషీ సూచీ సంఖ్య = $\dfrac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1} \times 100 = \dfrac{426}{170} \times 100 = 250.6$

(c) మార్షల్ - ఎడ్జివర్త్ సూచీ సంఖ్య = $\dfrac{\Sigma P_1 (Q_o+Q_1)}{\Sigma P_0 (Q_o+Q_1)} \times 100$

$$\frac{\Sigma P_1Q_o + \Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_o + \Sigma P_0Q_1} \times 100 = \frac{610 + 426}{240 + 170} \times 100$$

$$= \frac{1036}{410} \times 100 = 252.7$$

ఉదా 2 : 5 వస్తువుల ధరలు 1951లోనూ 1965 లోనూ క్రింద ఇవ్వబడినవి. 1965కు సూచీ సంఖ్యను 1951ను ఆధారంగా తీసుకొని సాపేక్ష ధరల భారిత సగటును ఉపయోగించి కనుగొనండి.

వస్తువు	1951 ధర (రూ ॥లలో)	పరిమాణం	1965 ధర (రూ ॥లలో)
A	6	50	9
B	2	100	2
C	4	60	6
D	10	30	12
E	8	40	12

BRAOU

సాధన :

వస్తువు	1951 ధర (P_0)	పరిమాణం(Q_0)	P_0Q_0	1965 P_1	$\frac{P_1}{P_0} \times 100$	$\frac{P_1}{P_0} \times P_0Q_0$
A	6	50	300	9	150	45 000
B	2	100	200	2	100	20 000
C	4	60	240	6	150	36 000
D	10	30	300	12	120	36 000
E	8	40	320	12	150	48 000
మొత్తం			ΣP_0Q_0 =1360			$\Sigma \frac{P_1}{P_1} \times P_oQ_o$ = 185000

$$\therefore \text{ ధరల సూచీ సంఖ్య} = \frac{\sum \frac{P_1}{P_0} \times P_0 Q_0}{\sum P_0 Q_0} = \frac{1,85,000}{1360} = 136 \quad \text{(సుమారుగా)}$$

29.4 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు

సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించేటప్పుడు ఎదురయ్యే సమస్యలను ఈ విభాగంలో పరిశీలిస్తాం.

29.4.1 నిర్మాణ ఉద్దేశం

అన్ని సందర్భాలకు పనికివచ్చేటట్లు ఒకే సూచీ సంఖ్యను నిర్మించడం సాధ్యపడదు. మనం ఆశించిన ప్రయోజనానికి అనుగుణంగా సూచీ సంఖ్యను నిర్మించవలసి ఉంటుంది ; దానికి తగిన సమాచారాన్ని సేకరించవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, వ్యవసాయోత్పత్తిని తెలియజేసే సూచీ సంఖ్యను నిర్మించాలంటే, వ్యవసాయ ఉత్పత్తులకు సంబంధించిన సమాచారాన్ని సేకరించాలి. అదేవిధంగా, టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మించదలచుకుంటే, టోకు ధరలను మాత్రమే సేకరించాలి ; వస్తువుల చిల్లర ధరలు తీసుకోకూడదు. జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించేటప్పుడు, ఏ స్థాయికి చెందిన వ్యక్తులకు లేదా ఏ ప్రాంతం లోని వ్యక్తులకు దానిని నిర్మిస్తున్నామో ; వారికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని మాత్రమే సేకరించాలి. ఉదాహరణకు, గ్రామీణ ప్రజల జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నప్పుడు, నగర వాసుల వివరాలు వాడకూడదు. కాబట్టి ఒక సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో ఉద్దేశాన్ని ముందుగానే నిర్ణయించుకోకపోతే లోపభూయిష్టమైన నిర్ణయం తీసుకునే అవకాశం ఉంటుంది.

29.4.2 ప్రాతినిధ్యం వహించే వస్తువులు

ఒక సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నప్పుడు, ఆ నిర్మాణంలో గల ఉద్దేశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే వస్తువులనే పరిగణించాలి. ఆవిధంగా కాకుండా అన్ని వస్తువులను పరిగణనలోకి తీసుకొంటే, ఆ సూచీ సంఖ్య వాస్తవాలను ప్రతిబింబించదు. ఉదాహరణకు, కార్మిక వర్గానికి చెందిన జీవన ప్రమాణ సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నప్పుడు, సాధారణంగా వారు వాడే వస్తువుల ధరలను మాత్రమే పరిగణించాలి, కానీ, అన్ని వస్తువుల ధరలు తీసుకోకూడదు. ఉదాహరణకు, కార్లు, స్కూటర్లు, రిఫ్రిజిరేటర్లు, టెలివిజన్‌లు మొదలైన వస్తువుల ధరలు తీసుకుంటే, ఆ సూచీ సంఖ్య అవాస్తవమైన పరిస్థితిని తెలియజేస్తుంది తప్ప, కార్మికుల నిజమైన స్థితిగతులను తెలియజేయదు. వారు సామాన్యంగా వాడుతున్న వస్తువులను తీసుకున్నప్పటికీ, వాటి నాణ్యతను గూడా పరిగణించవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, కార్మికులు వస్త్రాలను వాడుతారు కదా అని పాలిస్టర్, టెర్లిన్ వంటి వస్త్రాల ధరలను తీసుకున్నా, బియ్యం వాడుతారు కదా అని ఖరీదైన బియ్యం ధరలను తీసుకున్నా, అవాస్తవమైన సూచీ సంఖ్య వచ్చి, నిజమైన పరిస్థితిని తెలియజేయదు.

29.4.3 ధరల కొటేషన్

వస్తువులు నిర్ణయమైన తరువాత వాటి ధరలను సేకరించాలి. స్థలాలను బట్టి దుకాణాలను బట్టి ధరలు మారుతూ ఉంటాయి. అన్ని స్థలాల నుంచి, అన్ని దుకాణాల నుంచి ధరలు సేకరించడం కష్టం. కనుక పరిస్థితిని బట్టి ఏ స్థలం నుంచి ధరలను సేకరించాలి అని జాగ్రత్తగా పరిశీలించాలి. ఒక వస్తువు ఉత్పత్తి అయ్యే స్థలంలో ధర తక్కువగా ఉండడం, వేరే ప్రదేశంలో ధర యెక్కువగా ఉండడం సహజం. కనుక ఆ వస్తువును మార్కెట్‌లో యే ధరకు అమ్ముతున్నారో, అటువంటి నిర్ణీత ధరనే సేకరించాలి. ఆ ధరను కూడా ఒక ప్రదేశం నుంచి కాకుండా

BRAOU

కొన్ని ప్రదేశాల నుంచి, వారాంతంలో గాని, మాసాంతంలోగాని సేకరించి, వాటి సగటు ధరను తీసుకోవడం వలన సత్ఫలితాలను రాబట్టవచ్చు.

29.4.4 ఆధార సమయ నిర్ణయం

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ముఖ్యోద్దేశం ఒక సమయంలో పరిస్థితిని ఒక ఆధార సమయంలో పరిస్థితితో పోల్చి, ఆ పరిస్థితిలో యేటువంటి మార్పు వచ్చినది అని అంచనా వేయడం. కాబట్టి, సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో మనం తీసుకున్న ఆధార సమయం చాలా ప్రాముఖ్యత వహిస్తుంది. ఈ ఆధార సమయాన్ని నిర్ణయించడంలో క్రింది నియమాలను పాటించవలసి వుంటుంది.

(a) ఆధార సమయం అసాధారణమైనది కాకూడదు. కరువు కాటకాలు, వరదలు, కార్మిక సంక్షోభాలు, యుద్ధాలు, భూకంపాలు, వ్యాపార అస్థిరత్వాలు మొదలైన అసాధారణ పరిస్థితులు లేని సమయాన్నే ఆధార సమయంగా నిర్ణయించుకోవాలి. ఎందుకంటే, అటువంటి అసాధారణ పరిస్థితులలో ధరలు గాని మిగిలిన సామాజిక విషయాలు గాని నిలకడగా ఉండకుండా అవాస్తవిక పరిస్థితిని సూచిస్తాయి. కాబట్టి వాటి మీద ఆధారపడి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలు గూడా నిజమైన పరిస్థితిని తెలియజేయలేవు. అయితే, ఒక్కొక్కప్పుడు అన్ని విధాలా సామాన్యంగా ఉన్న సమయాన్ని ఎంచుకోవడం కష్టం కావచ్చు. అప్పుడు కొన్ని సంవత్సరాల సగటు విలువను ఆధార సంవత్సరంలో విలువగా పరిగణిస్తాం.

(b) సూచీ సంఖ్యలు స్వల్పకాలిక నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలోనూ, అనువైన ప్రణాళికలు రూపొందించడంలోనూ తోడ్పడతాయి. కనుక, ఆధార సమయం వీలైనంత సన్నిపాత గతంలోనిదై ఉండాలి ; అత్యంత దూరమైనది కాకూడదు. ఉదాహరణకు, 1985 సం ॥లో సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తున్నప్పుడు, 1910 సం ॥ ఆధార సంవత్సరంగా తీసుకోవడం అర్థవంతం కాదు. అంతేకాకుండా, ఆధార సమయాన్ని (i) స్థిరాధార పద్ధతి, (ii) గొలుసు పద్ధతి అని రెండు రకాలుగా తీసుకోవచ్చని యిదివరలో గమనించాం. ఈ పద్ధతిలో యేది మన సమస్యకు తగినదో చూసుకొని, దానినే వాడాలి.

29.4.5 సగటు నిర్ణయం

సూచీ సంఖ్యలు గూడా ఒక ప్రత్యేకమైన సగటులేనని యిది వరలో గమనించాం. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో అంక, గుణ, హార మధ్యమాలు, మధ్యగతం, బాహుళికం మొదలైన సగటులు వాడుతారు. అయితే, వివిధ సగటులకు కొన్ని ముఖ్యమైన లక్షణాలు, ఉపయోగాలు ఉన్నాయని మనకు తెలుసు. కాబట్టి, మనం వాడబోయే సగటు ధర్మాన్ని దృష్టిలో పెట్టుకొని , మనం నిర్మించబోయే సూచీ సంఖ్యను యే ఉద్దేశంతో నిర్మిస్తున్నాము అనే విషయాన్ని గూడా దృష్టిలో పెట్టుకొని, సరియైన సగటును నిర్ణయించుకోవడం వల్ల మంచి ఫలితాలను రాబట్టవచ్చు.

29.4.6 భారాల నిర్ణయం

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో అన్ని వస్తువులకు ఒకే ప్రాధాన్యతను యివ్వడం సమంజసం కాదు. వివిధ వస్తువుల అవసరాలు, ఉపయోగాలు బట్టి వాటికి ప్రాధాన్యత యివ్వవలసి ఉంటుంది. ఈ ప్రాధాన్యతలను నిర్ణయించేవే భారాలు. కాబట్టి వివిధ వస్తువులకు తగిన భారాలను ఎంచి సూచీ సంఖ్యను నిర్మించాలి. అటువంటి సూచీ సంఖ్యలను భారిత సూచీ సంఖ్యలు అంటామని యిదివరలో గమనించాం ఈ భారిత సూచీ సంఖ్యలను యేవిధంగా నిర్మించాలి అనే విషయాన్ని యిది వరకే చర్చించాం.

BRAOU

29.4.7 సూత్ర నిర్ణయం

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణానికి అనేక సూత్రాలు ఉన్నాయని గమనించాం. మనకు లభ్యమైన దత్తాంశాన్ని బట్టి, సందర్భాన్ని బట్టి, నిర్మాణ ఉద్దేశాన్ని బట్టి సరియైన సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి. అంతేకాకుండా, సాధారణంగా సూచీ సంఖ్యలు కొన్ని లక్షణాలను కలిగి ఉంటే అవి ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యలవుతాయని తరువాత విభాగంలో తెలియబరచాం. అటువంటి లక్షణాలను ప్రతిబింబించే సూచీ సంఖ్య నిర్మితమయ్యేటట్లు తగిన సూత్రం ఉపయోగించుకోవడం మంచిది.

29.5 పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు (Quantity Index Numbers)

ధరల సూచీ సంఖ్యలు వస్తువుల ధరలలో మార్పును ఏవిధంగా తెలియబరుస్తాయో, అదేవిధంగా పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు ఉత్పత్తి చేస్తున్న వస్తువుల పరిమాణంలోనూ, వినియోగిస్తున్న వస్తువుల పరిమాణంలోనూ, పంపిణీ అవుతున్న వస్తువుల పరిమాణంలోనూ మార్పులను తెలియజేస్తాయి. ధరల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఉన్న సమస్యలు, పద్ధతులు యేవిధంగా అయితే ఉన్నాయో, అదే రకమైన సమస్యలు, పద్ధతులు పరిమాణ సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో గూడా ఎదురౌతాయి. అయితే, పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలను పరిమాణాలలో గల తేడాలను కొలవడానికి వాడుతాము. కాబట్టి, పరిమాణాలు టన్నులని, లీటర్లని, మీటర్లని, వివిధ యూనిట్లలో ఉంటాయి కాబట్టి ; ఈ పరిమాణాలను మొత్తం చేయడానికి వీలులేదు. కాబట్టి, ధరల సూచీ సంఖ్యలలో మాదిరిగా, సరళ సంపుటిత పద్ధతి (Simple aggregate method) ని యిక్కడ వాడడానికి వీలుపడదు.

కాని యిచ్చిన సంవత్సరంలో పరిమాణాలను ఆధార సంవత్సరంలో పరిమాణాలలో సాపేక్షంగా తెలియబరిస్తే, యీ రకమైన సమస్యను ఎదుర్కోవచ్చు. అటువంటి సమయంలో, ఆ పరిమాణాల సాపేక్ష విలువల సగటే కావలసిన పరిమాణాల సూచీ సంఖ్య అవుతుంది. కాబట్టి, పరిమాణాల సూచీ సంఖ్య

$$= \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)$$

ఈ పరిమాణాల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ధరలను గాని, విలువలనుగాని భారాలుగా యిచ్చి భారిత పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలను గూడా నిర్మించవచ్చు. ఆధార సమయంలో విలువలను ($P_0 Q_0$ లను) పరిమాణ సాపేక్ష విలువలకు ($\frac{Q_1}{Q_0}$ లకు) భారాలుగా యిస్తే,

$$\text{భారిత సూచీ సంఖ్య} = \frac{\Sigma \frac{Q_1}{Q_0} \times P_0 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} = \frac{\Sigma Q_1 P_0}{\Sigma Q_0 P_0} \quad \text{అవుతుంది.}$$

క్రింది ఉదాహరణను గమనించండి

ఉదా : క్రింది దత్తాంశం నుండి పరిమాణ సూచీ సంఖ్యను కనుగొనండి.

భారిత సంఘటిత పరిమాణాలను భారాలుగా వాడండి.

వస్తువు	1960		1970
	ధర	పరిమాణం	పరిమాణం
A	40	20	25
B	30	15	20
C	10	10	10
D	20	5	10

సాధన :

వస్తువు	1960			1970	
	ధర (Po)	పరిమాణం(Qo)	P_0Q_0	పరిమాణం (Q_1)	Q_1P_0
A	40	20	800	25	1,000
B	30	15	450	20	600
C	10	10	100	10	100
D	20	5	100	10	200
మొత్తం			$\Sigma P_0 Q_0 = 1450$		$\Sigma Q_1 P_0 = 1900$

$$\therefore \text{ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య } = \frac{\Sigma Q_1 P_0}{\Sigma Q_0 P_0} X\ 100 = \frac{1900}{1450} X\ 100 = 131 \quad \text{(సుమారుగా)}$$

పరిమాణాల సాపేక్ష విలువలకు భారిత సగటును వాడి ఈ సూచీ సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు. క్రింది పట్టికను చూడండి.

వస్తువు	1960		$P_0 Q_0$	1970 పరిమాణం (Q_1)	$\frac{Q_1}{Q_0} X\ 100$	$\frac{Q_1}{Q_0} X\ P_0 Q_0$
	ధర (P_0)	పరిమాణం (Q_0)				
A	40	20	800	25	125	1,00,000
B	30	15	450	20	133.33	59,998
C	10	10	100	10	100	10,000
D	20	5	100	10	200	20,000
మొత్తం			1450			1,89,998

$\therefore$ పరిమాణ సూచీ సంఖ్య = $\sum \frac{Q_1}{Q_0} X P_0 Q_0 = \frac{1,89,998}{1450} = 131.$

29.6 ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యలు (Ideal Index Numbers)

ఒక సూచీ సంఖ్య ఆదర్శమైనదా కాదా అని తెలుసుకోవడానికి కొన్ని పరీక్షలు చేయవలసి ఉంటుంది. ఆ పరీక్షలలో ఎక్కువ వాటిలో నెగ్గితే దానిని ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యగా భావిస్తాం. ఆ పరీక్షలు మూడు రకాలు (1) కాల విపర్యయ పరీక్ష (time reversal test), (2) కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్ష (factor reversal test) (3) చక్రీయ పరీక్ష (circular test).

ఈ విభాగంలో ఈ పరీక్షలను తెలియబరచి, యే సూచీ సంఖ్యలు యీ పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తాయో పరిశీలిస్తాం. అంతేకాకుండా, "ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య" (Fisher's index number) అనే ఒక సూచీ సంఖ్య ఆదర్శ సూచీసంఖ్య అవుతుందని గూడా ఈ విభాగంలో నిరూపిస్తాం.

29.6.1 కాల విపర్యయ పరీక్ష (Time Reversal Test)

ఒక సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వాడుతున్న సూత్రంలో కాలాన్ని ముందు వెనకలకు (forward and backward) తారుమారు చేయడం (అనగా, ఆధార సమయాన్ని ప్రస్తుత సమయాన్ని తారుమారు చేయడం) వలన వచ్చే సూచీ సంఖ్యలు ఒకదానికొకటి వ్యుత్క్రమం (reciprocal) అయితే, ఆ సూచీ సంఖ్య కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచినదని అంటాం. అనగా, ఆవిధంగా కాలాన్ని తారుమారు చేయడం వలన వచ్చే రెండు సూచీ సంఖ్యల లబ్ధం ఒకటికావాలి. ఉదాహరణకు, 1961ను ఆధార సమయంగా తీసుకొని 1965కు నిర్మించిన సూచీసంఖ్య, 1965ను ఆధార సంవత్సరంగా తీసుకొని 1961 కు నిర్మించిన సూచీసంఖ్య ఒకదానికొకటి వ్యుత్క్రమం అయితే, అనగా, రెండింటి లబ్ధం ఒకటి అయితే, ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరచినట్లు భావిస్తాం. ఉదాహరణకు 1963తో పోలిస్తే, 1963లో ఒక వస్తువు ధరలో పెరుగుదల 1 కి .గ్రా. ఒక్కింటికి 1 రూ ॥ కాగా, 1964లో ఆ వస్తువు ధరలో పెరుగుదల 1 కి . గ్రా. ఒక్కింటికి 2 రూ॥ అయితే, 1964లో ధర 1963లో ధరకు 200% ఉందని, 1963లో ధర 1964లో ధరకు 50% ఉంధని అంటాం. అప్పుడు ఈ రెండు సూచీ సంఖ్యలు ఒకదానికొకటి వ్యుత్క్రమాలు అయి, రెండింటి లబ్ధం = 2.00 × 0.50 =1 అయింది. కాబట్టి కాల విపర్యయ పరీక్షను ఈ సూచీ సంఖ్య సంతృప్తి పరిచింది.

ఆధార సమయంతో పోలిస్తే ప్రస్తుత సమయంలో సూచీ సంఖ్యను I_{01} అని, ప్రస్తుత సమయంతో పోలిస్తే ఆధార సమయంలో సూచీ సంఖ్యను I_{10} అని, అంటే (100 గుణకాన్ని వదలి వేయగా), $I_{01} \times I_{10} = 1$ అయినప్పుడు, ఆ సూచీ సంఖ్య కాల విపర్యయ న్యాయాన్ని పాటించినదని అంటాం.

లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య (L) = $\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}$ యీ కాల విపర్యయ న్యాయాన్ని సంతృప్తి పరచలేదు.

ఎందుకంటే యీ సూత్రం ప్రకారం, $I_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}$, ఇందులో ప్రస్తుత సమయాన్ని ఆధార సమయంగా

మారిస్తే, $I_{10} = \frac{\sum P_0 Q_1}{\sum P_1 Q_1}$ అని వస్తుంది. ఈ రెండింటి లబ్ధం $I_{01} \times I_{10} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times \frac{\sum P_0 Q_1}{\sum P_1 Q_1} \neq 1$

కాబట్టి L కాల విపర్యయ న్యాయాన్ని సంతృప్తి పరచలేదు.

BRAOU

ఇదేవిధంగా పాషే సూచీ సంఖ్య (P) = $\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}$ గూడా ఈ కాల విపర్యయ న్యాయాన్ని సంతృప్తి పరచలేదు. ఎందుకంటే ఈ సూత్రం ప్రకారం $I_{01} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}$. ఇందులో ప్రస్తుత సమయాన్ని ఆధార సమయంగా మారిస్తే, $I_{10} = \frac{\sum P_0 Q_0}{\sum P_1 Q_0}$ అని వస్తుంది. అందుచేత

$I_{01} X I_{10} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} x \frac{\sum P_0 Q_0}{\sum P_1 Q_0} \neq 1$ అని వస్తుంది. కాబట్టి P గూడా యీ నియమాన్ని పాటించదు.

29.6.2 కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్ష (Factor Reversal Test)

ధరల సూచీ సంఖ్య, పరిమాణాల సూచీ సంఖ్యల లబ్దం ప్రస్తుత సమయంలో మొత్తం విలువకు, ఆధార సమయంలో మొత్తం విలువకు గల నిష్పత్తి అయితే, ఆ సూచీ సంఖ్య కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తున్నది అని అంటాం. కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తున్న సూచీ సంఖ్య, కాలాలను మార్పు చేసినా నిలకడ (consistent) గా ఉండాలని యేవిధంగా భావించామో, ఈ కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తున్న సూచీ సంఖ్య ధరలను, పరిమాణాలను తారుమారు చేయడం వలన నిలకడను పోగొట్టుకోకూడదు అని భావిస్తున్నాం.

అనగా, ఆధార సమయంతో పోలిస్తే ప్రస్తుత సమయంలో ధరల సూచీ సంఖ్యను I_{01} అని, పరిమాణాల సూచీ సంఖ్యను Q_{01} అని అంటే, $I_{01} X Q_{01} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0}$ అయితే, ఆ సూచీ సంఖ్య కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తున్నదని భావిస్తాం ($\sum P_1 Q_1$ ప్రస్తుత విలువల మొత్తం అని, $\sum P_0 Q_0$ ఆధార సమయంలో విలువ మొత్తం అని గమనించండి). లేస్పియర్ సూచీసంఖ్య(L) = $\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}$ ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేదు.

ఎందుకంటే యీ సూత్రం ప్రకారంగా $I_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0}$, $Q_{01} = \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0}$

అందుచేత, $I_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} X \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \neq \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0}$.

ఇదేవిధంగా పాషే సూచీ సంఖ్య (P) = $\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_o Q_1}$ గూడా ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరచదు.

29.6.3 ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య (Fisher's Ideal Index Number)

పై రెండు పరీక్షలను సంతృప్తి పరిచే ఒక సూచీ సంఖ్యను ఫిషర్ ప్రవేశపెట్టినాడు. ఫిషర్ ప్రకారంగా ఈ

సూచీ సంఖ్య (F) కు నిర్వచనం యేమనగా, $F = \sqrt{LP}$, L= లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య $= \frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0}$

P= పాషే సూచీ సంఖ్య $= \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}$. కాబట్టి పిషర్ సూచీ సంఖ్య (Fisher's index number)

F,L కు P కు గుణమధ్యమం (geometric mean) అవుతుంది. ఈ F ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య . ఎందుకంటే యిది పై రెండు పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుంది.

$$F = \sqrt{LP} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_o}{\Sigma P_0 Q_0} X \frac{\Sigma P_1 Q_o}{\Sigma P_0 Q_1}}$$

(i) ముందుగా కాల విపర్యయ పరీక్షను పరిశీలిద్దాం.

పిషర్ సూత్రం ప్రకారంగా $I_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} X \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}}$

$$I_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_1 Q_1} X \frac{\Sigma P_0 Q_o}{\Sigma P_1 Q_0}}$$

$$\therefore I_{01} X I_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} X \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1} X \frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_1 Q_1} X \frac{\Sigma P_o Q_0}{\Sigma P_1 Q_0}}$$

కాబట్టి F కాల విపర్యయ పరీక్షను పాటిస్తుంది.

(ii) ఇప్పుడు కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్షను పరిశీలిద్దాం. పిషర్ సూత్రం ప్రకారంగా,

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_o}{\Sigma P_0 Q_0} X \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma Q_1 P_0}{\Sigma Q_0 P_0} X \frac{\Sigma Q_1 P_1}{\Sigma Q_0 P_1}}$$

$$\therefore I_{01} X Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} X \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1} X \frac{\Sigma Q_1 P_0}{\Sigma Q_0 P_0} X \frac{\Sigma Q_1 P_1}{\Sigma Q_0 P_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Sigma P_1 Q_1)^2}{(\Sigma P_0 Q_0)^2}} = \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0}$$

BRAOU

కాబట్టి F కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్షను పాటిస్తుంది. కాబట్టి F పై రెండు పరీక్షలను సంతృప్తి పచడం వలన F ను ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యగా భావిస్తాం.

29.6.4 చక్రీయ పరీక్ష (Circular Test)

r వ సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరంగా, s వ సంవత్సరాన్ని ప్రస్తుత సంవత్సరంగా తీసుకుంటే, s వ సంవత్సరానికి సూచీ సంఖ్యను I_{rs} అని వ్రాస్తాం. n సంవత్సరాలను పరిగణనలోనికి తీసుకుంటే,

$I_{12} X I_{23} X \ldots X I_{n-1n} X I_{n1} = 1$ అయితే, ఆ సూచీసంఖ్య చక్రీయ పరీక్షను సంతృప్తి పరిచింది అని అంటాం. ఉదాహరణకు, మూడు సంవత్సరాలు తీసుకుంటే, $I_{12} X I_{23} X I_{31} = 1$ అయితే, ఆ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచింది అని అంటాం. ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య ఆదర్శమైనది అయినప్పటికీ, ఆ చక్రీయ పరీక్షను మాత్రం సంతృప్తి పరచలేదని నిరూపించవచ్చు.

క్రింది ఉదాహరణలో ఫిషర్ ఆదర్శసూచీ సంఖ్య ఎంతమట్టుకు ఈ పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తున్నదో పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ :

క్రింది దత్తాంశం నుండి ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యను కనుగొని అది పై పరీక్షలలో వేటిని సంతృప్తి పరుస్తున్నదో పరిశీలించండి.

వస్తువు	1961 (ఆధార సమయం)		1965 ప్రస్తుత సమయం	
	P_o	Q_0	P_1	Q_1
A	10	3	11	3
B	4	15	4	12
C	6	3	6	4
D	11	8	12	7
E	6	17	12	12

BRAOU

సాధన : ముందుగా క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాం.

వస్తువు	1961 ఆధారసమయం		1965 ప్రస్తుత సమయం					
	P_o	Q_0	P_1	Q_1	P_oQ_0	P_1Q_0	P_oQ_1	P_1Q_1
A	10	3	11	3	3	33	30	33
B	4	15	4	12	60	60	48	48
C	6	3	6	4	18	18	24	24
D	11	8	12	7	88	96	77	84
E	6	17	12	12	102	204	72	144
	మొత్తం				$\Sigma P_o Q_0 = 298$	$\Sigma P_1 Q_0 = 411$	$\Sigma P_o Q_1 = 251$	$\Sigma P_1 Q_1 = 333$

$$\therefore \text{ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య } (F) = I_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{411}{298} \times \frac{333}{251}} \times 100 = 135.3$$

$$I_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_1 Q_1} \times \frac{\Sigma P_0 Q_0}{\Sigma P_1 Q_0}} \times 100$$

కాబట్టి $I_{01} \times I_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1} \times \frac{\Sigma P_0 Q_1}{\Sigma P_1 Q_1} \times \frac{\Sigma P_0 Q_0}{\Sigma P_1 Q_0}}$

$$= \sqrt{\frac{411}{298} \times \frac{333}{251} \times \frac{251}{333} \times \frac{298}{411}} = 1$$

కాబట్టి F కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచింది.

$$I_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}}; \quad Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma Q_1 P_0}{\Sigma Q_0 P_0} \times \frac{\Sigma Q_1 P_1}{\Sigma Q_0 P_1}} \times 100$$

$$\therefore I_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1} \times \frac{\Sigma Q_1 P_0}{\Sigma Q_0 P_0} \times \frac{\Sigma Q_1 P_1}{\Sigma Q_0 P_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{411}{298} \times \frac{333}{251} \times \frac{251}{298} \times \frac{333}{411}} = \frac{333}{298} = \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_0}$$

కాబట్టి F కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుంది.

B R A O U

ఉదాహరణ

క్రింది దత్తాంశం నుండి ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేదని చూపండి.

వస్తువు	1961		1962		1963	
	ధర	పరిమాణం	ధర	పరిమాణం	ధర	పరిమాణం
A	2	5	4	1	5	2
B	3	4	5	2	6	1
C	4	3	6	5	8	4

సాధన : ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $(F) = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}}$

I_{12} (1961 ఆధారంగా 1962కు సూచీ సంఖ్య)ను క్రింది పట్టిక ద్వారా కనుగొంటాం.

వస్తువు	1961		1962		P_oQ_o	P_oQ_1	P_1Q_0	P_1Q_1
	P_o	Q_o	P_1	Q_1				
A	2	5	4	1	10	2	20	4
B	3	4	5	2	12	6	20	10
C	4	3	6	5	12	20	18	30
మొత్తం					34	28	58	44

$$\therefore I_{12} = \sqrt{\frac{58}{34} \times \frac{44}{28}} = \sqrt{\frac{319}{119}} = \sqrt{2.681} = 1.637$$

I_{23} (1962 ఆధారంగా 1963కు సూచీ సంఖ్య) ను క్రింది పట్టిక ద్వారా కనుగొంటాం.

వస్తువు	1962		1963		P_oQ_o	P_oQ_1	P_1Q_0	P_1Q_1
	P_o	Q_o	P_1	Q_1				
A	4	1	5	2	4	8	5	10
B	5	2	6	1	10	5	12	6
C	6	5	8	4	30	24	40	32
మొత్తం					44	37	57	48

$$\therefore I_{23} = \sqrt{\frac{57}{44} \times \frac{48}{37}} = \sqrt{\frac{684}{407}} = \sqrt{1.681} = 1.296$$

I_{31} (1963 ఆధారంగా 1961కు సూచీసంఖ్య) ను క్రింది పట్టిక ద్వారా కనుగొంటాం.

వస్తువు	1963		1961		P_oQ_o	P_oQ_1	P_1Q_0	P_1Q_1
	P_o	Q_o	P_1	Q_1				
A	5	2	2	5	10	25	4	10
B	6	1	3	4	6	24	3	12
C	8	4	4	3	32	24	16	12
మొత్తం					48	73	23	34

$$\therefore I_{31} = \sqrt{\frac{23}{48} \times \frac{34}{73}} = \sqrt{\frac{391}{1752}} = \sqrt{0.2232} = 0.472 \ .$$

$$\therefore I_{12} \times I_{23} \times I_{31} = 1.637 \times 1.296 \times 0.472 = 1.001 \neq 1.$$

అందుచేత ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య చక్రీయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేదు.

29.7 ప్రత్యేక సూచీ సంఖ్యలు

ఒక ఆధార సమయంలో ఉన్న పరిస్థితితో ఒక ప్రస్తుత సమయంలో ఉన్న పరిస్థితిని పోల్చి, ఆ ప్రస్తుత పరిస్థితిలో ఉన్న మార్పును అంచనా వేయడానికి సూచీ సంఖ్యలను వాడుతాము. కాబట్టి, వివిధ రంగాలలో వివిధ సూచీ సంఖ్యలను వాడవలసి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు, వ్యాపార రంగంలో ధరల స్థాయిలోని మార్పులను తెలుసుకోవడానికి, వ్యవసాయ రంగంలో కాని, పరిశ్రమల రంగంలో కాని ఉత్పత్తిలో మార్పులు తెలుసుకోవడానికి, వినియోగ దారుల విషయానికివస్తే, వారి జీవన వ్యయంలో మార్పులను తెలుసుకోవడానికి, యీ విధంగా వివిధ సందర్భాలలో వివిధ ఉద్దేశాలతో సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించవలసి వస్తుంది. ఈవిధంగా నిర్మితమయ్యే కొన్ని ముఖ్యమైన సూచీ సంఖ్యలను స్థూలంగా పరిశీలించడమే యీ విభాగం ఉద్దేశం.

29.7.1 ధరల సూచీ సంఖ్యలు (Price Index Numbers)

ఒక నిర్ణీత సమయంలో ఒక వస్తు సముదాయంలో ధరల మార్పులను కొలవడానికి ఈ ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగపడతాయి. ఇవి ముఖ్యంగా మూడు రకాలు. అవి : (1) టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు (wholesale price index numbers) (2) చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు (retail price index numbers) (3) వినియోగదారుల ధరల సూచీ సంఖ్యలు (consumer's price index numbers) . వీటిని గురించి క్లుప్తంగా ఈ విభాగంలో చర్చిస్తాం.

1. టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు

టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఒక ఆర్థిక వ్యవస్థలో చాలా ముఖ్యమైన పాత్రను వహిస్తాయి. ఒక ఆర్థిక వ్యవస్థలో వినియోగ దారులు వాడుతున్న అనేకమైన వస్తువుల టోకు ధరలలో యేవిధంగా మార్పు వస్తుంది, యీ మార్పు ప్రభావం ఆర్థిక వ్యవస్థపై యేవిధంగా వుంటుంది అనే విషయాన్ని పరిశీలించడానికి యీ సూచీ సంఖ్యలు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి. అనేక సంవత్సరాలలో ఈ టోకు ధరలు యేవిధంగా మారుతున్నాయి, వాటి ప్రభావం వలన ఆర్థిక స్థితిగతులు యేవిధంగా మారుతున్నాయి అని అంచనా వేసే పరిశీలన నన్నింటిలో ఈ టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యల ఉపయోగం చాలా ఉంది. ఈ టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు మనదేశంలో భారత ప్రభుత్వ ఆర్థిక సలహాదారుని (Economic Advisor to the Government of India) పర్యవేక్షణలో నిర్మించబడతాయి. మొట్టమొదటి సారిగా ఈ సూచీ సంఖ్యలను 1939 ఆగస్టు 19 వ తేదీనే ఆధార సమయంగా తీసుకొని, 1942 జనవరి 10 నుండి వరుసగా నిర్మించడం జరిగింది. కొన్ని ముఖ్యమైన 23 వస్తువులను 4 వర్గాలుగా విభజించి ప్రతీ వారాంతానికి ఈ సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడమైనది. ఈ విధమైన నిర్మాణంలో కొన్ని లోపాలు ఉండడం వలన వీటిని 1947 డిసెంబరులో ఆపివేయడమైనది.

ఈ లోపాలను దిద్దుకుంటూ, పద్ధతులను మార్పు చేసుకుంటూ వివిధ సమయాలలో ఈ సూచీ సంఖ్యల నాణ్యతను అభివృద్ధి చేయడం జరిగింది. చివరకు 1970 - 71 (= 100)ను ఆధారంగా 1977 జనవరి 1వ తేదీ నుండి ఈ సూచీ సంఖ్యలను పున : నిర్మితం చేయడం జరిగింది. భారతదేశపు టోకు ధరల పున : నిర్మాణ

B R A O U

కార్యాచరణ సమితి (Working Group of Revision of the Index Numbers of Wholesale Prices of India) సలహాననుసరించి ఈ సూచీ సంఖ్యలను పున : నిర్మించారు. వీటినిర్మాణంలో ముఖ్యాంశాలు యేమనగా

(1) ఆధారం : 1970 - 71 సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా తీసుకొన్నారు. ప్రతీ 10 సంవత్సరములకు ఈ ఆధారాన్ని మార్చాలి అని నిర్ణయించారు. దీనివలన వాస్తవ పరిస్థితిని అంచనా వేసి, ఆర్థిక స్థితిగతులను తెలుసుకోవడానికి వీలుపడుతుందని భావించారు. సాధారణంగా ఆధార సమయంలో ధర వరులలో స్వల్ప మార్పులు మాత్రమే ఉంటే మంచిది. కాబట్టి, 1970 - 71 అటువంటి సంవత్సరం కాబట్టి, దానిని ఆధారంగా తీసుకున్నారు.

(2) వస్తువుల ఎంపిక : ఈ సూచీ సంఖ్యలను 360 వస్తువుల ధరలు తీసుకొని నిర్మించారు. ఈ 360 వస్తువులు గూడా వివిధ వర్గాల నుండి ఎంచుకొని వాస్తవ పరిస్థితికి దగ్గరగా ఉండేటట్లు ప్రయత్నించారు. ఈ 360 వస్తువులలో 80 ప్రాథమిక అవసరాలకు, 270 పరిశ్రమల ఉత్పత్తులకు సంబంధించినవి, 10 మిగిలినవి. ఈ విధంగా అన్ని వర్గాల వస్తువులకు ప్రాతినిధ్యం యిచ్చారు.

(3) భారాలు, సగటు : వివిధ వస్తువులకు భారాలను యిచ్చేటప్పుడు చాలా హేతుబద్ధమైన విధానాన్ని అవలంభించారు. అదేమనగా, యిదివరకటివలె, ఆ వర్గంలో ఎంచుకున్న వస్తువుల లావా దేవీల విలువలనే (values of transactions) ఇవ్వకుండా,మొత్తం ఆర్థిక వ్యవస్థలో జరుగుతున్న లావాదేవీల విలువలనే భారాలుగా ఇచ్చారు. అంక మధ్యమాన్ని సగటుగా ఉపయోగించారు.

ఈవిధమైన పద్ధతుల వలన టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు హేతుబద్ధమైన ఆర్థిక వ్యవస్థలో స్థితిగతులను అంచనా వేయడానికి చాలా ఉపయోగపడుతున్నాయి. కాబట్టి ఇప్పుడు ప్రస్తుతం ప్రభుత్వం వారు నిర్మిస్తున్న సూచీ సంఖ్యలు ఈ పద్ధతిలోనే జరుగుతున్నవి.

2. చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు

చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలను వివిధ రకాల వస్తువుల చిల్లర ధరలలో కలిగే మార్పులను సూచించడానికి నిర్మిస్తారు. సామాన్య మానవునికి టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యల కంటే చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలే ఎక్కువ ప్రయోజనకారిగాను, సమంజసంగానూ ఉంటాయి. మన దేశంలో వీటిని లేబర్ బ్యూరో వారు నగర ప్రాంతాలకు గ్రామీణ ప్రాంతాలకు విడివిడిగా నిర్మిస్తారు. అయితే, చిల్లర ధరల సేకరణలో ఉండే సమస్యల వలన, వీటి సేకరణను అనేక సంస్థలు చేయడం వలన, వస్తువుల సంఖ్యను పరిమితం చేయడం వలన, యీ చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యల కంటే సంతృప్తికరంగా ఉండడానికి వీలుపడడం లేదు. అయినప్పటికీ యీ సూచీ సంఖ్యలు జీవన వ్యయంలో మార్పులను చాలా మట్టుకు తెలియబరుస్తాయి. కాబట్టి, ధరల సాధారణ పోకడలో అవగాహనను యిస్తాయి. కాబట్టి , వీటిని విరివిగా వాడుతున్నారు. వినియోగ దారుల ధరల సూచీ సంఖ్యలు (consumer's price index numbers) గూడా ఒక ప్రత్యేకమైన చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలే కాబట్టి, వీటిని గూర్చి క్రింద చర్చిస్తాం.

3. వినియోగ ధరల సూచీ సంఖ్యలు (Consumer's Price Index Numbers) లేదా జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు(Cost of Living Indices)

ఈ జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలను భారత ప్రభుత్వం వారు లేబర్ బ్యూరో ద్వారా తెలియబరుస్తా ఉంటారు. ఖచ్చితంగా చెప్పాలంటే, ఈ సూచీ సంఖ్యలు ధరల సూచీ సంఖ్యలు కావు. కాని, జీవన వ్యయంలో మార్పులు ధరలలో మార్పులను ప్రతిబింబిస్తూ ఉంటాయి కాబట్టి, వీటిని గూడా ధరల సూచీ సంఖ్యలుగా

BRAOU

భావించడమైనది. మనదేశంలో ప్రభుత్వోద్యోగుల జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు, మధ్యతరగతి కుటుంబీకుల జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు, శ్రామిక వర్గ ప్రజల జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు,అధికారికంగా లభిస్తున్నాయి.

ఒక వర్గం ప్రజల ప్రస్తుత కొనుగోలు శక్తిని ఆధార సంవత్సరం కొనుగోలు శక్తితో పోల్చి, ఎంత మార్పు వచ్చినదో అంచనా వేయడానికి, ఈ సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగపడతాయి. అందుచేత, వినియోగదారుడు ఆధార సంవత్సరంలో ఎంత చెల్లించవలసి ఉంటుందో అంచనా వేయవచ్చు. కాబట్టి ఈ సూచీ సంఖ్యలు (1) వేతనాలు, జీతాలను సవరించడంలోనూ, (2) ధరల నిర్ణయంలోనూ, (3) ద్రవ్య కొనుగోలు శక్తిని నిర్ణయించి, ప్రజల నిజమైన రాబడిని అంచనా వేయడంలోనూ, (4) వస్తు, సేవల మార్కెట్లను విశ్లేషించడంలోనూ ఉపయోగపడతాయి.

వీటి నిర్మాణంలో క్రింది జాగ్రత్తలను పాటిస్తేనే తప్ప అవి వాస్తవికతను ప్రతిబింబించే సూచీ సంఖ్యలు కానేరవు.

(1) ఏ ప్రాంతంలో ఏ తరగతి ప్రజలకు వీటిని నిర్మిస్తున్నామో ముందుగానే నిర్ణయించుకోవాలి. ఆవిధంగా నిర్ణయించుకున్న తరువాత, ఆ వర్గంలో ఉన్న వ్యక్తులందరికీ యించుమించు ఒకే రకమైన రాబడి, ఖర్చు చేసే అలవాట్లు ఉన్న వారినే ఎంచుకోవాలి.

(2) ఏవిధమైన విపరీతాలు లేని కాలాన్నే ఆధార కాలంగా ఎంచుకోవాలి.

(3) కుటుంబ బడ్జెట్‌పై విచారణ జరుపుతున్నప్పుడు, యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి ద్వారానే కుటుంబాలను ఎంచుకోవాలి. ఎన్నుకున్న తరగతిలో ప్రజలలో అధికంగా ఉపయోగించే వస్తువులనే సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో చేర్చాలి. ఆహార పదార్థాలు, వస్త్రాలు, దీపాలు, ఇంధనం, ఇంటి అద్దె, ఇతరములు మొదలైన వాటిలో ఒక కుటుంబం వేటిపై ఎంతెంత ఖర్చు చేస్తున్నది అనే సమాచారాన్ని రాబట్టే విధంగా మనం తయారు చేసిన ప్రశ్నావళి ఉండాలి.

(4) స్థానిక మార్కెట్ నుంచి వివిధ వస్తువుల చిల్లర ధరలను సేకరించాలి. ఇది వారానికి ఒకసారి చేయాలి.

(5) ఈ సూచీ సంఖ్యలను సాధారణంగా వారానికి ఒకసారి నిర్మిస్తారు. సగటు వారపు సూచీ సంఖ్యను మాసపు సూచీ సంఖ్యగా, సగటు మాసపు సూచీ సంఖ్యను సంవత్సర సూచీ సంఖ్యగా పరిగణిస్తాం.

ఈ సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడానికి (A)సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి, (B) కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి అని రెండు పద్ధతులను వాడుతాం. సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి లేస్పియర్ సూత్రంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిలో ఆధార సంవత్సరంలో ఉపయోగించిన వస్తువుల పరిమాణం బట్టి వివిధ వస్తువులకు భారాలను యిస్తాం. కాబట్టి $\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$ అనే సూత్రాన్ని వాడుతాం. కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో, మనము ఎంచుకున్న కుటుంబాల బడ్జెట్‌లను పరిశీలించి వివిధ వస్తువులపై సగటు కుటుంబ వ్యయాన్ని అంచనా కట్టి, ఆ వస్తు వ్యయ నిష్పత్తులను భారాలుగా తీసుకోవాలి. ముందుగా, సాపేక్ష ధరలు $\left(I = \frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$ నిర్ణయించి, వాటికి తగిన భారాలు (V) యిచ్చి, తరువాత $\sum IV$ ని $\sum V$ చే భాగించి, ఆ ఫలితాన్ని జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యగా తీసుకుంటాం. కాబట్టి జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యకు సూత్రం $\frac{\sum IV}{\sum V}$. క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

BRAOU

ఉదా : 1960 ఆధారంగా 1965కు జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను క్రింది దత్తాంశం నుండి కనుగొనండి.

వర్గం	1960 ఆధారంగా 1965కు వర్గ సూచీ సంఖ్య (I)	భారం(V)
ఆహారం	152	48
ఇంధనం, దీపాలు	110	5
వస్త్రాలు	130	15
ఇంటి అద్దె	100	12
ఇతరములు	80	20

సాధన : జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య = $\frac{\Sigma IV}{\Sigma V}$.

$$= \frac{152 \times 48 + 110 \times 5 + 130 \times 15 + 100 \times 12 + 80 \times 20}{48 + 5 + 15 + 12 + 20}$$

$$= \frac{12596}{100} = 125.96$$

ఉదా : క్రింది దత్తాంశం 1966కు జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను కనుగొనండి.

వస్తువు	ఆధార సంవత్సరం 1953		1966 ధర
	ధర (P_0)	పరిమాణం(Q_0)	(P_1)
A	25	16	35
B	36	7	48
C	12	3.5	16
D	6	2.5	10
E	28	4	28

సాధన : క్రింది పట్టికను ముందుగా తయారు చేస్తాం.

వస్తువు	ఆధార సమయం 1953		ప్రస్తుత సమయం 1966		
	Po	Qo	P_1	P_oQ_o	P_1Q_0
A	25	16	35	400	560
B	36	7	48	252	336
C	12	3.5	16	42	56
D	6	2.5	10	15	25
E	28	4	28	112	112
మొత్తం				$\Sigma P_0Q_0 = 821$	$\Sigma P_1Q_0 = 1089$

$$\therefore \text{ జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య } = \frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0} \times 100 = \frac{1089}{821} \times 100 = 1.326 \times 100 = 132.6$$

ఉదా : ఒక వర్గంలో జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య, తలసరి ఆదాయం క్రింది పట్టికలో యిచ్చినాము. జీవన వ్యయంలో పెరుగుదలను పరిగణించి, నిజమైన ఆదాయాలను కనుగొనండి.

సంవత్సరం	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య (1949 ఆధారంగా)	100	104	115	160	210	260	300	320
తలసరి ఆదాయం(రూ॥లలో)	360	400	480	520	550	590	610	650

సాధన : $\text{నిజమైన ఆదాయం} = \dfrac{\text{తలసరి ఆదాయం}}{\text{జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య}} \times 100$

కాబట్టి 1949లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{360}{100} \times 100 = 360$

1950లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{400}{104} \times 100 = 384.6$

1951లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{480}{115} \times 100 = 417.3$

1952లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{520}{160} \times 100 = 325$

1953లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{550}{210} \times 100 = 261.9$

1954లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{590}{260} \times 100 = 226.9$

1955లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{610}{300} \times 100 = 203.3$

1956లో నిజమైన ఆదాయం $= \dfrac{650}{320} \times 100 = 203.1$

ఉదా : నాలుగు వస్తువుల ధరలను 1951లోనూ 1965లోనూ యీ క్రింద యిచ్చినాము. 1951ను ఆధారంగా 1965 సూచీ సంఖ్యను (1) సాపేక్ష ధరల సామాన్య సగటు పద్ధతి (2) సాపేక్ష ధరల భారిత సగటు పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

BRAOU

వస్తువు	భారం	ధర	
		1965	1951
A	5	4.5	2.0
B	7	3.2	2.5
C	6	4.5	3.0
D	2	1.8	1.0

సాధన : ముందుగా క్రింది పట్టికను తయారు చేస్తాం.

వస్తువు	ధర 1951 (Po)	1965 (P1)	సాపేక్ష ధరలు 1965 (I = $(P_1/P_o) \times 100$)	భారాలు (V)	IV
A	2.0	4.5	225	5	1125
B	2.5	3.2	128	7	896
C	3.0	4.5	150	6	900
D	1.0	1.8	180	2	360
మొత్తం			$\Sigma I = 683$	$\Sigma V = 20$	$\Sigma IV=3281$

1965కు సూచీ సంఖ్య (1) సాపేక్ష ధరల సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా

$$= \frac{\Sigma I}{N} = \frac{683}{4} = 170.75$$ (N= వస్తువుల సంఖ్య)

(2)సాపేక్ష ధరల భారిత పద్ధతి ద్వారా $= \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{3281}{20} = 164.05$

BRAOU

29.7.2 పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు (Indices of Industrial Production)

ఒక దేశం యొక్క ఆర్థిక పురోగమనాన్ని అంచనా వేసే సాధనాలలో పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు చాలా ఉపయోగకరమైనవి. మన దేశంలో యీ సూచీ సంఖ్యలను చాలా అధికారిక, అనధికారిక సంస్థలు తయారు చేస్తున్నాయి. వీటిలో పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సాధారణ సూచీ సంఖ్యలు చాలా ప్రాచుర్యంలో ఉన్నాయి. వీటిని గురించి యిప్పుడు క్లుప్తంగా చర్చిస్తాం.

A. పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు (1970 = 100)

పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలను చాలా తరుచుగా తయారు చేస్తూ ఉంటారు. వాటి పరిధి, భారాలను యిచ్చే పద్ధతి, నిర్మాణ పద్ధతులు తరుచుగా మారుతూ ఉంటాయి. వీటిలో 1970 సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా తీసుకొని నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలు ప్రస్తుతం అమలులో ఉన్నవి. ఈ సూచీ సంఖ్యలను కేంద్ర సాంఖ్యాక సంస్థ [Central Statistical Organisation (CSO)] తయారు చేసినవి. వీటి నిర్మాణంలో క్రింది విషయాలను పరిగణించారు.

(1) **వస్తువులు :** 1970లో పరిశ్రమల వార్షిక సర్వే (Annual Survey of Industries - ASO, 1970) లో అనుసరించిన వర్గీకరణ ప్రకారంగా వర్గీకరించబడిన 352 వస్తువులను యీ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో

పరిగణించారు. భవన నిర్మాణంలో ఉన్న కొన్ని పరిశ్రమలను యీ సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో పరిగణించ లేదు. పరిశ్రమలనన్నింటిని లోహపు గనులు, రాతి గనులు, వస్తూత్పత్తుల పరిశ్రమలు, ఖనిజ పరిశ్రమలు మొదలుగాగల కొన్ని ముఖ్యమైన వర్గాలుగా విభజించి, ప్రతీ వర్గాన్ని తిరిగి కొన్ని ఉప వర్గాలుగా విభజించి, వర్గాలకు ఉపవర్గాలకు సరియైన భారాలను ఇచ్చారు.

(2) **ఆధారం :** 1970 సంవత్సరాన్ని ఆధార సమయంగా ఎంపిక చేసారు.

(3) **భారాలు :** (i) మూడంకెల స్థాయి పరిశ్రమల వర్గీకరణ (3 digit level of industrial classification) లో ఉన్న యే పరిశ్రమకైనా, అది యే సాంపుల్ పరిశ్రమ సెక్టారు (sample factory sector) లో ఉందో, ఆ సెక్టారుకంతటికి ASI - 1970, పరిశ్రమల సెక్టార్, డివిజన్స్ 2,3 (manufacturing sector, divisions 2,3, A S I - 1970) ఫలితాల ప్రకారంగా ఉన్న సంఘటిత విలువలను (value added) భారంగా ఇచ్చారు. మూడంకెల స్థాయి దాటిన పరిశ్రమకు, ASI - 1970 సెన్సస్ సెక్టార్ ప్రకారంగా భారాలు ఇచ్చారు.

(ii) లోహపు గనుల, రాతిగనుల (mining and quarrying) వర్గంలో ఉన్న యే పరిశ్రమకైనా, ఆ సెక్టార్, డివిజన్ I కు అంచనా వేసిన అసలు సంఘటిత విలువ (net value added) ను భారంగా ఇచ్చారు.

(iii) విద్యుత్తు రంగంలో ఉన్న పరిశ్రమలకు, CSO వారు జాతీయాదాయం గురించి 1970లో విడుదల చేసిన శ్వేత పత్రం (white paper) లో పేర్కొన్న విద్యుత్తు రంగం, డివిజన్ 5 కు గల అసలు సంఘటిత విలువను భారంగా ఇచ్చారు.

(iv) పరిశ్రమ వర్గంలో ఉన్న యేదైనా పరిశ్రమకు ASI - 1968 ప్రకారంగా భారాలు ఇచ్చారు.

(v) నూలు, వస్త్రాలు రంగంలో ఉన్న పరిశ్రమకు ఆ రంగానికి గల మొత్తం సంఘటిత విలువ (total value added) నుండి నూలుకు ఉన్న సంఘటిత విలువను తీసివేయగా వచ్చిన ఫలితాన్ని భారంగా ఇచ్చారు.

(4) **సగటు :** ఉత్పత్తుల సాపేక్ష విలువలకు (production relatives) భారిత అంకమధ్యమాన్ని వాడి ఈ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించారు. ఋతువులలో మార్పులకు యేవిధమైన సవరింపును చేయలేదు. జనవరి నుండి డిసెంబరు వరకు గల నెలల సూచీ సంఖ్యల సగటును వార్షిక సూచీ సంఖ్యగా భావించారు.

B. పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు - ప్రయోజన ఆధారంగా చేసిన వర్గీకరణ (1970 = 100) (Use Based Classification, 1970 = 100)

ఈ సూచీ సంఖ్యలు RBI వారిచే తయారు చేయబడినవి. మొత్తం పరిశ్రమల నన్నింటిని నాలుగు వర్గాలుగా విభజించారు. ఒక్కొక్క వర్గం లోనూ, ఉపవర్గంలోనూ ఉన్న పరిశ్రమలకు విడివిడిగా సూచీ సంఖ్యలను అంచనా వేసి, వాటికి సరియైన భారాలను యిచ్చి, వాటికి సంఘటిత సగటును కట్టి, దానినే కావలసిన సూచీ సంఖ్యగా భావించారు. కొన్ని ముఖ్యమైన పరిశ్రమలనే ఎంచుకోవడం వలన, విడివిడిగా పరిశ్రమలకన్నింటికి యిచ్చిన భారాల మొత్తం, ఆ పరిశ్రమలు ఉన్న వర్గానికి యిచ్చిన భారం కానేరదు. పరిశ్రమల సాధారణ సూచీ సంఖ్యలు (general index) CSO వారి సలహా ప్రకారంగా సమీప పున : పరిశీలనను (latest revision) పరిగణించి అంచనా వేయడం జరిగింది కాబట్టి, వివిధ వర్గాలకు గల సూచీ సంఖ్యల నుండి యీ సాధారణ సూచీ సంఖ్యను రాబట్టలేము. పరిశ్రమలను (1) ప్రాథమిక పరిశ్రమలు (basic industries) (2) పెట్టుబడిదారీ వస్తు

పరిశ్రమలు (capital goods industries) (3) మధ్యంతర వస్తు పరిశ్రమలు (intermediate goods industries) (4) వినియోగ వస్తు పరిశ్రమలు (consumer goods industries) అని నాలుగు వర్గాలుగా విభజించబడినవి. ప్రతి వర్గంలోనూ ప్రతీ పరిశ్రమకు సరియైన భారాలు ఇవ్వబడినవి. అప్పుడు సంఘటిత భారిత సూచీ సంఖ్యను అంచనా వేసి దానిని కావలసిన సూచీ సంఖ్యగా భావించడమైనది.

ఇంకా వ్యవసాయ ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు, విదేశీ వ్యాపార సూచీ సంఖ్యలు మొదలైన అనేక ప్రత్యేక సూచీ సంఖ్యల గురించిన సమాచారం Applied Statistics of India, by B.N.Asthana and S.S. Srivastava అనే పుస్తకంలో లభ్యమవుతుంది.

29.8 సారాంశం

ఒక ప్రస్తుత సమయంలో ఉన్న పరిస్థితిని ఒక ఆధార సమయంలో ఉన్న పరిస్థితితో పోల్చి ఆ ప్రస్తుత సమయంలో ఎటువంటి మార్పు జరిగింది అని అంచనా వేయడానికి సూచీ సంఖ్యలను వాడుతారు. ఈ యూనిట్‌లో వివిధ సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులను చర్చించాం. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే పలు సమస్యలు, ఆ సమస్యల పరిష్కారానికి తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలను పరిశీలించాం. ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యకు ఉండవలసిన లక్షణాలు, అవి యే సూచీ సంఖ్యలకు ఉన్నాయి అనే విషయాన్ని గూడా చర్చించాం. చివరగా భారతదేశంలో వాడుకలో ఉన్న కొన్ని ముఖ్యమైన సూచీ సంఖ్యలను గురించి తెలుసుకొన్నాం.

29.9 భావనలు

ఈ యూనిట్‌లో ప్రవేశ పెట్టిన కొన్ని ముఖ్యమైన భావనలను తిరిగి ఈ విభాగంలో పున : శ్చరణ చేసుకొందాం.

(1) **సూచీ సంఖ్య :** వివిధ పరిస్థితులలో కొన్ని సంబంధిత వస్తువుల ధరలలో గాని, పరిమాణాలలో గాని, విలువలలో గాని యేర్పడే వ్యత్యాసాలను తులనాత్మకంగా పరిశీలించడానికి (comparative analysis) వాడే ఒక సాంఖ్యక సాధనం సూచీ సంఖ్య.

(2) **ఆధార సమయం :** ప్రస్తుత సమయంలో ఉన్న పరిస్థితిని మరొక సమయంలో ఉన్న పరిస్థితితో పోలుస్తున్నప్పుడు, ఆ మరొక సమయాన్ని ఆధార సమయం అని అంటాం.

3. **సాపేక్ష ధర :** ప్రస్తుత ధర P_1 అయి, ఆధార సమయంలో ధర P_0 అయితే, $\frac{P_1}{P_0} \times 100$ ను సాపేక్ష ధర అని అంటాం.

4. **సరళ సంఘటిత సూచీ సంఖ్య :** ప్రస్తుత సమయంలో వివిధ వస్తువుల ధరలు $P_1^1, P_1^2, P_1^3, \ldots$ అయి, ఆధార సమయంలో ధరలు $P_0^1, P_0^2, P_0^3, \ldots$ అయితే,

$$\frac{P_1^1 + P_1^2 + P_1^3 + \ldots}{P_0^1 + P_0^2 + P_0^3 + \ldots} \times 100 = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100$$ ను సరళ సంఘటిత ధరల సూచీ సంఖ్య అని అంటాం.

5. **భారిత సంఘటిత ధరల సూచీ సంఖ్య :** వివిధ వస్తువుల ధరలకు $W^1, W^2, \ldots, W^n$ భారాలు అయితే, భారిత సంఘటిత ధరల సూచీ సంఖ్య

వస్తువు	పరిమాణం (యూనిట్లలో)	ధర (ఒక్కొక్క యూనిట్‌కు)	
	ఆధార సమయం	ఆధార సమయం	ప్రస్తుత సమయం
1	2692	64.2	72.3
2	831	119.8	111.5
3	1247	39.8	45.0
4	185	57.5	67.8
5	345	141.4	96.5
6	8989	10.9	19.6
7	86	141.0	113.5
8	1298	18.2	21.2

5. క్రింది దత్తాంశము నుండి 1945కు క్రింది సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి. (1) లేస్పియర్ (2) పాషే (3) బౌలే (4) మార్షల్ - ఎడ్జివర్త్ (5) ఫిషర్

వస్తువు	ధర 1935	పరిమాణం 1935	ధర 1945	పరిమాణం 1945
A	4	50	10	40
B	3	10	9	2
C	2	5	4	2

B R A O U

6. క్రింది దత్తాంశం నుండి ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యను కనుగొని అది ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

వస్తువు	ఆధార సమయం		ప్రస్తుత సమయం	
	ధర	పరిమాణం	ధర	పరిమాణం
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

7. క్రింది దత్తాంశం నుండి, గొలుసు ఆధార పద్ధతి ద్వారా భారతీయ పరిశ్రమల రంగంలో వార్షిక చాంచల్యాలను (annual fluctuations) పోల్చి చూడండి.

సంవత్సరం	సూచీసంఖ్య	సంవత్సరం	సూచీసంఖ్య	సంవత్సరం	సూచీసంఖ్య
1961	120	1965	120	1969	156
1962	122	1966	137	1970	137
1963	116	1967	136		
1964	120	1968	149		

8. క్రింది దత్తాంశం నుండి జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను కనుగొనండి.

వర్గం	1963 సూచీ సంఖ్య	వ్యయం
ఆహారం	550	46%
వస్త్రాలు	215	10%
ఇంధనం, దీపాలు	220	7%
ఇంటి అద్దె	150	12%
ఇతరములు	275	25%

9. ఒక వర్గంలో తలసరి ఆదాయం, జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య క్రింది పట్టికలో చూపినాం. జీవన వ్యయంలో ఉన్న పెరుగుదలను పరిగణించి, వాస్తవ ఆదాయాలను అంచనా వేయండి.

సంవత్సరం	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య (1949 =100)	100	104	115	160	210	260	300	320
తలసరి ఆదాయం (రూ॥లలో)	360	400	480	520	550	590	610	650

BRAOU

29.11. మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

1. "కాల విపర్యయ పరీక్ష", "కారకాల తిరోగమన పరీక్ష" అనగా నేమి ? ఫిషర్ సూచీ సంఖ్య వీటిని సంతృప్తి పరుస్తుందని నిరూపించండి.

2. "చక్రీయ పరీక్ష" అనగా నేమి ? ఏ సూచీ సంఖ్య దీనిని సంతృప్తి పరుస్తుంది ?

3. జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య అనగా నేమి ? వాటి నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలు, తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు తెలియబరచండి.

4. మనదేశంలో టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యల గురించి క్లుప్తంగా తెలపండి.

5. ఒక పట్టణంలో మధ్య తరగతి వర్గాల బడ్జెట్‌ను క్రింద చూపినాము. 1967తో పోలిస్తే 1968లో జీవన వ్యయంలో ఉన్న మార్పును కనుగొనండి.

	ఆహారం	ఇంటిఅద్దె	వస్త్రాలు	ఇంధనం	ఇతరాలు
వ్యయం	30%	15%	20%	10%	25%
1967లో ధరలు (రూ॥లలో)	100	20	70	20	40
1968లో ధరలు(రూ॥లలో)	90	20	60	15	55

6) క్రింద యిచ్చిన గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను స్థిరాధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చండి.

సంవత్సరం :	1981	1982	1983	1984	1985
సూచీ సంఖ్యలు :	110	160	140	200	150

7) స్థిరాధార , గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలకు గల సంబంధాన్ని సోదాహరణంగా వివరించండి.

29.12 చదువ వలసిన గ్రంథాలు

1. An Introduction to Statistical Methods, by C.B. Gupta
2. Applied Statistics of India, by B.N. Asthana and S.S. Srivastava

29.13 పదకోశం

ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య	Ideal index number
ఆధార సమయం	Base period
ఆర్థిక భారమితులు	Economic barometers
ఉత్పత్తుల సాపేక్ష విలువలు	Production relatives
ఋతు వ్యత్యాసాలు	Seasonal variations
కారణాంక తిరోవర్తన పరీక్ష	Factor reversal test
కాల విపర్యయ పరీక్ష	Time reversal test
కేంద్రీయ సాంఖ్యాక సంస్థ	Central Statistical Organisation (CSO)
గుణ మధ్యమం	Geometric mean
చక్రీయ పరీక్ష	Circular test
జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య	Cost of living index number
గొలుసు ఆధారం	Chain base
తులనాత్మక పరిశీలన	Comparative analysis
ధరల సూచీ సంఖ్య	Index number of prices

B R A O U

టోకు ధరల సూచీ సంఖ్య	**Wholesale price index**
పరిమాణ సూచీ సంఖ్య	**Index number of quantities**
పరిశ్రమల వార్షిక సర్వే	**Annual Survey of Industries**
పరిశ్రమల వర్గీకరణ	Industrial classifications
చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్య	Index number of relative prices
పారిశ్రామిక ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్య	Index of industrial production
ప్రయోజనం ఆధారంగా వర్గీకరణ	Use based classification
ప్రాథమిక పరిశ్రమలు	Basic industries
పెట్టుబడిదారీ వస్తువుల పరిశ్రమలు	Capital goods industries
భారము	Weight
భారత ప్రభుత్వ ఆర్థిక సలహాదారుడు	Economic Advisor to the Government of India
భారతదేశపు టోకు ధరల పున : నిర్మాణ కార్యాచరణ సమితి-	Working Group of Revision of the Index Number of Wholesale Prices of India
భారిత అంకమధ్యమం	Weighted arithmetic mean
భారిత సంఘటిత ధరలు	Weighted aggregrate of prices
భార రహిత	Unweighted
ముందు వెనుకలు	Forward and backward
మధ్యంతర వస్తు పరిశ్రమలు	Intermediate goods industries
లావాదేవీల విలువలు	Values of transactions
లోహపు గనుల పరిశ్రమ	Mining industry
రాతి గని	Quarry
వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య	Consumer price index number
విలువల భారాలు	Value weights
వినియోగ వస్తు పరిశ్రమలు	Consumer goods industries
వ్యుత్క్రమం	Reciprocal
శ్వేత పత్రం	White paper
సరళ సూచీ సంఖ్యలు	Simple index numbers
సంఘటిత విలువ	Value added

BRAOU

సంఘటిత పద్ధతి	Method of aggregates
సగటు ఆధార పద్ధతి	Average base method
సమీప పున : పరిశీలన	Latest revision
సంయుక్త సూచీ సంఖ్యలు	Composite index numbers
సాధారణ సూచీ సంఖ్య	General index number
సాపేక్ష పద్ధతి	Method of relatives
సాపేక్ష ధర	Price relative
సాపేక్ష విలువ	Relative value
సాంపుల్ పరిశ్రమ సెక్టార్	Sample factory sector
సూచీ సంఖ్య	Index number
సూచీసంఖ్య నిర్మాణ పద్ధతులు	Methods of construction of index numbers
స్థిర ఆధారం	Fixed base

- ఆచార్య ఎస్. రాజగోపాల రావు

BRAOU

భాగం - 30 : కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ, భాగాలు - వృద్ధి రేట్ల గణన

విషయక్రమం

30.0 ఉద్దేశాలు

30.1 పరిచయం

30.2 కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ

30.2.1 కాల శ్రేణి భావన

30.2.2 కాల శ్రేణి విశ్లేషణ - ఉదాహరణ

30.3 కాలశ్రేణి విశ్లేషణ ప్రాముఖ్యత

30.4 కాలశ్రేణుల భాగాలు

30.4.1 దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి

30.4.2 ఋతువుల వల్ల కలిగే మార్పులు

30.4.3 చక్రీయ మార్పులు

30.4.4 యాదృచ్ఛిక మార్పులు

30.5 ప్రవృత్తిని పరిశీలించే పద్ధతులు

30.5.1 సరస వక్రరేఖ పద్ధతి

30.5.2 సగటుల పద్ధతి

30.5.3 కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి

30.6 ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను కొలిచే పద్ధతులు

30.6.1 సామాన్య సగటుల పద్ధతి

30.6.2 నిష్పత్తి ప్రవృత్తి పద్ధతి

30.6.3 నిష్పత్తి చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి

30.6.4 లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి

30.7 వృద్ధి రేట్లు

30.7.1 సరళ వృద్ధి రేట్లు

30.7.2 కాంపౌండ్ వృద్ధిరేట్లు

30.8 ముగింపు

30.9 చదవదగిన పుస్తకాలు

30.10 పదకోశం

30.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

BRAOU

$574 = 7a$

$$a = \frac{574}{7} = 82$$

మనకు కావలసిన రేఖ

$Y = a + bt = 82 + 2t$

ఇప్పుడు ప్రవృత్తి విలువలను అంచనా వేయుటకు t స్థానంలో వివిధ విలువలను ప్రతిక్షేపించాలి. అప్పుడు ప్రవృత్తి విలువ

1985లో $t = 1$ అయితే $Y = 82 + 2(1) = 82 + 2 = 84$

ఈవిధంగా t స్థానంలో వివిధ విలువలను ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలను సులభంగా అంచనా వేయవచ్చు.

$$Y = 82 + 2t$$

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}t$$

$t = 1$	$Y = 82 + 2(1) = 82 + 2 = 84$
$t = 2$	$Y = 82 + 2(2) = 82 + 4 = 86$
$t = 3$	$Y = 82 + 2(3) = 82 + 6 = 88$
$t = 4$	$Y = 82 + 2(4) = 82 + 8 = 90$
$t = 5$	$Y = 82 + 2(5) = 82 + 10 = 92$
$t = 6$	$Y = 82 + 2(6) = 82 + 12 = 94$
$t = 7$	$Y = 82 + 2(7) = 82 + 14 = 96$

ఇక్కడ $a = 82$ విలువ $t = 0$ అయినప్పుడు ప్రవృత్తి విలువను తెలియచేస్తుంది. $b = 2$ విలువ ప్రతి సంవత్సరం ఉత్పత్తి రెండు యూనిట్ల చొప్పున పెరుగుతుందని తెలియుచున్నది. పై దానిలో మూల సంవత్సరం 1984ని తీసుకోవడం ద్వారా t విలువలను లెక్కించాం. ఒకవేళ మూల సంవతర్సరం 1988 తీసుకొన్నట్లయితే

సంవత్సరం T	Y	t = T - 1988	t^2	tY	
1985	80	-3	9	-240	
1986	90	-2	4	-180	- 512
1987	92	-1	1	-92	
1988	83	0	0	0	
1989	94	1	1	94	
1990	99	2	4	198	+568
1991	92	3	9	276	
	$\Sigma y = 630$	$\Sigma t = 0$	$\Sigma t^2 = 28$	$\Sigma tY = 56$	

BRAOU

$\sum y = Na + b\sum t$ .... (1) $a = \frac{\sum y}{N}$

$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2$....... (2) $b = \frac{\sum ty}{N\sum t2}$

విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$630 = 7a + b(0)$ .... (1) $\Rightarrow a = \frac{630}{7} = 90$

$56 = a(0) + b\,28$........ (2) $= b = \frac{56}{28} = 2$

అంచనా వేసిన సమీకరణం

$Y = 90 + 2(t)$		ప్రవృత్తి విలువలు
$Y = 90 + 2(-3)$	=	$90 - 6 = 84$
$Y = 90 + 2(-2)$	=	$90 - 4 = 86$
$Y = 90 + 2(-1)$	=	$90 - 2 = 88$
$Y = 90 + 2(0)$	=	$90 - 0 = 90$
$Y = 90 + 2(1)$	=	$90 + 2 = 92$
$Y = 90 + 2(2)$	=	$90 + 4 = 94$
$Y = 90 + 2(3)$	=	$90 + 6 = 96$

మూల సంవత్సరం ఏదైనప్పటికీ ప్రవృత్తి విలువలు మారలేదని గమనించవచ్చు.

కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతిలో అన్ని అంశాలను పరిగణనలోకి తీసుకోవడం జరుగుతుంది. మరియు వాస్తవిక విలువలకు ప్రవృత్తి విలువలకు మధ్య ఉన్న విచలనాల వర్గాలు కనిష్ఠంగా ఉండటం వల్ల దీనిని ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తున్నారు.

BRAOU

10.6 ఋతు సంబంధ చాంచల్యాల (Seasonal Fluctuations) ను కొలిచే పద్ధతులు

వాణిజ్య, ఆర్థిక [illegible]లు ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలు తరచుగా కనబడతాయి. దత్తాంశాన్ని వార్షికంగా తెలియచేసినప్పుడు ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలు కనబడవు. అయినప్పటికీ దత్తాంశం నెలల్లో, త్రైమాసంలో [illegible] ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను గమనించవచ్చు. ఉదాహరణకు పాఠశాలలు / కళాశాలలు (విద్యా సంస్థలు) [illegible] ప్రారంభమయ్యే జూలై- సెప్టెంబర్ త్రైమాసంలో పుస్తకాల విక్రయాలు అధికంగా ఉంటాయి. ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను కొలిచేందుకు క్రింది పద్ధతులను పరిగణనలోకి తీసుకొంటారు.

1. సామాన్య సగటుల పద్ధతి (Method of Simple Averages)
2. ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి (Ratio to Trend Method)
3. నిష్పత్తి చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి (Ratio to Moving Average Method)

4. లింక్ సాపేక్షకాల పద్ధతి (Link Relative Method)

30.6.1 సామాన్య సగటుల పద్ధతి (Method of Simple Averages)

ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించుటకు ఇది ఎంతో సులభమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతి ప్రకారం ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను క్రింది విధంగా లెక్కిస్తారు.

1. సరిచేయబడని (Un adjusted) దత్తాంశాన్ని వరుస క్రమంలో నెలల్లో లేదా త్రైమాసంలో ప్రతి సంవత్సరానికి ఏర్పాటు చేసుకోవాలి.

2. దత్తాంశాన్ని నెలల్లో అమర్చుకొన్నట్లయితే జనవరి, ఫిబ్రవరి, మార్చి, ఏప్రిల్, మే, జూన్, జూలై, ఆగస్టు, సెప్టెంబర్, అక్టోబర్, నవంబర్, డిసెంబర్ నెలలకి సంబంధించి మొత్తాలను కనుక్కోవాలి.

3. ప్రతి మొత్తాన్ని దత్తాంశం ఎన్ని సంవత్సరాలకు ఇవ్వబడిందో ఆ సంఖ్యచే భాగించాలి. ఉదాహరణకు 5 సంవత్సరాలకుగాను ఇవ్వబడిన నెలసరి దత్తాంశాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకొంటే 5 సంవత్సరాలకు సంబంధించిన ప్రతినెల మొత్తంను 5 చే భాగిస్తే సగటు వస్తుంది.

4. నెలసరి సగటుల మొత్తాన్ని 12 చే భాగించి నెలసరి సగటుల తాలూకు సగటును పొందాలి.

5. నెలసరి సగటుల తాలూకు సగటును 100గా తీసుకొని వివిధ నెలల సగటుల శాతాలను క్రింది విధంగా లెక్కించాలి.

$$\text{జనవరి నెలకు ఋతు సూచిక} = \frac{\text{జనవరి నెలకు సగటు}}{\text{నెలసరి సగటుల తాలూకు సగటు}} \times 100$$

ప్రతి నెల సగటుకు బదులు ప్రతినెల మొత్తాలను తీసుకొన్నప్పటికీ విలువలు మారవు.

క్రింది దత్తాంశానికి సామాన్య సగటుల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించండి.

సంవత్సరం	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జూలై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
1991	318	281	278	250	231	216	223	245	269	302	325	347
1992	342	309	299	268	249	236	242	262	288	321	342	364
1993	367	328	320	287	269	251	259	284	309	345	367	394
1994	392	349	342	311	290	273	282	305	328	364	379	417
1995	420	378	370	334	314	296	305	330	356	396	422	452

B R A O U

సామాన్య సగటుల (నెలసరి సగటుల) పద్ధతిలో ఋతు సంబంధ సూచికలను లెక్కించడం

సంవత్సరాలు / నెలలు	1991	1992	1993	1994	1995	5 సంవత్సరాల నెలసరిమొత్తాలు	5 సంవత్సరాల నెలసరిసగటులు	ఋతు సంబంధ సూచికలు
జనవరి	318	342	367	392	420	1839	1839 + 5 = 367.80	$\frac{367.80}{316.70}$ x100 = 116.14
ఫిబ్రవరి	281	309	328	349	378	1645	1645 + 5 = 329.00	$\frac{329.00}{316.70}$ x100 = 103.88
మార్చి	278	299	320	342	370	1609	1609 + 5 = 321.80	$\frac{321.80}{316.70}$ x100 = 101.61
ఏప్రిల్	250	268	287	311	334	1450	1450 + 5 = 290.00	$\frac{290.0}{316.70}$ x100 = 91.57
మే	231	249	269	290	314	1353	1353 + 5 = 270.60	$\frac{270.00}{316.70}$ x100 = 85.44
జూన్	216	236	251	273	296	1272	1272 + 5 = 254.40	$\frac{254.40}{316.70}$ x100 = 80.33
జూలై	223	242	259	282	305	1311	1311 + 5 = 262.20	$\frac{262.20}{316.70}$ x100 = 80.33
ఆగస్టు	245	262	284	305	330	1426	1426 + 5 = 285.20	$\frac{285.20}{316.70}$ x100 = 90.05
సెప్టెంబర్	269	288	309	328	356	1550	1550 + 5 = 310.00	$\frac{310.00}{316.70}$ x100 = 97.88
అక్టోబర్	302	321	345	364	396	1728	1728 + 5 = 345.60	$\frac{345.60}{316.70}$ x100 = 109.13
నవంబర్	325	342	367	389	422	1845	1845 + 5 = 369.00	$\frac{369.00}{316.70}$ x100 = 116.51
డిసెంబర్	347	364	394	417	452	1974	1974 + 5 = 394.80	$\frac{394.80}{316.70}$ x100 = 124.66
				మొత్తం		19,002	19,002 + 5 = 3800.40	$\frac{3800.40}{316.70}$ x100 = 1200
				సగటు		19002 + 12 = 1593.50	3800 . 40 + 12 = 316.70	$\frac{1200}{12}$ = 100

BRAOU

నెలసరి దత్తాంశంనకు బదులు, వారాల, త్రైమాసాల దత్తాంశానికి కూడా పై పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించవచ్చు.

క్రింది త్రైమాసిక దత్తాంశం నుండి సామాన్య సగటుల పద్ధతి ఋతు సంబంధ విచరణ సూచికలు కనుక్కొంటాం.

సంవత్సరం	మొదటి త్రైమాసికం	రెండవ త్రైమాసికం	మూడవ త్రైమాసికం	నాలుగో త్రైమాసికం
1991	72	68	80	70
1992	76	70	82	74
1993	74	66	84	80
1994	76	74	84	78
1995	78	74	86	82

సామాన్య సగటుల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సూచికలను లెక్కించుట

సంవత్సరం	మొదటి త్రైమాసికం	రెండవ త్రైమాసికం	మూడవ త్రైమాసికం	నాల్గవ త్రైమాసికం
1991	72	68	80	70
1992	76	70	82	74
1993	74	66	84	80
1994	76	74	84	78
1995	78	74	86	82
మొత్తం	376	352	416	384
సగటు	$\frac{376}{5}=75.20$	$\frac{352}{5}=70.40$	$\frac{416}{5}=83.20$	$\frac{384}{5}=7680$
ఋతు సూచికలు	98.43	92.15	108.90	100.52

సగటుల సగటు $= \frac{75.20+70.40+83.20+76.80}{4} = \frac{305.5}{4} = 76.4.$

BRAOU

ఋతు సూచీలను లెక్కించుట :

మొదటి త్రైమాసిక ఋతుసూచీ $\frac{75.2}{76.4} \times 100 = 98.43$

రెండవ త్రైమాసిక ఋతుసూచీ $\frac{70.4}{76.4} \times 100 = 92.15$

మూడో త్రైమాసిక ఋతుసూచీ $\frac{83.2}{76.4} \times 100 = 108.90$

నాలుగో త్రైమాసిక ఋతుసూచీ $\frac{76.8}{76.4} \times 100 = 100.52$

ఋతు సూచీలను లెక్కించుటకు అందుబాటులో వున్న మిగతా పద్ధతులతో పోల్చినపుడు ఈ పద్ధతి ఎంతో సులభమైంది. అయినప్పటికీ ఈ పద్ధతి మేలైన పద్ధతిగా పరిగణించబడదు. ఎందుకంటే శ్రేణిలో ప్రవృత్తి (trend) ఉండదని భావించబడుతుంది. అంటే O=CSR. ఇది సరైంది కాదు. ఎందుకంటే చాలా వరకు ఆర్థిక దత్తాంశం ప్రవృత్తులను కలిగి ఉంటుంది.

30.6.2 ప్రవృత్తి - నిష్పత్తి పద్ధతి (Ratio to Trend Method)

సామాన్య సగటుల పద్ధతి కంటె ప్రవృత్తి - నిష్పత్తి పద్ధతి ఎంతో మెరుగైంది. ఈ పద్ధతి ద్వారా ఋతు సూచికలను క్రింది విధంగా లెక్కిస్తారు.

1. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి (method of least squares) ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలను లెక్కించాలి.
2. దత్తాంశం లోని శ్రేణి విలువలను ప్రవృత్తి విలువలచే భాగించాలి. ఈ నిష్పత్తులను 100 చే గుణించాలి. ఈ విధంగా పొందిన విలువలు ప్రవృత్తి నుండి స్వేచ్ఛగా ఉంటాయి.
3. అన్ని సంవత్సరాలకు సంబంధించిన ప్రతి చక్రీయ కాల వ్యవధికి గాను (నెలలు లేదా త్రైమాసాలు) సగటును లెక్కించాలి.
4. అన్ని కాల వ్యవధుల సగటులను సంకలనం చేసి సాధారణ సగటును లెక్కించాలి.

ఈ అంశాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని క్రింది దత్తాంశానికి ప్రవృత్తిని పద్ధతి ద్వారా ఋతు సూచికలను లెక్కిద్దాం.

సంవత్సరం	మొదటి త్రైమాసం	రెండవ త్రైమాసం	మూడవ త్రైమాసం	నాలుగవ త్రైమాసం
1991	30	40	36	34
1992	34	52	40	44
1993	40	58	54	48
1994	54	76	68	62
1995	80	92	86	82

క్రింది పట్టికలో ముందుగా నిష్పత్తి చలిత మాధ్యమాల సగటులను లెక్కిద్దాం.

సంవత్సరం	త్రైమాసికం	ఇచ్చిన అంకెలు	నాలుగు త్రైమాసాల చలిత మొత్తాలు	రెండుఅంకెల చలితమొత్తాల సెంటరు	4 అంకెల చలిత సగటు	ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని చలిత మాధ్యమాలకి శాతంలో
1989	I	290				
	II	280				
			1165			
	III	285		2360	290.5	96.6
			1195			
	IV	310		2415	301.1	102.7
			1220			
1990	I	320		2465	308.1	103.9
			1245			
	II	305		2510	313.8	97.2
			1265			
	III	310		2550	318.8	97.2
			1285			
	IV	330		2586	323.2	102.1
			1301			
1991	I	340		2612	326.5	104.1
			1311			
	II	321		2632	329.0	97.6
			1321			
	III	320		2672	334.0	95.8
			1351			
	IV	340		2741	342.6	99.2
			1390			
1992	I	370		2822	352.8	104.9
			1432			
	II	360		2904	363.0	99.2
			1472			
	III	362		2944	368.0	98.4
			1472			
	IV	380		2934	366.8	103.6
			1462			
1993	I	370		2917	364.6	101.5
			1455			
	II	350		2900	362.5	96.6
			1455			
	III	355		2875	359.4	98.8
			1430			
	IV	370		2846	355.8	104.0
			1416			
1994	I	355		2812	351.5	101.0
			1396			
	II	336		2772	346.5	97.0
			1376			
	III	335		2757	344.6	97.2
			1381			
	IV	350		2767	345.9	101.2
			1386			
1995	I	360		2779	347.4	103.6
			1393			
	II	341		2779	349.4	97.6
			1402			
	III	342				
	IV	359				

చలిత మాధ్యమాలకు శాతంలో ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని క్రింది విధంగా లెక్కించవచ్చు.

$$\frac{285}{295.0} x100 = 96.61$$

$$\frac{310}{301.9} x100 = 102.68$$

$$\frac{320}{308.1} x100 = 103.86$$

ఈవిధంగా మిగిలిన త్రైమాసాల శాతాలను లెక్కించవచ్చు.

ఋతుసూచీలను లెక్కించుట

సంవత్సరం	చలిత మాధ్యమాలకు శాతం			
	మొదటి త్రైమాసికం	రెండవ త్రైమాసికం	మూడవ త్రైమాసికం	నాలుగవ త్రైమాసికం
1989	-	-	96.6	102.7
1990	103.9	97.2	97.2	102.1
1991	104.1	97.6	95.8	99.2
1992	104.9	99.2	98.4	103.6
1993	101.5	96.6	98.8	104.0
1994	101.0	97.0	97.2	101.2
1995	103.6	97.6	-	-
మొత్తం	619.0	585.2	584.0	612.8
సగటు	619 + 6 = 103.17	585.2 + 6 = 97.53	584 + 6 = 97.33	612.8 + 6 =102.13
ఋతుసూచీలు	103.1	97.5	97.3	102.1

BRAOU

సగటు అంక మధ్యమం $= \frac{103.17 + 97.53 + 97.33 + 102.13}{4} = \frac{400.16}{4} = 100.04$

ఋతుసూచీలను లెక్కించుట

మొదటి త్రైమాసికంనకు $= \frac{103.17}{100.04} x100 = 103.1$

రెండవ త్రైమాసికంనకు $= \frac{97.53}{100.04} x100 = 97.5$

మూడవ త్రైమాసికంనకు = $\frac{97.33}{100.04} \times 100 = 97.3$

నాలుగవ త్రైమాసికంనకు = $\frac{102.13}{100.04} \times 100 = 102.1$

ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను లెక్కించుటకు ఉపయోగించబడుతున్న పద్ధతులలో చల సగటుకు నిష్పత్తి పద్ధతి ఎంతో మెరుగైన పద్ధతిగా పరిగణించబడుతూ ఉన్నది. అయితే చివరి రెండు త్రైమాసికాలకు ఆరంభంలోని రెండు త్రైమాసికాలకు ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని చలిత సగటులో శాతంగా చూపించవీలు లేదు. అంటే ఈ పద్ధతి దత్తాంశాన్ని పూర్తిగా ఉపయోగించుకోదు.

30.6.4 లింకు సాపేక్షాల పద్ధతి (Link Relative Method)

ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించుటకు అందుబాటులో ఉన్న వివిధ పద్ధతులలో లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ఎంతో కష్టమైంది. ఆచరణలో దీనిని ఎక్కువగా ఉపయోగించరు. ఈ పద్ధతిననుసరించి ఋతు సూచీలను ఏవిధంగా లెక్కిస్తారో క్రింది దత్తాంశం నుండి గ్రహిస్తాం. అందుకుగాను

$$\frac{\text{ప్రస్తుత ఋతవు అంకెలు}}{\text{గత ఋతువు అంకెలు}} = \frac{t}{t-1} \times 100$$ గా లెక్కించాలి. దీనిని లింక్ సాపేక్షాలు అంటారు. వీటిని పట్టికలో వ్రాయాలి. వీటిని గొలుసు సాపేక్ష విలువలుగా (chain relatives) మార్చాలి.

	త్రైమాసికాలు			
సంవత్సరాలు	I	II	III	IV
1989	283	258	244	260
1990	210	208	204	241
1991	194	168	159	183
1992	159	162	168	189
1993	184	179	176	197
1994	179	182	182	219
1995	200	204	207	243

లింక్ సాపేక్షకాల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సూచీలను లెక్కించుట

	త్రైమాసికాలు			
సంవత్సరాలు	I	II	III	IV
1989	-	91.17	94.57	106.56
1990	80.77	99.05	98.08	118.14
1991	80.50	86.60	94.64	115.09
1992	86.89	101.89	103.70	112.50
1993	97.35	97.28	98.32	111.93
1994	90.86	101.68	100.00	120.33
1995	91.32	102.00	101.47	117.39
మొత్తం	527.69	679.67	690.78	801.94
సగటు	527.69/6 = 87.95	679.67/7 = 97.10	690.78/7 = 98.68	801.94/7 = 114.56
గొలుసు సాపేక్షకాలు	100	$\frac{100 X 97.10}{100}$ = 97.10	$\frac{98.68 X 97.25}{100}$ = 95.97	$\frac{114.56 X 95.97}{100}$ = 109.94

BRAOU

సాపేక్షవిలువలు లెక్కించుట :

$$= \frac{241}{204} x 100 = 118.14 \; ; \quad \frac{204}{208} x 100 = 98.08 \; ;$$

$$\frac{208}{210} x 100 = 99.05 \; ; \quad \frac{210}{260} x 100 = 80.77 \, .$$

ఇదేవిధంగా మిగతా సాపేక్షకాల విలువను లెక్కించవచ్చు.

నాలుగవ త్రైమాసికం ఆధారితంగా మొదటి త్రైమాసిక గొలుసు సాపేక్ష విలువ

$$\frac{\text{మొదటి త్రైమాసిక లింక్ సాపేక్ష విలువ} \times \text{4వ త్రైమాసిక గొలుసు సాపేక్ష విలువ}}{100} =$$

$$= \frac{87.95 x 109.94}{100} = \frac{9669.22}{100} = 96.69$$

ఇప్పుడు లెక్కించిన మొదటి త్రైమాసిక గొలుసు సాపేక్షిక విలువకి, మొదట అనుకొన్న విలువలకి మధ్యగల తేడా = 96.69 - 100 = -3.31.

ప్రతి త్రైమాసంనకు తేడా = $\frac{-3.31}{4} = -0.83$

ఆవిధంగా మొదటి త్రైమాసంనకు గాను సవరించిన గొలుసు సాపేక్ష విలువ = 100

2వ త్రైమాసికంనకు = 97.10 - (-0.83) = 97.10 + 0.83 = 97.93

3వ త్రైమాసికంనకు = 95.97 - 2 (-0.83) = 95.97 + 1.66 = 97.63

4వ త్రైమాసికంనకు = 109.94 - 3= (-0.83) = 109.94 + 2.49 = 112.43

సవరించిన గొలుసు సాపేక్షకాల సగటు =

$$\frac{100 + 97.93 + 97.63 + 112.43}{4} = \frac{407.99}{4} = 102.00$$

	త్రైమాసికాలు		
1	2	3	4
సవరించిన గొలుసు సాపేక్షకాలు 100	97.93	97.63	112.43
ఋుతుసూచీలు $\frac{100}{102.00}$ = 98.04	$\frac{97.93}{102.00}$ x100 = 96.01	$\frac{97.63}{102.00}$ x100 = 95.72	$\frac{112.43}{102.00}$ x100 = 110.23

ఈవిధంగా లింక్ సాపేక్షకాల పద్ధతిని ఉపయోగించి ఋుతుసూచికలు కనుక్కోవచ్చు. అయితే ఈ పద్ధతి ఎంతో కష్టమైనదని గమనించాలి.

30.7 వృద్ధి రేట్లు (Growth Rates)

Y = f (t) ప్రమేయ సంబంధం నుండి వృద్ధిరేటును $\frac{dY}{dt} \div \overline{Y}$ గా నిర్వచించవచ్చు.

ఇక్కడ Y = ఆర్థిక చలరాశిని తెలియచేయు ఆధారిత చలరాశి

t = కాలంను (సంవత్సరములలో) తెలియచేయును.

$$\frac{dy/dt}{Y} = \frac{\text{ఉపాంత ఫలం}}{\text{ఆధారిత చలరాశి సగటు}}$$

అయితే అర్థశాస్త్రంలో కాలశ్రేణికి సంబంధించి వివిధ చలరాశుల (జాతీయాదాయం, ఎగుమతులు, దిగుమతులు, పన్నులు, ప్రభుత్వ వ్యయం, పొదుపు వ్యవసాయ పంటల దిగుబడి, ఉత్పత్తి, విస్తీర్ణం, ఉద్యోగిత, మూలధనం మొదలైనవి) వృద్ధి రేట్లను లెక్కించుటకు తరచుగా ఉపయోగించబడుతున్నవి.

ఉదాహరణ : రూ. 100 ఆదాయంపైన 5% వడ్డీ రేటు ఇచ్చినట్లయితే 4 సంవత్సరాల తరువాత ఆదాయ ఎంత పెరుగుతుంది ?

$$Y_t = Y_o (1+i)^n$$

$$= 100\left(1+\frac{5}{100}\right)^4 \qquad = 100 (1 + 0.05)^4$$

$$= 100 (1.05)^4$$

$$= 100 (1.22) = \text{రూ. } 121.55 \text{ లు.}$$

నాలుగు సంవత్సరాల తరువాత ఆదాయం రూ. 121=55లకు పెరుగుతుంది. అంటే ఆరంభంలో యఉన్న ఆదాయం రూ. 100 నాలుగు సంవత్సరాల తరువాత 5% వడ్డీరేటు చొప్పున రూ122 - 55 లకు పెరుగుతుంది.

కాలశ్రేణి దత్తాంశంతో కూడా కాంపౌండ్ వృద్ధి రేటును లెక్కించవచ్చు. అందుకుగాను $Y = a b^t$ అను సమీకరణంను వాడవచ్చు. వృద్ధి రేటును కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేయుటకుగాను పై ఘాతిక వక్రం (exponential curve) ను సంవర్గమానం ద్వారా $\log Y = \log a + \log bt$ గా రాయవచ్చు.

$$\frac{1}{Y}\cdot\frac{dY}{dt} = \log b$$

CGR = (Anti log. log b -1) x 100 (CGR = Compound Growth Rate)

సంవత్సరం	ఉత్పత్తి	t = T - 1991	t^2	log Y	t .log Y
1988	32	-3	9	1.5051	- 4.5153
1989	47	-2	4	1.6721	- 3.3442
1990	65	-1	1	1.8129	- 8129
1991	92	0	0	1.9638	0
1992	132	1	1	2.1206	2.1206
1993	190	2	4	2.2788	4.5576
1994	275	3	9	2.4398	7.3179
N = 7		Σt 2 = 28		Σlog Y = 13.7926	Σt .log Y = 4.3237

BRAOU

$$\log b = \frac{\sum t \log Y}{\sum t^2} = \frac{4.3237}{28} = 0.154$$

$$\log a = \frac{\sum t \log Y}{N} = \frac{13.7926}{7} = 1.9704$$

C G R = [Anti log (log b) -1] x 100

= Anti log 0.154 -1 x 100

= (1.43 -1) x 100 = 0.43 x 100 = 42.56%

అనుభావిక పరిశీలనలో కాంపౌండ్ వృద్ధిరేట్ల ద్వారా కాలశ్రేణి దత్తాంశంలో పెరుగుదల ధోరణిని అధ్యయం చేయడంను గమనించవచ్చు. వ్యవసాయ, పారిశ్రామిక రంగాలలో వివిధ చలరాశులు పెరుగుదల తీరును అధ్యయనం చేయుటకు కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లను లెక్కిస్తున్నారు. భారతదేశ మ్యాన్ ఫ్యాక్చరింగ్ రంగంలో ఉద్యోగిత, మూలధనం, ఉత్పత్తుల కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లను క్రింద గమనించవచ్చు (1973-74-1989-90).

చలరాశి	భారతీయ మ్యాన్‌ఫాక్చరింగ్ రంగంలో కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లు (1973 - 74 —— 1989 - 90)
ఉత్పత్తి = V	$\log_e V = 8.3799+0.1362831\ t$
(Value Added)	CGR = 14.59%
స్థిరమూలధనం K	$\log_e K = 8.5754+0.14431\ t$
	CGR = 15.488%
ఉద్యోగిత (శ్రామికులు) L	$\log_e L = 8.4075 + 0.01191\ t$
	CGR = 1.196 %

ఆధారం : M. Upender, " Elasticity of Labour Productivity in Indian Manufacturing Sector ", Productivity, Oct - Dec, 1995.

30.8 ముగింపు

కాలశ్రేణి విశ్లేషణలో కాలం ముఖ్యమైన కారకం. చలరాశిలోని మార్పులు కాలగతితో సంబంధాన్ని కలిగి ఉంటాయి. కాలశ్రేణులలో దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి, ఋతువుల వల్ల కలిగే మార్పులు, చక్రీయమైన మార్పులు, యాదృచ్ఛికమైన మార్పులు అనే నాలుగు భాగాలుంటాయి. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తిని సరళ వక్రరేఖ పద్ధతిని, ఎంపిక చేసిన బిందువులు, అర్థ సగటుల పద్ధతి, చలిత మాధ్యమాల (సగటుల) పద్ధతి, కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతుల ద్వారా అంచనా వేయవచ్చు. అయితే కనిష్ఠవర్గాల పద్ధతి ఉత్తమమైన పద్ధతిగా పరిగణింపబడుతుంది. ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను సామాన్య సగటుల పద్ధతి, ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి, నిష్పత్తి చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి, లింక్

సాపేక్షాల పద్ధతుల ద్వారా కొలువవచ్చు. ఇందులో నిష్పత్తి మాధ్యమాల పద్ధతి చాలా అనువైంది. కావున దీనిని ఎక్కువగా ఉపయోగించి ఋతు సంబంధ చాంచల్యాలను లెక్కిస్తారు. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా అంచనా వేయబడే ప్రతిగమన గుణకాల ద్వారా సరళ, కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లను అంచనా వేయవచ్చు.

30.9 చదవ దగిన పుస్తకాలు

R.G.D. Allen	:	Statistics for Economists
Croxton and Cowden	:	Applied General Statistics
B.N. Gupta	:	Introduction to Modern Statistics
C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
Taro Yamane	:	Statistics
A. L. Nagar and R.K. Das	:	Basic Statistics.

30.10 పదకోశం

Long time	: దీర్ఘకాలం
Fluctuations	: చాంచల్యాలు
Secular movement	: దీర్ఘకాలిక గమనాలు
Seasonal variations	: ఋతువుల వల్ల కలిగే మార్పులు
Trade cycles	: వ్యాపార చక్రాలు
Cyclical variations	: చక్రీయ మార్పులు
Random variations	: యాదృచ్ఛిక మార్పులు
Components of time series	: కాలశ్రేణుల భాగాలు
Multiplicative relationship	: గుణకార సంబంధం
Observations	: ప్రేక్షితాలు
Linear trends	: సరళ ప్రవృత్తులు
Non - linear trends	: అసరళ ప్రవృత్తులు
Moving averages	: చలిత సగటులు
Least square method	: కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి
Linear growth rates	: సరళ వృద్ధి రేట్లు
Compound growth rates	: కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లు
Methods of simple averages	: సామాన్య సగటుల పద్ధతి

B R A O U

6 (a) అవధి $\lim_{x \to 0} \left[\frac{(1+x)^3 - 1}{x} \right]$ ను కనుగొనండి.

(b) $y = \sqrt{3x^2 - 7}$ ప్రమేయానికి $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనండి.

7 (a) అంతర్లీన ప్రమేయ అవకలన గుణకాన్ని నిర్వచింపుము.

(b) $z = f(x,y)$ ఒక సరళ సమమాత ప్రమేయమైతే,

$x.\frac{dz}{dx} + y.\frac{dz}{dy} = z$ అవుతుందని ఋజువు చేయుము.

8. (a) 'క్రామర్స్' రూలును తెలుపుము.

(b) కింది సమీకరణాలను 'క్రామర్స్' రూలునుపయోగించి సాధింపుము.

$x + y + z = 7$

$x + 2y + z = 16$

$x + 3y + 4z = 22$

విభాగం - B : సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు

(54మార్కులు)

కింది వాటిలో ఏవైనా రెండు ప్రశ్నలకు వివరంగా జవాబులు రాయండి.

ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు 15 మార్కులు (2 × 15 = 30)

9. దత్తాంశమనగా నేమి ? దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను విమర్శనాత్మకంగా వివరింపుము.

10. వివిధ కేంద్ర స్థానపు కొలతలేవి ? సంక్షిప్తంగా వివరించండి.

11. జాతీయాదాయం అంటే ఏమిటి ? జాతీయదాయాన్ని అంచనా వేయు వివిధ పద్ధతులను వివరింపుము.

12. కింది దత్తాంశం నుండి కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలను లెక్కింపుము.

సంవత్సరం	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
అమ్మకాలు(టన్నులలో)	100	115	208	309	408	[illegible]	900

కింది ఆరింటిలో ఏవైనా మూడు ప్రశ్నలకు సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు 8 మార్కులు (3 × 8 = 24)

13. టోకు ధరలకు, చిల్లర ధరలకు మధ్యగల తేడాను వివరింపుము.

14. కాలశ్రేణి దత్తాంశంతో సరళ, కాంపౌండ్ వృద్ధి రేట్లను లెక్కించు సూత్రాలేవి ?

15. సెన్సస్ పద్ధతికి, శాంపుల్ పద్ధతికి గల తేడా యేమిటి ?

16. ప్రతి రూపం అంటే ఏమిటి ? వాటి దోషాలేమిటి ?

17. బార్ చిత్ర పటం అంటే ఏమిటి ? ఒక బహుళ బార్ పటాన్ని గీయండి .

18. అంక మధ్యమం, గుణ మధ్యమం, హార మధ్యమ విలువల మధ్య సంబంధాన్ని తెలుపండి .

B R A O U

డా॥ బి. ఆర్. అంబేద్కర్ సార్వత్రిక విశ్వవిద్యాలయం

ఎం.ఏ. అర్థశాస్త్రం (మొదటి సంవత్సరం)

కోర్సు - 4 : సంఖ్యాత్మక పద్ధతులు

పాఠ్య ప్రణాళిక

Part - A : గణిత శాస్త్ర పద్ధతులు

ఖండం - I : బీజ గణితం - అర్థశాస్త్రంలో కొన్ని ప్రమేయాలు, రేఖా చిత్రాలు

1. గణిత శాస్త్ర పద్ధతుల పరిచయం, బీజగణితంలో కొన్ని ప్రాథమిక విషయాలు
2. సమితులు , ప్రమేయాలు
3. అర్థశాస్త్రంలో ప్రమేయాలు, రేఖా చిత్రాలు
4. ప్రమేయాల అవధులు, అవిచ్ఛిన్నత

ఖండం - II : అవకలనం

5. అవకలనం
6. సంవర్గమాన అవకలనం, అంతర్లీన ప్రమేయాల అవకలనం, పారంపర్య అవకలనం
7. ఏకచలరాశి ప్రమేయాలు : గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు

ఖండం - III : పాక్షిక అవకలనం

8. పాక్షిక అవకలనం
9. సమాఘాత ప్రమేయాలు
10. ద్విచలరాశి ప్రమేయాల గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు
11. సమాకలనం

ఖండం - IV : మాత్రికా బీజగణితం

12. మాత్రికలు నిర్ధారకాలు
13. ఉత్పాదకాల - ఉత్పత్తుల విశ్లేషణలో ప్రాథమిక విషయాలు
14. ఏక ఘాత ప్రణాళిక

BRAOU

Part - B : సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులు

ఖండం -V : దత్తాంశపు సాంఖ్యక విశ్లేషణ

15 . సాంఖ్యక పద్ధతుల పరిచయం

16 . దత్తాంశ సేకరణ - వర్గీకరణ

17 . కేంద్ర స్థానపు కొలతలు

18 . విస్తరణ, వైషమ్యం, కకుదత్వం కొలతలు

ఖండం -VI : సంభావ్యత, సంభావ్యత విస్తరణ, అంచనాలు

19 . సంభావ్యతా భావన - ప్రాథమిక సంభావ్యతా సిద్ధాంతం

20 . సంభావ్యత విస్తరణ - ద్విపద, పాయిజన్, సామాన్య విస్తరణలు

21 . ప్రతిచయన విభాజనం, ప్రమాణ దోషం, సార్థకతా పరీక్ష

ఖండం - VII: సహ సంబంధం, ప్రతిగమనం

22. సహ సంబంధం, ప్రతిగమన విశ్లేషణ - కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి

23. బహుళ సహ సంబంధం, బహుళ ప్రతి గమన విశ్లేషణ - పాక్షిక సహ సంబంధం, ప్రతిగమన గుణకాలు

ఖండం - VIII : దత్తాంశ ఆధారాలు , సూచీ సంఖ్యలు, కాల శ్రేణులు

24. స్థూల ఆర్థిక దత్తాంశ స్వభావం, ఆధారాలు : భారత దేశ ఆర్థిక వ్యవస్థ దత్తాంశ ఆధారం

25. జాతీయాదాయం, మదింపు పద్ధతులు : భారతదేశ జాతీయాదాయం

26. ధర, ద్రవ్య సప్లయ్ గణాంకాలు

27. జనాభా గణాంకాలు

28. శాంపుల్ సర్వే - నేషనల్ సాంపుల్ సర్వే

29. సూచీ సంఖ్యల సిద్ధాంతం - భారత దేశంలో సూచీ సంఖ్యలు

30. కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ, కాల శ్రేణుల భాగాలు, వృద్ధి రేట్ల గణన

BRAOU