గణితశాస్త్రం

సంఖ్యా విశ్లేషణము, కంప్యూటర్ ప్రోగ్రామింగ్ ప్రాథమిక సూత్రాలు

డా॥ బి.ఆర్. అంబేద్కర్ సార్వత్రిక విశ్వవిద్యాలయం
హైదరాబాద్
1992.

విషయ సూచిక

మొదటి భాగం

సంఖ్యా విశ్లేషణము

బ్లాక్ – 1 : అంతర్వేశనము

*ఇచ్చిన బిందువుల గుండా పోయే ఒక గ్రాఫ్ యొక్క ప్రమేయమును కనుక్కోవడానికి అంతర్వేశనము ఉపయోగపడుతుంది. ప్రమేయపు రూపం వ్యక్తం **(explicit)** గా తెలియకుండా కొన్ని బిందువుల వద్ద ఆ ప్రమేయపు విలువలు తెలిసినపుడు, ఇచ్చిన బిందువుల మధ్య బిందువుల వద్ద ప్రమేయపు విలువలను అంచనా వేయడాన్ని అంతర్వేశనము అంటారు. అంతర్వేశనం ద్వారా అంచనా వేసిన అంతర్వేశన ప్రమేయంను తక్కువ తరగతి బహుపదులతో ఉజ్జాయింపు చేసినపుడు మాత్రమే ఈ విధమైన అంతర్వేశనం అర్థవంతంగా ఉటుంది. ఈనాడు, ప్రోగ్రామ్డ్ కాలిక్యులేటర్లు, కంప్యూటర్లు అందుబాటులో ఉండడం వల్ల ఒక పట్టికలో రెండు విలువల మధ్య విలువలను అంచనా వేయదం **(art of reading between the lines in a table)** ఎంతో తేలిక అయింది. ఇంకా, ఇప్పుడు అంతర్వేశనం చేయడానికి స్ప్లైన్ ప్రమేయాలు **(spline functions)**, ఆధునిక పద్ధతులను ఉపయోగిండమే కాకుండా, బహుపది అంతర్వేశనంకు అందుబాటులో లేని సందర్భాలలో దోషాలను అంచనా వేయడానికి కూడా ఈ పద్ధతులు ఉపయోగపడుతున్నాయి.*

ఖండిక – 1 : సాధారణ పరిమిత భేదాలు

ఖండిక – 2 : విభాజిత భేదాలు

ఖండిక – 3 : కేంద్రీయ భేదాలు

ఖండిక – 4 : అంతర్వేశన సూత్రాలలో దోషాలు, కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు

ఖండిక – 5 : విలోమ అంతర్వేశనము

భేదాలునస్తాయి. ఇచ్చిన సమస్య మీద ఆధారపడి ఎనం వినియోగించటానికి మూడు రకాలైన (పురోగమన, తిరోగమన, కేంద్రీయ) భేదాలు ఉన్నాయి. ఇవి అవకలన పరికర్తవలె మనకు ఉపయుక్తమైన అనేక రకరకాలైన operations ను ఇస్తాయి.

1.3 భేదపట్టిక నిర్మాణం

1.3.1 పురోగమన భేద పరికర్త Δ

ఒక ప్రమేయం $x = a, a+h, a+2h$ ...... విలువలకు అనుగుణం f యొక్క ప్రమేయపు విలువలు $f(a), f(a+h), f(a+2h)$ ... (f ప్రమేయం వ్యక్తంగా తెలియదు, దీనిని అంతర్వేశనం ద్వారా అంచనా వేస్తాం) ఒక పట్టికలో పొందుపరిచామనుకొందాం.

x యొక్క ఏవైనా రెండు వరుస విలువల మధ్య భేదం, ఇక్కడ h(ఒక స్థిరాంకం) ను భేద అంతరం (interval of differencing) అంటాము.

పురోగమన భేదపరికర్త (forward difference operator) Δ ను

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$ గా నిర్వచిస్తాము.

$\Delta f(x)$ ను $f(x)$ యొక్క మొదటి భేదము అంటాము.

$f(x)$ యొక్క రెండొవ భేదాన్ని క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\{f(x+h) - f(x)\}$$
$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$f(x)$ యొక్క n వ భేదాన్ని క్రింది ఆవృత్తి సూత్రము ద్వారా నిర్వచిస్తాము.

$$\Delta^n f(x) = \Delta\left\{\Delta^{n-1} f(x)\right\} = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$$

$x = a, a+h, a+2h, \ldots$ లకు, $\Delta f(x)$ నిర్వచనం నుండి

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$
$$\Delta f(a+h) = f(a+2h) - f(a+h)$$
$$\Delta f(a+2h) = f(a+3h) - f(a+2h)$$ మొదలైనవి.

ఇదే విధంగా వాటి రెండొవ భేదాలు,

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+h) - \Delta f(a)$$
$$= f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a),$$
$$\Delta^2 f(a+h) = \Delta f(a+2h) - \Delta f(a+h)$$
$$= f(a+3h) - 2f(a+2h) + f(a+h),$$ మొదలైనవి.

మూడవ భేదాలను, $\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a+h) - \Delta^2 f(a)$

$$= f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a).$$

$\boxed{\text{SAQ1}}$: $f(x) = x^2 + 2x + 1, h = 2$ అయితే $\Delta f(x)$ ను గణించండి.

$\boxed{\text{SAQ 2}}$: స్థిరప్రమేయపు మొదటి భేదం ఎంత?

$\boxed{\text{SAQ 3}}$: $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x); \Delta[c f(x)] = c[\Delta f(x)]$, c స్థిరాంకం అని చూపండి.

$a, a+h, a+2h \ldots$ బిందువులను $x_0, x_1, x_2 \ldots$ లతోను ఆ బిందువుల వద్ద ప్రమేయపు విలువలు $f(a), f(a+h), f(a+2h) \ldots$ లను $y_0, y_1, y_2 \ldots$ లతోను సూచిస్తే అపుడు $y_1 - y_0, y_2 - y_1, y_3 - y_2 \ldots$ లను ప్రమేయం y యొక్క మొదటి భేదాలు అంటారు. ఈ భేదాలనువరుసగా $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2 \ldots$ లతో సూచిస్తే, $\Delta y_0 = y_1 - y_0; \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots$ అవుతాయి.

రెండవ భేదాలను, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$.

ఈ విధంగా హెచ్చు తరగతి భేదాలను కూడా నిర్వచించవచ్చు. ఈ విధమైన సంకేతం, భేదపట్టికను నిర్మించడంలో ఉపయోగపడుతుంది.

$\boxed{\text{SAQ 4}}$: $\Delta^3 y_1$ విలువను గణించండి.

1.3.2 భేద పట్టిక

పైన తెలిపిన భేదాలను క్రింద తెలిపిన పట్టికలో వ్రాద్దాం. ఈ విధంగా వ్రాసిన పట్టికనే భేదపట్టిక అంటారు.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$		$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$		
		$\Delta y_3 = y_4 - y_3$			
x_4	y_4				

$$= \left[(x+h)\,x\,(x-h)\ldots\left(x-\overline{r-2}\;h\right)\right] - \left[x\,(x-h)\ldots\left(x-\overline{r-1}\;h\right)\right]$$

$$= rh\,x^{(r-1)}$$

ఇదే విధంగా $\quad \Delta^2 x^{(r)} = \Delta\left(\Delta\, x^{(r)}\right) = \Delta\left(rh\,x^{(r-1)}\right) = rh\left(x^{(r-1)}\right)$

$$= rh\,(r-1)\,h\,x^{(r-2)} = r\,(r-1)\,h^2\,x^{(r-2)}$$

ఈ పద్ధతిని కొనసాగిస్తూ పోతే,

$$\Delta^m x^{(r)} = r\,(r-1)\ldots\left(r-\overline{m-1}\right)h^m\,x^{(r-m)} \text{ if } m \le r.$$

ప్రత్యేక సందర్భంగా, $h = 1$ అయితే

$$x^{(r)} = x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\left(x-\overline{r-1}\right).$$

ఋణ పూర్ణాంకాలకు కూడా ఈ విధమైన నిర్వచనం వర్తింప చేయవచ్చు.

$$x^{(-r)} = \frac{1}{(x+h)\,(x+2h)\,\ldots\,(x+rh)} = \frac{1}{(x+rh)^{(r)}},$$ ఇక్కడ r ధన పూర్ణాంకం.

$$\Delta\, x^{(-r)} = (x+h)^{(-r)} - x^{(-r)} = \frac{1}{(x+2h)\ldots\left(x+\overline{r+1}\;h\right)} - \frac{1}{(x+h)\,\ldots\,(x+rh)}$$

$$= \frac{(x+h)-\left(x+\overline{r+1}\,h\right)}{(x+h)\,(x+2h)\,\ldots\,(x+rh)\left(x+\overline{r+1}\,h\right)} = -rh\;x^{(-r-1)}$$

ఇదే విధంగా, $\quad \Delta^2\,x^{(-r)} = \Delta\left(\Delta\,x^{(-r)}\right) = -rh\,\Delta\,x^{(-r-1)}$

$$= -rh\,(-r-1)\,h\,x^{(-r-2)}$$

$$= r\,(r+1)\,h^2\,x^{(-r-2)}$$

$$\Delta^m\left(x^{-r}\right) = (-1)^m\,r\,(r+1)\ldots(r+m-1)\,h^m\,x^{(-r-m)},\; m \le r$$

గమనిక : $h = 1$ అయినపుడు

$$x^{(-r)} = \frac{1}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+r)}$$

దీని నుండి $x^{(r)}\,(x-r)^{(n)} = x^{(r+n)}$ అని గమనించవచ్చు.

ఇక్కడ r, n లు ధన లేక ఋణ పూర్ణాంకాలు.

ఉదా : $\quad x^{(2)} = x\,(x-1), \quad (x-2)^{(3)} = (x-2)\,(x-3)\,(x-4)$

$$\therefore x^{(2)}\,(x-2)^{(3)} = x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$$

$$= x^{(5)}$$

క్రమగుణిత ప్రమేయము (factorial function) $(x)_n$ ను ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$(x)_n = \prod_{r=1}^{n} (x + r - 1)$$

$$= x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1), \quad n \geq 1$$

$$(x)_0 = 1.$$

ఉదా. 1 : $f(x) = x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$ అను ప్రమేయమును దాని యొక్క పారంపరికభేదాలను, క్రమగుణిత సంకేతంలో వ్రాయండి.

సాధన : $f(x) = x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$

$= x(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-1)(x-2) + cx(x-1) + dx + 9$ అనుకొందాం.

ఇక్కడ b, c, d లు కనుక్కోవలసిన స్థిరాంకాలు $f(x)$ లో $x = 1$ ప్రతిక్షేపిస్తే $d = -17$ వస్తుంది. ఇదే విధంగా $x = 2, 3$ లను ప్రతిక్షేపిస్తే $c = -5, b = -6$ అని వస్తుంది.

$$\therefore f(x) = x^{(4)} - 6x^{(3)} - 5x^{(2)} - 17x^{(1)} + 9.$$

కాబట్టి $\Delta f(x) = 4x^{(3)} - 18x^{(2)} - 10x^{(1)} - 17,$

$$\Delta^2 f(x) = 12x^{(2)} - 36x^{(1)} - 10,$$

$$\Delta^3 f(x) = 24x^{(1)} - 36.$$

$$\Delta^4 f(x) = 24; \ \Delta^5 f(x) = 0.$$

గమనిక : ఇక్కడ $x^{(r)}$ భేదములు, x^r యొక్క అవకలన గుణకం వలే ఉండును.

ఉదా. 2 : ఒక ప్రమేయం మొదటి భేదము $9x^2 + 11x + 5$ అయితే ఆ ప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : కనుక్కోవలసిన ప్రమేయాన్ని $f(x)$ అనుకొందాం.

$$\Delta f(x) = 9x^2 + 11x + 5$$

$$= 9x(x-1) + bx + c.$$

$x = 0, 1$ లను పారంపరికంగా ప్రతిక్షేపిస్తే $c = 5, b = 20$ అని వచ్చును.

$$\therefore \Delta f(x) = 9x^{(2)} + 20x^{(1)} + 5.$$

కాబట్టి $f(x) = 3x^{(3)} + 10x^{(2)} + 5x^{(1)} + k$; k ఒక స్థిరాంకం.

కాబట్టి $f(x) = 3x(x-1)(x-2) + 10x(x-1) + 5x + k$

$$= 3x^3 + x^2 + x + k$$

1.3.5 తిరోగమన భేద పరికర్త ∇ (నేబ్లా)

నిర్వచనం

$a, a+h, a+2h, \ldots$ బిందువుల వద్ద నిర్వచితమైన ప్రమేయము f అయితే, తిరోగమన భేద పరికర్త ∇ ను

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \text{ గా నిర్వచిస్తాము.}$$

కాబట్టి ∇ నిర్వచనంలో, x కు ఎడమవైపు బిందువులను పరిగణనలోకి తీసుకొంటే, Δ, x కు కుడివైపు బిందువులను పరిగణలోకి తీసుకొంటుంది.

∇ యొక్క ఎక్కువ తరగతి ఘాతాల నిర్వచనం :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla(f(x) - f(x-h)) \\
&= \nabla f(x) - \nabla f(x-h) \\
&= [f(x) - f(x-h)] - [f(x-h) - f(x-2h)] \\
&= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h) \\
\nabla^k f(x) &= \nabla^{k-1}(\nabla f(x)) = \nabla^{k-1}(f(x) - f(x-h)) \\
&= \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x-h), \text{ ఇక్కడ } k \text{ ఒక పూర్ణాంకము.}
\end{aligned}$$

గమనిక : ∇, Δ ల మధ్య సంబంధంను

$$\nabla f(x) = \Delta f(x-h) \text{ గా పరిచూడవచ్చు.}$$

$$\nabla^k f(x) = \Delta^k f(x-kh). \text{ ఎందుకంటే,}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x);\ \Delta f(x-h) = f(x-h+h) - f(x-h) \\
&= f(x) - f(x-h) = \nabla f(x).
\end{aligned}$$

తిరోగమన భేదపట్టిక క్రింది విధంగా ఉంటుంది

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
x_0	y_0				
		$\nabla y_1 = y_1 - y_0$			
			$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1$		
x_1	y_1				
				$\nabla^3 y_3 = \nabla^2 y_3 - \nabla^2 y_2$	
		$\nabla y_2 = y_2 - y_1$			
					$\nabla^4 y_4 = \nabla^3 y_4 - \nabla^3 y_3$
			$\nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2$		
x_2	y_2				
				$\nabla^3 y_4 = \nabla^2 y_4 - \nabla^2 y_3$	
		$\nabla y_3 = y_3 - y_2$			
			$\nabla^2 y_4 = \nabla y_4 - \nabla y_3$		
x_3	y_3				
		$\nabla y_4 = y_4 - y_3$			
x_4	y_4				

ఉదా : 10, 20, 30, 40, 50 లకు సంవర్గమానాలు (common), 1.0000, 1.3010, 1.4771, 1.6021, 1.6990 లు అని మనకు తెలుసు. ఈ దత్తాంశానికి తిరోగమన భేద పట్టికను వ్రాసి $\nabla^4 f(x+4h)$, $h = 10$ ను గుర్తించండి.

తిరోగమన భేద పట్టిక

x	y	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$	$\nabla^4 f(x)$
10	1.0000				
		0.3010			
20	1.3010		– 0.1249		
		0.1761		0.0738	
30	1.4771		– 0.0511		– 0.0508
		0.1250		0.0230	
40	1.6021		– 0.0281		
		0.0969			
50	1.6990				

ఇక్కడ $\nabla f(50) = f(50) - f(40) = 0.0969$, $\Delta f(40) = 0.0969$ etc.

$\nabla^4 f(50) = -0.0508$.

1.4 Δ, ∇, D, E ల మధ్య సంబంధం

$y = f(x)$, x లో ప్రమేయము అనుకొందాం.

x యొక్క వరుస విలువలు $a, a+h, a+2h, \ldots$ అనుకొందాము.

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a) \text{ అని మనకు తెలుసు.}$$

E అనే భ్రంశ పరికర్త (displacement operator) ను ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$E f(a) = f(a+h).$$

E, Δ ల మధ్య సంబంధాన్ని ఈ క్రింది విధంగా రాబట్టవచ్చు.

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$

$$= E f(a) - f(a).$$

$$\text{అందువలన } E f(a) = f(a) + \Delta f(a)$$

$$= (1+\Delta) f(a).$$

ఇదే విధంగా

$$\nabla [cf(x)] = c \nabla f(x),$$

$$E [cf(x)] = c Ef(x),$$

ఇక్కడ c అనునది ఒక స్థిరాంకము.

(iii)
$$\Delta^p \Delta^q f(x) = \Delta^p \left[\Delta^q f(x)\right]$$
$$= (\Delta\Delta\Delta \ldots p \text{ సార్లు}) \cdot (\Delta\Delta\Delta \ldots q \text{ సార్లు}) f(x)$$
$$= \left[\Delta\Delta\Delta \ldots (p+q) \text{ సార్లు}\right] f(x)$$
$$= \Delta^{p+q} f(x),$$

యిక్కడ p మరియు q లు ధనపూర్ణాంకాలు.

ఇదే విధంగా, $$\nabla^p \nabla^q f(x) = \nabla^{p+q} f(x),$$

$$E^p E^q f(x) = E^{p+q} f(x).$$

గమనికలు :

1. m ఒక ధనపూర్ణాంకమైతే Δ^{-m} ను క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$\Delta^m \left[\Delta^{-m} f(x)\right] = f(x).$$

ఇదే విధంగా

$$\nabla^m \left[\nabla^{-m} f(x)\right] = f(x),$$

$$E^m \left[E^{-m} f(x)\right] = f(x).$$

2. $E\Delta = \Delta E$.

$$E \Delta f(x) = E [f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - f(x+h).$$

$$\Delta E f(x) = \Delta f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h).$$

కాబట్టి $$E\Delta = \Delta E$$

3. $\nabla E = \Delta = E \nabla$

$$\nabla E f(x) = \nabla f(x+h)$$
$$= f(x+h) - f(x)$$
$$= \Delta f(x)$$
$$\nabla E = \Delta. \qquad \ldots (1)$$

ఇంకా $E\nabla f(x) = E[f(x)-f(x-h)]$

$$= f(x+h)-f(x)$$

$$= \Delta f(x)$$

$$E\nabla = \Delta. \quad \ldots (2)$$

(1), (2) ల నుండి

$$\nabla E = \Delta = E\nabla.$$

ఉదా. 1 : క్రింది పరికర్తల సంబంధాలను నిరూపించండి.

(a) $(1+\Delta)(1-\nabla) = 1$

(b) $E = (1-\nabla)^{-1}$

(c) $\Delta\nabla = \Delta - \nabla$

(d) $\nabla = E^{-1}\Delta$

(a) $(1+\Delta)(1-\nabla)f(x)$

$$= EE^{-1}f(x) = Ef(x-h)$$

$$= 1 \cdot f(x)$$

$$\therefore (1+\Delta)(1-\nabla) = 1.$$

(b) $Ef(x) = f(x+h)$

$$(1-\nabla)^{-1}f(x) = \left(E^{-1}\right)^{-1}f(x)$$

$\left(\because \left(E^{m}\right)^{n} = E^{mn}\right)$

$$= Ef(x) = f(x+h).$$

$$\therefore E = (1-\nabla)^{-1}.$$

(c)

$$\Delta\nabla f(x) = (E-1)\left(1-E^{-1}\right)f(x)$$

$$= (E-1)[f(x)-f(x-h)]$$

$$= f(x+h)-f(x)-f(x)+f(x-h).$$

$$(\Delta-\nabla)f(x) = \left(E-1-1+E^{-1}\right)f(x)$$

$$= f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$$

$$\therefore \Delta\nabla = \Delta - \nabla.$$

(d)
$$\nabla f(x) = \left(1 - E^{-1}\right) f(x)$$
$$= f(x) - f(x-h),$$
$$E^{-1} \Delta f(x) = E^{-1}(E-1) f(x)$$
$$= E^{-1}[f(x+h) - f(x)]$$
$$= f(x) - f(x-h)$$
$$\therefore \nabla = E^{-1} \Delta.$$

ఉదా. 2 : ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించండి.

(a)
$$\Delta\left(f_i g_i\right) = f_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta f_i$$

(b)
$$e^x = \left(\frac{\Delta^2}{E}\right) e^x . \frac{E e^x}{\Delta^2 e^x}$$

(భేదించు అంతరము h)

(a)
$$\Delta\left(f_i g_i\right) = (E-1) f_i g_i$$
$$= E f_i g_i - f_i g_i$$
$$= f_{i+1} g_{i+1} - f_i g_i$$
$$f_i \Delta g_i + \Delta g_{i+1} \Delta f_i = f_i (E-1) g_i + g_{i+1} (E-1) f_i$$
$$= f_i g_{i+1} - g_i f_i + g_{i+1} f_{i+1} - f_i + g_{i+1}$$
$$= f_{i+1} g_{i+1} - f_i g_i$$
$$\therefore \Delta\left(f_i g_i\right) = f_i \Delta g_i + g_{i+1} \Delta f_i$$

(b)
$$E e^x = e^{x+h}, \Delta e^x = e^{x+h} - e^x$$
$$= e^x\left(e^h - 1\right),$$
$$\Delta^2 e^x = e^x\left(e^h - 1\right)^2$$
$$\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) e^x = \left(\Delta^2 E^{-1}\right) e^x = \Delta^2 e^{x-h}$$
$$= e^{-h} \Delta^2 e^x.$$
$$\left(\frac{\Delta^2}{E}\right) e^x . \frac{E e^x}{\Delta^2 e^x} = \frac{e^{-h} e^{x+h} \Delta^2 e^x}{\Delta^2 e^x}$$
$$= e^x$$

$$\therefore e^x = \left(\frac{\Delta^2}{E}\right) e^x \cdot \frac{E\, e^x}{\Delta^2 e^x}.$$

ఉదా. 3 : ఈ క్రింది సర్వసమీకరణమును నిరూపించండి.

$$u_x = u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \dots + \Delta^{n-1} u_{x-n} + \Delta^n u_{x-n}.$$

$$u_x - \Delta^n u_{x-n} = u_x - \Delta^n E^{-n} u_x \text{ కాబట్టి}$$

$$= \left\{1 - \frac{\Delta^n}{E^n}\right\} u_x = \left\{\frac{E^n - \Delta^n}{E^n}\right\} u_x$$

$$= \frac{1}{E^n}\left(\frac{E^n - \Delta^n}{E - \Delta}\right) u_x \qquad (\because E - \Delta \equiv 1)$$

$$= E^{-n}\left(E^{n-1} + \Delta E^{n-2} + \Delta^2 E^{n-3} + \dots + \Delta^{n-1}\right) u_x$$

$$= \left(E^{-1} + \Delta E^{-2} + \Delta^2 E^{-3} + \dots + \Delta^{n-1} E^{-n}\right) u_x$$

$$= u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \dots + \Delta^{n-1} u_{x-n}$$

$$\therefore u_x = u_{x-1} + \Delta u_{x-2} + \Delta^2 u_{x-3} + \dots + \Delta^{n-1} u_{x-n} + \Delta^n u_{x-n}.$$

1.5 అంతర్వేశనం

అంతర్వేశనం అంటే ఒక శ్రేణిలో మధ్య పదాలను కూర్చుట. స్వతంత్ర చలరాశి x, కొన్ని విలువలకు దాని ప్రమేయ విలువలు ఇచ్చినప్పుడు, x మధ్యస్థ విలువకు ప్రమేయపు విలువను అంచనా వేయడమే అంతర్వేశనం. చలరాశి x కు ఇచ్చిన విలువల మధ్య కాకుండా, బయట విలవలకు ప్రమేయపు విలువను కట్టడాన్ని బహిర్వేశనం (extrapolation) అంటాము.

పరిమిత భేదముల కలన గణితం (Calculus of Finite Differences) మధ్యము విలువలను అంచనా వేయడానికి ఉపకరిస్తుంది.

1.5.1 న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రం

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ అనేవి (x, y) యొక్క $(n+1)$ విలువలు అనుకోండి. ఇక్కడ x_0, $x_1, \dots x_n$ లు సమాన దూరంలో ఉన్న విలువలు. వీటిని $x_i = x_0 + ih$, $(i = 0, 1, 2, \dots n)$ అనే సూచించవచ్చు. ఈ ఇచ్చిన విలవలతో సరిపోయేటట్లు ఒక n వ తరగతి బహుపదిని అంచనా వేయాల్సి ఉంది. ఏదైనా n వ తరగతి బహుపదిని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\begin{aligned}\phi(x) = {} & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).\end{aligned}$$

$\phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1, \phi(x_2) = y_2 \ldots \phi(x_n) = y_n$ అయ్యేటట్లు తీసుకొందాం.

$\phi(x)$ విలువలో $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ లను ప్రతిక్షేపించి పై సంబంధాలను ఉపయోగిస్తే

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 \\
y_1 &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\
&= a_0 + a_1 h = y_0 + a_1 h \\
\therefore a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} \\
y_2 &= a_0 + a_1 2h + a_2 \cdot 2h \cdot h \\
&= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 2h + a_2 2h^2. \\
\therefore y_2 - 2(y_1 - y_0) - y_0 &= a_2 \cdot 2h^2 \\
\text{or } a_2 &= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \\
&= \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}
\end{aligned}$$

ఇదేవిధంగా, $a_3 = \dfrac{\Delta^3 y_0}{3!\, h^3}, \ldots, a_n = \dfrac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ ల ఈ విలువలను $\phi(x)$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\begin{aligned}
\phi(x) = {} & y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0) \cdot (x - x_1) \\
& + \frac{\Delta^3 y_0}{3! \cdot h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots \\
& + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

ఇదే న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రం (Newton's formula for forward interpolation)

$\dfrac{x - x_0}{h} = u$ లేక $x = x_0 + hu$ ను ప్రతిక్షేపిస్తే,

పై సూత్రం క్రింది విధంగా మారుతుంది.

$$\begin{aligned}
\phi(x) = \phi(x_0 + hu) = {} & y_0 + u\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \\
& + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0
\end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

లేదా $$\phi(x) = y_0 + u^{(1)} \Delta y_0 + \frac{1}{2!} u^{(2)} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3!} u^{(3)} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{u^{(n)}}{n!} \Delta^n y_0.$$

గమనిక : ఈ సూత్రం ప్రారంభ విలువల వద్ద $f(x)$ విలువలను అంతర్వేశనంచేయడానికి ఉపయోగిస్తాము. y_0 దగ్గరలో ఉన్న విలువలకు (ఎడమవైపు) బహిర్వేశనం చేయడానికి కూడా ఈ సూత్రం ఉపకరిస్తుంది.

1.5.2 న్యూటన్ తిరోగమన అంతర్వేశన సూత్రం

పైన రాబట్టిన న్యూటన్‌పురోగమన సూత్రం x యొక్క అంత్య విలువల వద్ద $f(x)$ విలువను అంతర్వేశనం చేయడానికి సాధారణంగా ఉపయోగించము. ఇటువంటి సందర్భాలలో సూత్రాన్ని రాబట్టడానికి $\phi(x)$ ను క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$\phi(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1).$$

అయ్యేటట్లు $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ లను రాబడతాం.

అప్పుడు $\phi(x_n) = y_n, \phi(x_{n-1}) = y_{n-1} \dots \phi(x_0) = y_0.$

అప్పుడు $y_n = a_0$ లేదా $a_0 = y_n,$

$$y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = y_n + a_1(-h)$$

లేదా $$a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\nabla y_n}{h}$$

ఇక్కడ ∇ తిరోగమన భేదపరికర్త.

ఇప్పుడు, $$y_{n-2} = a_0 + a_1(x_{n-2} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})$$

$$= y_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \cdot (-2h) + a_2(-2h)(-h)$$

$$= y_n - 2y_n + 2y_{n-1} + a_2 2h^2.$$

$$\therefore a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\nabla^2 y_n}{2! \cdot h^2}$$

ఇదేవిధంగా

$$a_3 = \frac{\nabla^3 y_n}{3! \cdot h^3}, \dots a_n = \frac{\nabla^n y_n}{n! \cdot h^n}$$

$$\left[\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \text{ కాబట్టి } \nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}\right.$$

$$= y_n - y_{n-1} - \left(y_{n-1} - y_{n-2}\right)$$

$$\left.= y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}\right].$$

$a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ విలువలను $\phi(x)$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\phi(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}\left(x - x_n\right) + \frac{\nabla^2 y_n}{2! \cdot h^2}\left(x - x_n\right)\left(x - x_{n-1}\right)$$

$$+ \frac{\nabla^3 y_n}{3! \cdot h^3}\left(x - x_n\right)\left(x - x_{n-1}\right)\left(x - x_{n-2}\right) + \dots$$

$$+ \frac{\nabla^n y_n}{n! \cdot h^n}\left(x - x_n\right)\left(x - x_{n-1}\right)\left(x - x_{n-2}\right)\dots\left(x - x_1\right)$$

దీనినే x లో న్యూటన్ తిరోగమన అంతర్వేశన సూత్రం (Newton's formula for backward interpolation) అంటాం.

ఈ సూత్రంలో $\dfrac{x - x_n}{h} = u$ లేక $x = x_n + hu$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\phi(x) = \phi\left(x_n + hu\right) = y_n + u\,\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n$$

$$+ \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \dots$$

$$+ \frac{u(u+1)(u+2)\dots(u+n-1)}{n!}\nabla^n y_n \text{ అగును.}$$

గమనిక : ఈ సూత్రాన్ని ముఖ్యంగా, x యొక్క అంత్య విలువల వద్ద y విలువలను అంతర్వేశనం చేయడానికి మరియు y_n కు దగ్గరగా బాహ్యంగా ఉన్న విలువలకు బహిర్వేశనం చేయడానికి ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణలు

ఉదా. *1* : క్రింది x మరియు $f(x)$ విలువలకు భేద పట్టికను నిర్మించండి.

x :	0	2	4	6	8
$f(x)$:	7	13	43	145	367

ఈ పట్టికను $f(10)$ విలువ వరకు పొడిగించండి. ఎప్పుడిది వీలవుతుంది.

సాధన :

మొదటి భేదము, రెండవ ఎంట్రీ నుండి మొదటి ఎంట్రీ తీసివేయగా వస్తుంది. అంటే $\Delta f(10) = 13 - 7 = 6$. అలాగే $\Delta f(2) = 43 - 13 = 30$ మొదలగు భేదాలు వస్తాయి. రెండవ తరగతి భేదాలకు కూడా ఈ విధంగానే చేస్తాము.

ఉదాహరణకి, $\Delta^2 f(0) = \Delta f(2) - \Delta f(0) = 30 - 6 = 24$

దీనికి సంబంధించిన భేద పట్టికను వ్రాద్దాం.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	7			
		6		
2	13		24	
		30		48
4	43		72	
		102		48
6	145		120	
		222		48
8	367		168	
		390		
10	757			

పై పట్టిక నుండి $\Delta^3 f(x) = 48$ స్థిరాంకం; $\Delta^4 f(x) = \Delta^5 f(x) = \ldots = 0$ అని వస్తుంది.

కాబట్టి ప్రతి x కు $\Delta^3 f(x)$ స్థిరము అనే ధర్మాన్ని ప్రమేయ విలువను మనకు కావలసిన మేరకు విస్తరించడానికి ఉపయోగించవచ్చు.

పై పట్టికను $f(10) = 757$ వచ్చే వరకు విస్తరించాము.

ఈ విధంగా ఇచ్చిన విలువలకు బాహ్యంగా ఉండే ($f(10)$) విలువలను అంచనా వేసే పద్ధతిని బహిర్వేశనము (extrapolation) అంటారు. ఇది ఇచ్చిన ప్రమేయము మృదువైనది (smooth), h తగినంత చిన్నదైనప్పుడు మాత్రమే సాధ్యము.

ఉదా. *2* : $f(0) = -5, f(1) = 1, f(2) = 9, f(3) = 25, f(4) = 55, f(5) = 105$ విలువలను తీసుకొనే త్రిఘాత బహుపది $f(x)$ ను కనుక్కోండి. న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రం నుపయోగించి $f(3.2)$ విలువను కనుక్కోండి.

$f(x)$ ప్రమేయానికి భేదపట్టిక వ్రాద్దాం.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	−5			
		6		
1	1		2	
		8		6
2	9		8	
		16		6
3	25		14	
		30		6
4	55		20	
		50		
5	105			

(v) Δ, ∇, E ల మధ్య సంబంధాలను రాబట్టి, ఆ పరికర్తల ధర్మాలను వ్రాయండి.

(vi) క్రింది సంబంధాలను నిరూపించుము.

(a) $\Delta + \nabla = \frac{\Delta}{\nabla} - \frac{\nabla}{\Delta}$,

(b) $\Delta f_i^2 = \left(f_i + f_{i+1}\right) \Delta f_i$

(c) $\Delta \left(\frac{f_i}{g_i}\right) = \left(g_i \, \Delta f_i - f_i \, \Delta g_i\right) / g_i \, g_{i+1}$

(d) $\Delta \left(1/f_i\right) = - \Delta f_i / f_i f_{i+1}$.

II. క్రింది ప్రశ్నలకు క్లుప్తంగా సమాధానం రాయండి.

(i) 0, 0, 2, 6, 12, 20 ఉపక్రమానికి భేద పట్టిక వ్రాసి 7వ పదాన్ని, సాధారణ పదాన్ని కనుక్కోండి.

[Ans : 7వ పదం = 30; సాధారణ పదం = $r(r-1)$]

(ii) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$ ప్రమేయాన్ని, దాని భేదాలను క్రమగుణిత సంకేతాలలో వ్రాయండి.

[Ans : $2x^{(3)} + 3x^{(2)} + 2x^{(1)} - 10$;

$\Delta y = 6x^{(2)} + 6x^{(1)} + 2$; $\Delta^2 y = 12x^{(1)} + 6$; $\Delta^3 y = 12$]

(iii) ఒక ప్రమేయం యొక్క మొదటి భేదం $x^3 + 3x^2 + 5x + 12$ అయితే ఆ ప్రమేయాన్ని రాబట్టండి.

[Ans : $\frac{x^{(4)}}{4} + 2x^{(3)} + \frac{9}{2}x^{(2)} + 12x^{(1)} + c$]

(iv) క్రింది పట్టిక $0.10 \le x \le 0.30$ కు $\tan x$ విలువ నిస్తుంది;

x :	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$y = \tan x$:	0.1003	0.1511	0.2027	0.2553	0.3093

tan 0.26, tan 0.12 విలువలు కనుక్కోండి. [Ans : tan (0.26) = 0.2662
tan (0.12) = 0.1205]

(v) ఒక శ్రేణిలో y యొక్క వరుస విలువలు క్రింది పట్టికలో ఈయబడ్డాయి.

x :	3	4	5	6	7	8	9
y :	2.7	6.4	12.5	21.6	34.3	51.2	72.9

ఈ శ్రేణిలో మొదట, పదవ పదాలను కనుక్కోండి. [Ans y (1) = 0.01, y (10) = 100]

(vi) a) $y_4 = y_3 + \Delta y_2 + \Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1$ అని చూపండి.

b) 3వ భేదం వరకు $y_4 = y_0 + 4\,\Delta y_0 + 6\,\Delta^2 y_{-1} + 10\,\Delta^3 y_{-1}$ అని చూపండి..

(vii) $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f_k = \Delta f_n - \Delta f_0$ అని చూపండి.

(viii) $u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_1 + \binom{x}{2} \Delta^2 u_2 + \ldots = u_x + \binom{x}{1} \Delta^2 u_{x-1} + \binom{x}{2} \Delta^4 u_{x-2} + \ldots$ అని చూపండి.

ఇక్కడ $\binom{x}{r} = \dfrac{x(x-1)\ldots\left(x-\overline{r-1}\right)}{r!}$

(ix) $h = 1$ తీసుకొని క్రింది వానిని రాబట్టండి.

a) Δa^x b) $\Delta^4 \left(a e^x\right)$ c) $\Delta^2 x^3$

$\left[\text{Ans : a) } (a-1) a^x\text{; b) } a\,(e-1)^4 e^x\text{; c) } 6x + 6\right]$

(x) $h = 1$ అని తీసుకొని క్రింది వానిని రాబట్టండి.

a) $\dfrac{\Delta^2}{E} x^3$ b) $\dfrac{\Delta^2 x^3}{E x^3}$

$\left[\text{Ans : a) } 6x\text{; b) } \dfrac{6}{(1+x)^2}\right]$

1.9 SAQ లకు సమాధానాలు

SAQ 1 :

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$\Delta f(x) = f(x+2) - f(x) \qquad (\because h = 2)$$

$$= (x+2)^2 + 2(x+2) + 1 - \left\{x^2 + 2x + 1\right\}$$

$$= 4(x+1)$$

SAQ 2 : $f(x) = a$; $\therefore f(x+h) = a$, $\therefore \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = a - a = 0$.

SAQ 3 :

$$\Delta[f(x) + g(x)] = [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]$$

$$= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]$$

$$= \Delta f(x) + \Delta g(x).$$

$$\Delta[c f(x)] = c f(x+h) - c f(x) = c[f(x+h) - f(x)] = c[\Delta f(x)].$$

SAQ 4 :

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta y_3 - \Delta y_2 - \left\{\Delta y_2 - \Delta y_1\right\}.$$

$$= y_4 - y_3 - 2\left\{y_3 - y_2\right\} + y_2 - y_1.$$

$$= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1.$$

SAQ 5 : అనుగమనం ద్వారా ఈ ఫలితమును నిరూపిస్తాము. $n = 1$ అయితే, $f_{x+h} = E f_x = f_x + \Delta f_x$, కాబట్టి ఫలితం నిజము. $n-1$ విలువకు ఫలితం నిజం అనుకొందాం.

అప్పుడు $E^n f_x = E\left[E^{n-1} f(x)\right] = E \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1}{i} \Delta^i f_x.$

కాని $E = 1 + \Delta$ అని మనకు తెలుసు కాబట్టి

$$E^n f_x = (1+\Delta) E^{n-1} f_x = E^{n-1} f_x + \Delta E^{n-1} f_x$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1}{i} \Delta^i f_x + \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1}{i} \Delta^{i+1} f_x$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-1}{i} \Delta^i f_x + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{n-1}{j-1} \Delta^j f_x$$

$k = 0, 1, 2 \ldots n$ అయినప్పుడు $\Delta^k f_x$ యొక్క గుణకము

$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ అవుతుంది.

$$\therefore E^n f_x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \Delta^k f_x .$$

దీనిలో $x = 0, n = x$ అని ప్రతిక్షేపిస్తే

$$f_x = E^x f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} \Delta^k f_0 .$$

ఖండిక –2 : విభాజిత భేదాలు

విషయసూచిక

2.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక అంతానికి మీరు : (i) న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రం రాబట్టి దీనినుపయోగించి అంతర్వేశన సమస్యను సాధించగలగాలి, (ii) లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రం రాబట్టి దీని ద్వారా అంతర్వేశన సమస్యను సాధించడం, ఇచ్చిన అకరణీయ ప్రమేయాన్ని పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా వ్రాయడం చేయగలగాలి.

2.2 ఉపోద్ఘాతం

పట్టికలో ఇచ్చిన ప్రమేయపు విలువలు సమాన అంతరాలలో ఇస్తే, ఖండిక 1లో ఇచ్చిన అంతర్వేశన సూత్రాల ద్వారా అంతర్వేశనం చేస్తాం. ఈ విధంగా సమాన అంతరాలలో ప్రమేయపు విలువలు ఉండడం అనేది నిత్యం మనకెదురయ్యే సమస్యలలో చాలా అరుదు. కాబట్టి సమాన అంతరాలలోలేని పట్టికల అధ్యయనం చేయాల్సిన ఆవశ్యకత ఎంతైనా ఉంది. ఈ విధమైన సమస్యలెదురైనపుడు అంతర్వేశనానికి ఉపయోగపడే న్యూటన్ విభాజిత భేదసూత్రం రాబడతాం. విభాజిత భేదాలు, సాధారణ భేదాలను వాటి argument యొక్క భేదాలతో భాగిస్తే వస్తుంది. లెగ్రాంజ్ అంతర్వేన సూత్రాన్ని కూడా రాబడతాం. ఇందులో విభాజిత భేదాలను ఉపయోగించము. లెగ్రాంజ్ సూత్రం, రెండు చలరాశులు, వీటిలో ఒకటి స్వతంత్ర చలరాశి, ఇంకొకటి అస్వతంత్ర చలరాశి, మధ్య సంబంధం.

2.3 విభాజిత భేద పట్టిక

2.3.1 విభాజిత భేదము యొక్క నిర్వచనము, సంకేతము

$x = a, b, c, d, \ldots$ విభిన్న విలువలకు u_x ప్రమేయపు విలువలు యిచ్చారనుకుందాము. ఇక్కడ $b-a, c-b, d-c, \ldots$ అంతరాలు సమానంగా ఉండాలన్న నియమము లేదు. (ఇక్కడ $a, b, c, d, \ldots$ లు పరిమాణ ఆరోహణ క్రమంలో ఉండాల్సిన అవసరం లేదు.)

ఈ పరిస్థితులలో a, b ల వద్ద u_x యొక్క విభాజిత భేదమును క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$$\underset{b}{\Delta} u_a = \frac{u_b - u_a}{b - a}$$

విభాజిత భేద పరికర్తతో భేద పట్టికను క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
a	u_a			
		$\underset{b}{\Delta} u_a$		
b	u_b		$\underset{bc}{\Delta^2} u_a$	
		$\underset{c}{\Delta} u_b$		$\underset{bcd}{\Delta^2} u_a$
c	u_c		$\underset{cd}{\Delta^2} u_a$	
		$\underset{d}{\Delta} u_c$		
d	u_d			

ప్రమేయపు విలువలలో 2వ విభాజిత భేదము క్రింది విధంగా రాబట్టవచ్చును.

$$\underset{bc}{\Delta^2} u_a = \frac{\underset{c}{\Delta} u_b - \underset{b}{\Delta} u_a}{c - a} = \frac{\dfrac{u_c - u_b}{c - b} - \dfrac{u_b - u_a}{b - a}}{c - a}$$

$$= \frac{u_a}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_b}{(b-c)(b-a)} + \frac{u_c}{(c-a)(c-b)}$$

యిదే విధంగా మూడవ విభాజిత భేదమును రాబట్టిన

$$\underset{bcd}{\Delta^3} u_a = \frac{u_a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{u_b}{(b-c)(b-d)(b-a)}$$

$$+ \frac{u_c}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{u_d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$ అగును.

u_x యొక్క n వ విభాజిత భేదాలను

$$\underset{bc\ldots lm}{\Delta^n} u_a = \left(\underset{c, \ldots lm}{\Delta^{n-1}} u_b - \underset{bc\ldots l}{\Delta^{n-1}} u_a\right) \Big/ (m - a),$$

ఇక్కడ $a, b \ldots m$ లు x యొక్క విభిన్న విలువలు.

పై ఫలితాలు క్రింది సిద్ధాంతం యొక్క ప్రత్యేక సందర్భాలు అవుతాయి.

సిద్ధాంతం 1 :

> 'x' చలరాశి విలువలు $a, b, c \ldots j, k$ అయిన
>
> $$\underset{bc\ldots jk}{\Delta^r} u_a = \frac{u_a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)} + \frac{u_b}{(b-a)(b-c)\ldots(b-k)} + \ldots + \frac{u_k}{(k-a)(k-b)\ldots(k-j)}$$
>
> ఈ సిద్ధాంతాన్ని గణితానుగమన పద్ధతి ద్వారా నిరూపించవచ్చును. (నిరూపించండి).

SAQ 1 : $\underset{y}{\Delta} x^2$; $\underset{yz}{\Delta^2} x^2$ విలువలను కనుక్కోండి.

ఉదా 1 : $u_{-2} = 5, u_0 = 3, u_3 = 15, u_4 = 47, u_9 = 687$ అయిన విభాజిత భేద పట్టికను నిర్మించుము.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
–2	5			
		$\underset{0}{\Delta} u_{-2} = \frac{3-5}{0-(-2)} = -1$		
0	3		$\underset{0,3}{\Delta^2} u_{-2} = \frac{4-(-1)}{3-(-2)} = 1$	
		$\underset{3}{\Delta} u_0 = \frac{15-3}{3-0} = 4$		$\underset{0,3,4}{\Delta^3} u_{-2} = \frac{7-1}{4-(-2)} = 1$
3	15		$\underset{3,4}{\Delta^2} u_0 = \frac{32-4}{4-0} = 7$	
		$\underset{4}{\Delta} u_3 = \frac{47-15}{4-3} = 32$		$\underset{3,4,9}{\Delta^3} u_0 = \frac{16-7}{9-0} = 1$
4	47		$\underset{4,9}{\Delta^2} u_3 = \frac{128-32}{9-3} = 16$	
		$\underset{9}{\Delta} u_4 = \frac{687-47}{9-4} = 128$		
9	687			

ఉదా 2 : $u_3 = 15, u_{-2} = 5, u_9 = 687, u_0 = 3, u_4 = 47$ అయిన విభాజిత భేద పట్టికను నిర్మించుము.

(ఉదా 1లోని ప్రమేయాన్నే యిక్కడ కూడ తీసుకొన్నామని గమనించవచ్చు)

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
3	15			
		2		
–2	5		1	
		–1		1
0	3		7	
		76		1
9	687		13	
		128		
4	47			

యిచ్చిన దత్తాంశానికి విభాజిత భేద పట్టికను నిర్మిస్తాము.

x	f_x	Δf_x	$\Delta^2 f_x$
0	1		
		2	
1	3		8
		26	
3	55		

$\underset{1}{\Delta} f_0 = 2, \ \underset{1,3}{\Delta^2} f_0 = 8.$

న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రము నుపయోగించిన

$$f_x = f_0 + (x-0) \underset{1}{\Delta} f_0 + (x-0)(x-1) \underset{1,3}{\Delta^2} f_0$$

$$= 1 + x.2 + x(x-1).8 = 8x^2 - 6x + 1$$

ఇదే మనకు కావలసిన బహుపది.

ఉదా 2 : ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు న్యూటన్ సూత్రము ఉపయోగించి బహుపదిని కనుక్కొంటే

$u_{10} = 355, u_0 = -5, u_8 = -21, u_1 = -14, u_4 = -125$

దత్తాంశమునకు విభాజిత పట్టిక క్రింద నీయబడింది.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$
10	355				
		36			
0	–5		19		
		–2		2	
8	–21		1		0
		–1		2	
1	–14		9		
		–37			
4	–125				

(పట్టికలోని రేఖ అంతర్వేశన సూత్రక్రమాన్ని తెలియజేస్తుంది).

న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రమును ఉపయోగించి u_x ను గణించవచ్చు.

$$u_x = 355 + (x-10)\,36 + (x-10)(x)(19) + (x-10)(x)(x-8)(2)$$

$$= 2x^3 - 17x^2 + 6x - 5$$

ఇదే మనకు కావలసిన బహుపది.

ఉదా 3 : $u_0 = 5;\ u_2 = 26;\ u_3 = 58;\ u_4 = 112;\ u_7 = 466,\ u_9 = 922$ దత్తాంశానికి న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రం ఉపయోగించి అంతర్వేశన బహుపదిని అంచనా వేయండి.

న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రం, ఇచ్చిన దత్తాంశానికి

$$u_x = u_0 + x \underset{2}{\Delta} u_0 + x(x-2) \underset{2,3}{\Delta^2} u_0 + x(x-2)(x-3) \underset{2,3,4}{\Delta^3} u_0$$

$$+ x(x-2)(x-3)(x-4) \underset{2,3,4,7}{\Delta^4} u_0$$

$$+ x(x-2)(x-3)(x-4)(x-7) \underset{2,3,4,7,9}{\Delta^5} u_0$$

విభాజిత భేద పట్టికను నిర్మిద్దాం.

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$
0	4				
		11			
2	26		7		
		32		1	
3	58		11		0
		54		1	
4	112		16		0
		118		1	
7	466		22		
		228			
9	922				

సూత్రంలో విభాజిత భేదాలను ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$u_x = 4 + x(11) + x(x-2)(7) + x(x-2)(x-3)\,1$$

$$= 4 + 11x + 7x^2 - 14x + x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$= x^3 + 2x^2 + 3x + 4.$$

2.5 లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రం

ఇంతకు ముందు ఖ2.4లో న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రం గురించి చర్చించాం. ఇప్పుడు విభాజిత భేదాల అవసరం లేనటువంటి లెగ్రాంజ్ సూత్రం రాబడతాం. అయితే లెగ్రాంజ్ సూత్రం, గణించడానికి కొంచెం కష్టంగా ఉండడమే కాకుండా, అంచనా వేయాల్సిన బహుపది యొక్క తరగతి ముందుగానే నిర్ణయింప బడుతుంది. అందువల్ల దీనికి సైద్ధాంతికంగా మాత్రమే ప్రాముఖ్యత ఉంది. u_x ప్రమేయం విలువలు, $a, b, c \ldots, j, k$ అనే విభిన్న విలువల వద్ద (అంతరాలు సమానం కానక్కర్లేదు) కనుక్కొని పట్టికలో వ్రాశామనుకొందాం. u_x ను n వ తరగతి బహుపది అనుకొందాం. అప్పుడు u_x యొక్క $n+1$ వ తరగతి, భేదాలు శూన్యం అవుతాయి. అంటే

$$\Delta^{n+1}_{a,b,c,\ldots k} u_x = 0.$$

సిద్ధాంతం 1ని ఉపయోగించి, ఈ సమీకరణాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{u_x}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)} + \frac{u_a}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(a-x)} + \ldots +$$

$$\frac{u_k}{(k-x)(k-a)\ldots(k-j)} = 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) సమీకరణాన్ని $(x-a)(x-b)\ldots(x-k)$ తో గుణిస్తే,

$$u_x = \frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-k)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)} u_a + \frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-k)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-k)} u_b$$

$$+ \ldots + \frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-j)}{(k-a)(k-b)\ldots(k-j)} u_k \qquad \ldots (2)$$

ఈ సూత్రం (2)ను లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రం అంటారు. ఇది, u_x ను $u_a, u_b, \ldots, u_k$ అనే ప్రమేయపు విలువలలో తెలుపుతుంది.

(2) లో $a, b, c, \ldots, j, k$ లను $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n$ లతోను, వాటి ప్రమేయపు విలువలు

$u_a, u_b, \ldots, u_k$ లను $y_0, y_1, \ldots y_n$ లతోను తొలగిస్తే,

$$y_x = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} y_0 + \ldots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n \qquad \ldots (3)$$

SAQ 4 : సమాన అంతరాలకు లెగ్రాంజ్ సూత్రం రాబట్టండి.

లెగ్రాంజ్ సూత్రం, రెండు చలరాశులమధ్య సంబంధమే కాబట్టి; ఆ రెండు చలరాశులలో ఏదైనా స్వతంత్ర చలరాశిగా తీసుకోవచ్చు. కాబట్టి x ను yలో ప్రమేయంగా వ్రాయవచ్చు. దీనికి (3)లో x, yలను పరస్పరం మార్చి వ్రాస్తే

$$x_y = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\ldots(y_0-y_n)} x_0 +$$

$$\frac{(y-y_0)(y-y_2)\ldots(y-y_n)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_n)} \cdot x_1$$

$$+ \ldots + \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\ldots(y_n-y_{n-1})} \cdot x_n \qquad \ldots (4)$$

ఈ సూత్రం విలోమ అంతర్వేశనంలో ఉపయోగపడుతుంది. విలోమ అంతర్వేశనం అంటే, ప్రమేయపు విలువ ఇస్తే, దానికి సంబంధించిన స్వతంత్ర చలరాశి విలువను అంచనా వేయడం. ఈ విలోమ అంతర్వేశనాన్ని గురించి 5వ ఖండికలో తెలుసుకొంటారు.

ఇపుడు లెగ్రాంజ్ సూత్రాన్ని ఇంకొకరూపంలో

$$y = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_i)\,\Pi_n'(x_i)}\, y_i \qquad \ldots (5)$$

గా వ్రాయవచ్చు.

ఇక్కడ $\Pi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

$$\Pi_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\Pi_n(x)\right)$$

SAQ 5 : (5)లో సూచించిన సూత్రాన్ని పరిచూడండి.

2.5.2 పాక్షిక భిన్నాలకు అనువర్తనం

లెగ్రాంజ్ సూత్రరూపం (2) ఒక అకరణీయ ప్రమేయాన్ని పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టే పద్ధతికి సారూప్యంగా ఉన్నది. ఉదాకి $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ఒక అకరణీయ ప్రమేయం అనుకుందాము. ఇక్కడ $v(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-k)$ అయి, $v(x)$ శూన్య విలువలు విభిన్నాలు, $u(x)$ మాతం 'n' కన్న ఎక్కువ కాకుండా ఉండేలా తీసుకుందాము.

$$F(x) = \frac{u(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)} = \frac{u(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-k)}\frac{1}{x-a}$$

$$+ \ldots + \frac{u(k)}{(k-a)(k-b)\ldots(k-j)}\frac{1}{x-k}$$

ఈ ఫలితాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$F(x) = \frac{u(a)}{v'(a)}\cdot\frac{1}{x-a} + \ldots + \frac{u(k)}{v'(k)}\frac{1}{x-k},$$

ఇది $f(x)$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టిన రూపంలో ఉన్నది.

ఉదాహరణలు

ఉదా 1 : కొన్ని x విలువలు, వాటి సంబంధిత $\log_{10} x$ విలువలు క్రింది విధంగా ఉన్నవి.

(300, 2.4771), (304, 2.4829) (305, 2.4843), (307, 2.4871). $\log_{10} 301$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన

(4)వ సూత్రము నుండి

$$\log_{10} 301 = \frac{(-3)(-4)(-6)}{(-4)(-5)(-7)}(2.4771) + \frac{(1)(-4)(-6)}{(4)(-1)(-3)}(2.4829)$$

$$+ \frac{(1)(-3)(-6)}{(5)(1)(-2)}(2.4843) + \frac{(1)(-3)(-4)}{(7)(3)(2)}(2.4871)$$

$$= 1.2739 + 4.9658 - 4.4717 + 0.7106 = 2.4786.$$

ఉదా 2 : $y_1 = 4, y_3 = 12, y_4 = 19, y_x = 7$ అయిన x విలువ కనుగొనుము.

సాధన

(5) వ సూత్రము నుపయోగిస్తే

$$x = \frac{(-5)(-12)}{(-8)(-15)}(1) + \frac{(3)(-12)}{(8)(-7)}(3) + \frac{(3)(-5)}{(15)(7)}(4)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{27}{14} - \frac{4}{7} = 1.86.$$

ఉదా 3 : ఒక సంభావ్యత వక్రము $y = f(x)$ యొక్క బాహుళకము $x = 9$ కు దగ్గరగా నున్నది. సంభావ్యత సాంద్రత $f(x)$, $x = 8.9, 9.0, 9.3$ లకు వరుసగా 0.30, 0.35, 0.25 బాహుళకము యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుక్కోండి.

x :	8.9	9.0	9.3
$f(x)$:	0.30	0.35	0.25

సాధన

మొదట సంభావ్యత సాంద్రత $f(x)$ యొక్క రూపం కనుక్కొందాము.

లెగ్రాంజ్ సూత్రము నుండి

$$f(x) = \frac{(x-9)(x-9.3)}{(8.9-9)(8.9-9.3)} \times 0.30 + \frac{(x-8.9)(x-9.3)}{(9-8.9)(9-9.3)} \times 0.35$$

$$+ \frac{(x-8.9)(x-9)}{(9.3-8.9)(9.3-9)} \times 0.25 \text{ అని వచ్చును.}$$

లేక $$f(x) = -\frac{25}{12}x^2 + \frac{453.5}{12}x - \frac{2052.3}{12}$$

యిదే సంభావ్యత సాంద్రత ప్రమేయము యొక్క రూపము. x విలువ (8.9, 9.3) అంతరంలో నున్నపుడు $f'(x) = 0$, మరియు $f''(x)$ ఋణాత్మకము అగును కాబట్టి x యొక్క ఆ అంతరంలో $f(x)$ గరిష్ఠమగును.

$$f'(x) = 0 \text{ అయినచో}$$

$$-\frac{5}{12}(10x - 90.7) = 0 \text{ లేక } x = 9.07$$

$$f''(x) = -\frac{25}{6} \text{ ఋణాత్మక సంఖ్య}$$

కాబట్టి సంభావ్యత వక్రము $y = f(x)$ యొక్క బాహుళకము 9.07.

ఉదా 4 : క్రింది దత్తాంశానికి, లెగ్రాంజ్ సూత్రం ద్వారా $f(5), f(6)$ విలువలను అంచనా వేయండి.

x	1	2	3	7
$f(x)$	2	4	8	128

సాధన : లెగ్రాంజ్ సూత్రం నుండి,

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)} = \frac{f(x_0)(x-x_0)^{-1}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} +$$

$$\frac{f(x_1)(x-x_1)^{-1}}{(x_1-x_0)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \frac{f(x_n)(x-x_n)^{-1}}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

దీన్లో x_1, x_2, x_3, x_7 విలువలు ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)} = \frac{f(1)(x-1)^{-1}}{(1-2)(1-3)(1-7)} + \frac{f(2)(x-2)^{-1}}{(2-1)(2-3)(2-7)} + \frac{f(3)(x-3)^{-1}}{(3-1)(3-2)(3-7)} + \frac{f(7)(x-7)^{-1}}{(7-1)(7-2)(7-3)}.$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-7)} = -\frac{1}{12(x-1)} + \frac{4}{5(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} + \frac{16}{15(x-7)}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f(x) &= -\frac{1}{12}(x-2)(x-3)(x-7) + \frac{4}{5}(x-1)(x-3)(x-7) \\
&\quad -(x-1)(x-2)(x-7) + \frac{16}{15}(x-1)(x-2)(x-3) \\
f(5) &= -\frac{1}{12}(5-2)(5-3)(5-7) + \frac{4}{5}(5-1)(5-3)(5-7) \\
&\quad -(5-1)(5-2)(5-7) + \frac{16}{15}(5-1)(5-2)(5-3) \\
&= 1 - \frac{64}{5} + 24 + \frac{128}{5} = \frac{189}{5} = 37.8 \\
f(6) &= -\frac{1}{12}(6-2)(6-3)(6-7) + \frac{4}{5}(6-1)(6-3)(6-7) \\
&\quad -(6-1)(6-2)(6-7) + \frac{16}{15}(6-1)(6-2)(6-3) \\
&= 1 - 12 + 20 + 64 = 73.
\end{aligned}$$

గమనిక : పై సమస్యలో ఇచ్చిన దత్తాంశం నుండి ఆ ప్రమేయం 2^x అవుతుందని అంతర్వేశనం అవసరం లేకుండానే చెప్పవచ్చు. అప్పుడు $f(5) = 32, f(6) = 64$ కావాలి. కాని లెగ్రాంజ్ సూత్రం ద్వారా $f(5) = 37.8$, $f(6) = 73$ అని వచ్చినాయి. ఈ విధమైన దోషానికి కారణము 2^x ప్రమేయాన్ని ఒక బహుపదిగా అంచనావేయడమే. కాబట్టి లెగ్రాంజ్ సూత్రాన్ని వాడేటప్పుడు కొంత జాగ్రత్త తీసుకోవాలి.

ఉదా 5 : $\dfrac{x^2+6x+1}{(x^2-1)(x-4)(x-6)}$ ను లెగ్రాంజ్ సూత్రము నుపయోగించి పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా వ్రాయండి.

సాధన

$$\begin{aligned}
\text{ఇక్కడ } u(x) &= x^2 + 6x + 1, \\
v(x) &= (x+1)(x-1)(x-4)(x-6).
\end{aligned}$$

$$u(-1) = -4,\ u(1) = 8,\ u(4) = 41,\ u(6) = 73.$$

$$v'(-1) = (-2)(-5)(-7) = -70.$$

$$v'(1) = 2(-3)(-5) = 30,$$

$$v'(4) = (5)(3)(-2) = -30,$$

$$v'(6) = (7)(5)(2) = 70.$$

$f(x)$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టిన సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే

$$\frac{x^2+6x+1}{\left(x^2-1\right)(x-4)(x-6)} = \frac{2}{35}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{(x-1)}$$

$$-\frac{41}{30}\cdot\frac{1}{x-4} + \frac{73}{70}\cdot\frac{1}{(x-6)}$$

2.6 సారాంశము

అసమాన అంతరాలకు అంతర్వేశనం చేయాల్సి వచ్చినప్పుడు విభాజిత భేదాలను వాడతారు. న్యూటన్ విభాజిత భేద అంతర్వేశన సూత్రం, లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రములను రాబట్టి వాటిలోని లాభ నష్టాలను గురించి చర్చించాము. లెగ్రాంజ్ సూత్రం విభాజిత భేదాలను వాడము. అయితే ఈ సూత్రంలో గణించడం ఎంతో కష్టంగా ఉంటుంది. దీన్ని జాగ్రత్తతో వాడాల్సి ఉంది. పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా ఒక అకరణీయ ప్రమేయాన్ని విడగొట్టడానికి ఈ సూత్రం ఉపయోగపడుతుందనేది చూశాము.

2.7 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానం వ్రాయండి.

i. a) విభాజిత భేద పరికర్తను నిర్వచించి, న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రాన్ని రాబట్టండి.

b) $P(1) = 1, P(3) = 27, P(4) = 64$ అయ్యేలా $P(x)$ అనే బహుపదిని కనుక్కోండి. దీనినుండి $P(1.5)$ ను రాబట్టండి.

$$\left[P(x) = 8x^2 - 19x + 12,\ P(1.5) = 1.5\right]$$

ii. a) $f(x)$ ఒక n వ తరగతి బహుపది అయితే, $\Delta^n f(x)$ స్థిరాంకమని చూపండి.

b) x^n యొక్క n – వ విభాజిత భేదం 1 అని చూపండి.

iii. a) అసమాన అంతరాలకు లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రం రాబట్టండి.

b) ఈ సూత్రాన్ని ప్రయోగించి $y_1 = y_3 - 0.3\left(y_5 - y_{-3}\right) + 0.2\left(y_{-3} - y_{-5}\right)$ (సుమారుగా) అని చూపండి.

iv. a) పాక్షిక భిన్నాలను విడగొట్టడానికి లెగ్రాంజ్ సూత్రం ఏ విధంగా ఉపయోగపడుతుందీ వివరించండి.

b) లెగ్రాంజ్ సూత్రాన్నుపయోగించి $\frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ను పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా వ్రాయండి.

$$\left[\frac{5}{2(x-1)} - \frac{15}{x-2} - \frac{31}{2(x-3)}\right]$$

II. క్రింది ప్రశ్నలకు క్లుప్తంగా సమాధానం వ్రాయండి.

i.

x :	-1	1	4	6
u_x :	1	-3	21	127;

u_x కు విభాజిత భేద పట్టిక వ్రాయండి. పట్టిక నుండి $\underset{4,6}{\Delta^2} u_1$ విలువ కనుక్కోండి.

u_4, u_1, u_6, u_{-1} ను ఉపయోగించి ఇంకొక పట్టికను తయారుచేయండి. ఈ పట్టికనుండి $\underset{1,6}{\Delta^2} u_4$ విలువ కనుక్కోండి.

ii. పై ప్రశ్నలోని దత్తాంశానికి న్యూటన్ సూత్రం ఉపయోగించగా వచ్చే బహుపది $x^3 - 5x + 3$ అని చూపండి.

iii. $f(x) = 1/x$ కు nవ విభాజిత భేదం $\frac{(-1)^n}{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ అని చూపండి.

iv. $f(2), f(8), f(15)$ విలువలను న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రాన్నుపయోగించి కనుక్కోండి.

x :	4	5	7	10	11	13
$f(x)$:	48	100	294	900	1210	2028

$[f(2) = 4, f(8) = 448, f(15) = 3150]$

v. క్రింది దత్తాంశంనుండి $f(3)$ విలువను న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రము నుపయోగించి కనుక్కోండి.

x :	0	1	2	4	5	6
$f(x)$:	1	14	15	5	6	10

$[f(3) = 10]$

vi. $(-4, 1245), (-1, 33), (0, 5), (2, 9), (5, 1335)$ లను తృప్తిపరిచే బహుపదిని కనుక్కోండి.

$$\left[3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14x + 5\right]$$

vii. $\log_{10} 654 = 2.8156$, $\log_{10} 658 = 2.8182$, $\log_{10} 659 = 2.8188$, $\log_{10} 661 = 2.8202$, అయిన $\log_{10} 656$ విలువ కనుక్కోండి. [2.8169]

viii. స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క 4 స్థానాలు 3, 7, 9, 10 ల వద్ద, ఒక ప్రమేయము యొక్క విలువలు వరుసగా 168, 120, 72, 63 అని గ్రహించి స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క '6' వ స్థానము వద్ద ప్రమేయము యొక్క అతి దగ్గర విలువను కనుక్కోండి. [147]

ix. $y_0 = 2, y_1 = 3, y_5 = 147, y_x = 12$, అయిన '$x$' విలువ కనుక్కోండి. [$x = 2$]

2.8 SAQ లకు సమాధానాలు

SAQ 1 నిర్వచనం నుండి $\underset{y}{\Delta} f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

$$\therefore \underset{y}{\Delta} x^2 = \frac{y^2 - x^2}{y - x} = y + x.$$

$$\underset{yz}{\Delta^2} x^2 = \frac{1}{z - x}\left[\underset{z}{\Delta} y^2 - \underset{y}{\Delta} x^2\right]$$

$$= \frac{1}{z - x}[y + z - (x + y)] = \frac{z - x}{z - x} = 1.$$

SAQ 2 : సాధారణ భేదాలు, విభాజిత భేదాల మధ్య సంబంధానికి, ముందుగా సమాన అంతరాలలో ప్రమేయపు విలువలు తీసుకొందాము. సాధారణ భేద పట్టికను, విభాజిత భేద పట్టికలను నిర్మించి వాటిలోని భేదాలను పోల్చడంద్వారా, ఈ సంబంధాన్ని రాబడదాం.

సాధారణ భేద పట్టిక

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		$y_1 - y_0$			
$x_0 + h$	y_1		$y_2 - 2y_1 + y_0$		
		$y_2 - y_1$		$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$	
$x_0 + 2h$	y_2		$y_3 - 2y_2 + y_1$		$y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$
		$y_3 - y_2$		$y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_2$	
$x_0 + 3h$	y_3		$y_4 - 2y_3 + y_2$		
		$y_4 - y_3$			
$x_0 + 4h$	y_4				

విభాజిత భేద పట్టిక

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		$\frac{y_1 - y_0}{h}$			
$x_0 + h$	y_1		$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h \cdot h}$		
		$\frac{y_2 - y_1}{h}$		$\frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3h \cdot 2h \cdot h}$	
$x_0 + 2h$	y_2		$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h \cdot h}$		$\frac{y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0}{4h \cdot 3h \cdot 2h \cdot h}$
		$\frac{y_3 - y_2}{h}$		$\frac{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - 3y_1}{3h \cdot 2h \cdot h}$	
$x_0 + 3h$	y_3		$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{2h \cdot h}$		
		$\frac{y_4 - y_3}{h}$			
$x_0 + 4h$	y_4				

రెండు పట్టికల నుండి, సంబంధిత విలువలు పోల్చగా,

$$\underset{x_0+h,\, x_0+2h,\, x_0+3h}{\Delta^3} y_{x_0} = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3!\, h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\, h^3}$$

దీనినే సాధారణీకరించగా

$$\underset{x_k+h,\, x_k+2h, \dots, x_k+nh}{\Delta^n} y_{x_k} = \frac{\Delta^n y_k}{n!\, h^n} \text{ ఇక్కడ } k = 0, 1, 2 \dots$$

SAQ 3 : ఖండిక 1లో n వ తరగతి బహుపది యొక్క n వ సాధారణ భేద స్థిరాంకమని చూపాము. SAQ 2 నుండి n వ విభాజిత భేదాలు, n వ తరగతి సాధరణ భేదాలను $n!\, h^n$ తో భాగించగా వచ్చిన విలువలతో సమానమని చూశాం. దీని నుండి n వ తరగతి బహుపది యొక్క n వ తరగతి విభాజిత భేదాలుస్థిరాంకాలని, ఇంకా ఎక్కువ తరగతి భేదాలు శూన్యాలవుతాయని తెలుస్తుంది.

SAQ 4 : సమాన అంతరాలలో x అనుకొంటే, $x_s = x_0 + sh, x = x_0 + hu, s = 1, 2, \dots n$ అని వ్రాయవచ్చు. సమీకరణం 3 నుండి,

$$y_x = \frac{(-1)^n (u-1)(u-2)\dots(u-n)}{n!} y_0 + \frac{(-1)^{n-1} (u-0)(u-2)\dots(u-n)}{n!} y_1 + \dots + \frac{u(u-1)\dots\left(u - \overline{n-1}\right)}{n!} y_n.$$

$\boxed{\text{SAQ 5}}$: $\Pi_n(x) = (x - x_0)\ (x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)$

అయితే $\Pi'_n(x_i) = \frac{d}{dx}\left[\Pi_n(x)\right]_{x=x_i}$

$$= (x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})\ (x - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)$$

కాబట్టి (3) యొక్క హారాన్ని $(x - x_i)\,\Pi'_n(x_i)$ అని వ్రాయవచ్చు.

కాబట్టి 3 ని, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_n(x)}{(x - x_i)\,\Pi'_n\ (x_i)} \cdot y_i$. అని వ్రాయవచ్చు.

ఖండిక – 3 : కేంద్రీయ భేదాలు

విషయ సూచిక

3.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు : (i) కేంద్రీయ భేదపరిక్తను, మిగిలిన భేద పరికర్తలకు గల సంబంధాన్ని రాబట్టగలగాలి, (ii) గాస్, స్టెర్లింగ్, బెస్సెల్, ఎవరెట్ అంతర్వేశన సూత్రాలను రాబట్ట గలగాలి, (iii) ఏఏ సందర్భాలలో ఈ సూత్రాలనుపయోగిస్తామో నిర్ణయించగలగాలి.

3.2 ఉపోద్ఘాతం

న్యూటను పురోగమన, తిరోగమన భేద సూత్రాలు ప్రాథమిక మైనప్పటికి భేదముల పట్టిక ఇచ్చినపుడు ప్రారంభంలోనో, అంతంలోనో ఉన్న విలువలకు అంతర్వేశనం చేయడానికి బాగా ఉపయోగకారిగా ఉంటాయి. మధ్య విలువలకు అంతర్వేశనము చేయడానికి కేంద్రీయ భేద సూత్రములు ఉపయోగపడతాయి. ఈ ఖండికలో కేంద్రీయ భేద సూత్రాలు, ముఖ్యంగా గాస్, స్టెర్లింగ్, బెసెల్, ఎవరెట్, షెప్పర్డ్ నియమాలను అధ్యయనం చేస్తాము.

3.3 కేంద్రీయ భేద పరికర్త

x లో ప్రమేయం u ను u_x తో సూచిస్తాము.

$x = a-2h, a-h, a, a+h, a+2h$ విలువలకు u ను గణించాము అనుకొందాము.

$X = (x-a)/h$ గా వ్రాస్తే $X = -2, -1, 0, 1, 2$ విలువలకు అనుగుణంగా గణించిన u విలువలు $u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2$ అవుతాయి.

u_x ను u_X గా వ్రాస్తే ఈ క్రింది భేద పట్టికను తయారు చేస్తాము.

పట్టిక 3.1

x	X	u_X	Δu_X	$\Delta^2 u_X$	$\Delta^3 u_X$	$\Delta^4 u_X$
$a-2h$	-2	u_{-2}				
			Δu_{-2}			
$a-h$	-1	u_{-1}		$\Delta^2 u_{-2}$		
			Δu_{-1}		$\Delta^3 u_{-2}$	
a	0	u_0		$\Delta^2 u_{-1}$		$\Delta^4 u_{-2}$
			Δu_0		$\Delta^3 u_{-1}$	
$a+h$	1	u_1		$\Delta^2 u_0$		
			Δu_1			
$a+2h$	2	u_2				

కేంద్రీయ భేద పరికర్త δ ను

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$$ గా నిర్వచిస్తాము.

అపుడు $\delta E^{1/2} = E - 1 = \Delta$ అవుతుంది.

దీని వలన పట్టిక 3.1 లోని మొదటి భేదాలను 'δ' సంకేతము నుపయోగించి వ్రాయవచ్చును.

$$\Delta u_{-2} = \delta E^{1/2} u_{-2} = \delta u_{-3/2},$$

$$\Delta u_{-1} = \delta E^{1/2} u_{-1} = \delta u_{-1/2},$$

$$\Delta u_0 = \delta E^{1/2} u_0 = \delta u_{1/2},$$

$$\Delta u_1 = \delta E^{1/2} u_1 = \delta u_{3/2}.$$

($E^n u_x = u_{x+nh}$, $h = 1$ అను ఇక్కడ ఉపయోగించాము.).

3.1 పట్టికలోని రెండవ భేదములను, $\delta^2 E = \Delta^2$ ను ఉపయోగించి గణించవచ్చు.

$$\Delta^2 u_{-2} = \delta^2 E u_{-2} = \delta^2 u_{-1},$$

$$\Delta^2 u_{-1} = \delta^2 E u_{-1} = \delta^2 u_0,$$

$$\Delta^2 u_0 = \delta^2 E u_0 = \delta^2 u_1$$

అదే విధంగా $\delta^3 E^{3/2} = \Delta^3$, $\delta^4 E^2 = \Delta^4$ ను ఉపయోగిస్తే

$\Delta^3 u_{-2} = \delta^3 u_{-1/2}$, $\Delta^3 u_{-1} = \delta^3 u_{1/2}$, $\Delta^4 u_{-2} = \delta^4 u_0$ అవుతాయి.

δ సంకేతమును ఉపయోగించి పట్టిక 3.1 తిరిగి వ్రాస్తాము.

పట్టిక 3.2

x	u_x	δu_x	$\delta^2 u_x$	$\delta^3 u_x$	$\delta^4 u_x$
-2	u_{-2}				
		$\delta u_{-3/2}$			
-1	u_{-1}		$\delta^2 u_{-1}$		
		$\delta u_{-1/2}$		$\delta^3 u_{-1/2}$	
0	u_0		$\delta^2 u_0$		$\delta^4 u_0$
		$\delta u_{1/2}$		$\delta^3 u_{1/2}$	
1	u_1		$\delta^2 u_1$		
		$\delta u_{3/2}$			
2	u_2				

$\delta^r u_a$, u_a కు ఎదురుగా ఉండటాన్ని 3.2 పట్టిక నుండి గమనించవచ్చు. δ సంకేతం వలన ఇది ముఖ్య ఉపయోగము.

$$\mu u_0 = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) u_0 = \frac{1}{2}\left(u_{1/2} + u_{-1/2}\right)$$

అందువలన సగటు పరికర్త 'μ' ను

$$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) \text{ గా నిర్వచిస్తాము.}$$

Δ, E, δ, μ ల మధ్య గల రెండు ముఖ్య సంబంధాలు

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\left(E + E^{-1} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)^2 + 4\right] = 1 + \frac{\delta^2}{4}$$

$$\mu\delta = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E - E^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \Delta - \frac{1}{1 + \Delta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\left(\frac{\Delta + 2}{1 + \Delta}\right) = \frac{\Delta}{2}\left(\frac{1}{1 + \Delta} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E^{-1} + 1\right) = \frac{1}{2}\Delta E^{-1} + \frac{1}{2}\Delta.$$

μ, δ పరికర్తలు వినిమయము చెందుతాయనుకుంటే

$$\mu\delta = \delta\mu$$

$$\mu\,\delta u_0 = \delta\mu u_0 = \delta\frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)u_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta u_{1/2} + \delta u_{-1/2}\right) \text{ అవుతుంది.}$$

ఇంకా $$\mu\delta u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta E^{-1} + \Delta\right)u_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Delta u_{-1} + \Delta u_0\right)$$

$$\therefore\ \mu\delta u_0 = \frac{1}{2}\left(\delta u_{1/2} + \delta u_{-1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Delta u_{-1} + \Delta u_0\right)$$

SAQ 1 : $\delta(x) = h$ (భేద అంతరము) అని చూపండి.

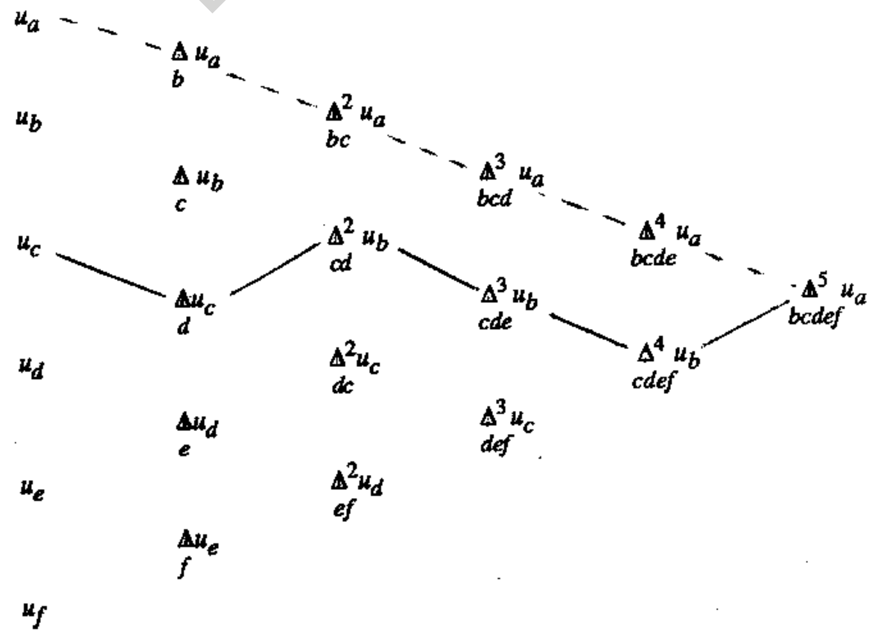
3.3.1 షెప్పర్డ్ నియమము

సమాన దూరాలలో ఉండనవసరములేని x విలువలకు u ను గణించాము అనుకొందాము. అవి $x = a$, b, c, d, e, f విలువలకు వరుసగా $u_a, u_b, u_c, u_d, u_e, u_f$ అనుకొందాము. వాటి విభాజిత భేదములను పట్టిక 3.3లో క్రింద చెప్పిన విధంగా వ్రాస్తాము.

$x = c$ వద్ద u_x ను వ్రాయిలి అంటే u_c ని పట్టిక 3.3లో గరిష్ఠ భేదము $\underset{bcdef}{\Delta^5} u_a$ తో జతపరుస్తాము. ఈ రెండింటిని జతపరుస్తూ గీయబడిన రేఖ వరుసగా మొదటి, రెండవ, మూడవ, నాల్గవ విభాజిత భేదాలుగుండా పోవాలి. u_c నుండి మొదటి ఆసన్న భేదము లేక ఒక భేదము నుండి, తరువాతి ఎగువ భేదము గుండా పోవాలి. ఒక బిందువునుండి మరియొక బిందువునకు రెండుమార్గాలు ఉంటాయి. మనము దేనినైనా ఎన్నుకోవచ్చును.

c, d, b, e, f, a లు పట్టికలోని గీత (solid line) వెంబడి వరుసగా వస్తాయి.

పట్టిక 3.3



షెప్పర్డ్ నియమాన్ని ఇపుడు ప్రవచిస్తాము.

$u_c,\ \underset{d}{\Delta} u_c,\ \underset{cd}{\Delta^2} u_b,\ \underset{cde}{\Delta^3} u_b,\ \underset{cdef}{\Delta^4} u_b,\ \underset{bcdef}{\Delta^5} u_a$ లను

వరుసగా 1, C, CD, CDB, CDBE, CDBEF లచే హెచ్చించి కలుపవలెను.

$$u_x = u_c + C \underset{d}{\Delta} u_c + CD \underset{cd}{\Delta^2} u_b + CDB \underset{cde}{\Delta^3} u_b$$

$$+ CDBE \underset{cdef}{\Delta^4} u_b + CDBEF \underset{bcdef}{\Delta^5} u_a$$

$A = x - a,\ B = x - b,\ C = x - c,\ D = x - d, E = x - e, F = x - f.$

న్యూటను విభాజిత భేదముల సూత్రము (పట్టిక 3.3 చుక్కల గీత).

$$u_x = u_a + A \underset{b}{\Delta} u_a + AB \underset{bc}{\Delta^2} u_a + ABC \underset{bcd}{\Delta^3} u_a$$

$$+ ABCD \underset{bcde}{\Delta^4} u_a + ABCDE \underset{bcdef}{\Delta^5} u_a$$

మాదిరి సమస్యలు

ఉదా. *1* : $u_{-2} = 15, u_{-1} = 12, u_0 = 5, u_1 = 0, u_2 = 3.$ పై విలువలు వచ్చినపుడు భేద పట్టికను తయారు చేయండి.

పట్టికలో $\delta u_{1/2}, \delta^2 u_0, \delta^3 u_{-1/2}$ ల విలువలను కనుక్కోండి.

వీటిని Δ, ∇ లలో వ్రాయండి.

x	u_x	δu_x	$\delta^2 u_x$	$\delta^3 u_x$	$\delta^4 u_x$
–2	15				
		–3			
–1	12		–4		
		–7		6	
0	5		2		0
		–5		6	
1	0		8		
		3			
2	3				

పై భేద పట్టికను పట్టిక 3.2 తో పోలిస్తే,

$\delta u_{1/2} = -5,\ \delta^2 u_0 = 2,\ \delta^3 u_{-1/2} = 6$ అవుతాయి.

తిరోగమన భేద పట్టికను తయారు చేద్దాము.

x	u_x	∇u_x	$\nabla^2 u_x$	$\nabla^3 u_x$	$\nabla^4 u_x$
-2	u_{-2}				
		∇u_{-1}			
-1	u_{-1}		$\nabla^2 u_0$		
		∇u_0		$\nabla^3 u_1$	
0	u_0		$\nabla^2 u_1$		$\nabla^4 u_2$
		∇u_1		$\nabla^3 u_2$	
1	u_1		$\nabla^2 u_2$		
		∇u_2			
2	u_2				

పట్టికలు 3.1, 3.2 పై తిరోగమన భేద పట్టికతో పోలిస్తే

$$\Delta u_0 = \nabla u_1 = \delta u_{1/2},$$

$$\Delta^2 u_{-1} = \nabla^2 u_1 = \delta^2 u_0,$$

$$\Delta^3 u_{-2} = \nabla^3 u_1 = \delta^3 u_{-1/2}$$ అవుతాయి.

SAQ 2 : పై సంబంధాలను పరికర్తల నిర్వచనం నుండి నిరూపించండి.

ఉదా. *2* : పరికర్తలు θ, ϕ లు $\theta\phi = \phi\theta$ అయితే వినిమయాలు అంటాము. పరికర్తలు $\mu, \delta, E, \Delta, \nabla$ లు ఒకదానితో మరి యొకటి వినిమయాలు అని చూపండి.

$$\mu \delta u_x = \mu \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) u_x = \mu \left(u_{x+h/2} - u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)\left(u_{x+h/2} - u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h} + u_x - u_x - u_{x-h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h} - u_{x-h}\right)$$

$$\delta\mu u_x = \delta \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) u_x$$

$$= \frac{1}{2}\delta\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h} + u_x - u_x - u_{x-h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h} - u_{x-h}\right)$$

$\therefore \mu\delta u_x = \delta\mu u_x$ i.e., $\mu\delta = \delta\mu$.

(పరికర్త, స్థిరాంకము వినిమయాలు అని ఇక్కడ వాడాము అని గమనించండి)

$$\mu E u_x = \mu u_{x+h} = \frac{1}{2}\left(u_{x+3h/2} + u_{x+h/2}\right)$$

$$E\mu\, u_x = \frac{1}{2} E\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+3h/2} + u_{x+h/2}\right)$$

$\therefore \mu E u_x = E\mu u_x$ i.e., $\mu E = E\mu$.

$$\mu\,\Delta\, u_x = \mu\left(u_{x+h} - u_x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+3h/2} - u_{x+h/2} + u_{x+h/2} - u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+3h/2} - u_{x-h/2}\right)$$

$$\Delta\,\mu\, u_x = \frac{1}{2}\Delta\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+3h/2} - u_{x-h/2}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{x+h/2} - u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+3h/2} - u_{x-h/2}\right)$$

$\therefore \mu\,\Delta u_x = \Delta\mu u_x$ i.e., $\mu\Delta = \Delta\mu$.

$$\mu\nabla\, u_x = \mu\left(u_x - u_{x-h}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2} - u_{x-h/2} - u_{x-3h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h/2} - u_{x-3h/2}\right)$$

$$\nabla\mu\, u_x = \frac{1}{2}\nabla\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h/2} - u_{x-h/2} + u_{x-h/2} - u_{x-3h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{x+h/2} - u_{x-3h/2}\right)$$

$\therefore \mu\,\nabla u_x = \nabla\mu u_x$ అనగా $\mu\nabla = \nabla\mu$.

$$\delta E u_x = \delta u_{x+h} = u_{x+3h/2} - u_{x+h/2}$$

$$E\delta u_x = E\left(u_{x+h/2} - u_{x-h/2}\right) = u_{x+3h/2} - u_{x+h/2}$$

$\therefore\ \delta E u_x = E\delta u_x$ అనగా $\delta E = E\delta$.

$$\Delta\, Du_x = Du_x' = u'_{x+h} - u_x'$$

$$\therefore D\Delta u_x = \Delta\, Du_x$$ అనగా $D\Delta = \Delta D$.

$$D\mu u_x = D \cdot \frac{1}{2}\left(u_{x+h/2} + u_{x-h/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(u'_{x+h/2} + u'_{x-h/2}\right)$$

$$\mu Du_x = \mu u'_x = \frac{1}{2}\left(u'_{x+h/2} + u'_{x-h/2}\right)$$

$$\therefore D\mu u_x = \mu Du_x$$ అనగా $D\mu = \mu D$.

$$D\nabla u_x = D\left(u_x - u_{x-h}\right) = u'_x - u'_{x-h}$$

$$\nabla\, Du_x = \nabla\, u'_x = u'_x - u'_{x-h}$$

$$\therefore D\nabla u_x = \nabla\, Du_x$$ అనగా $D\nabla = \nabla D$.

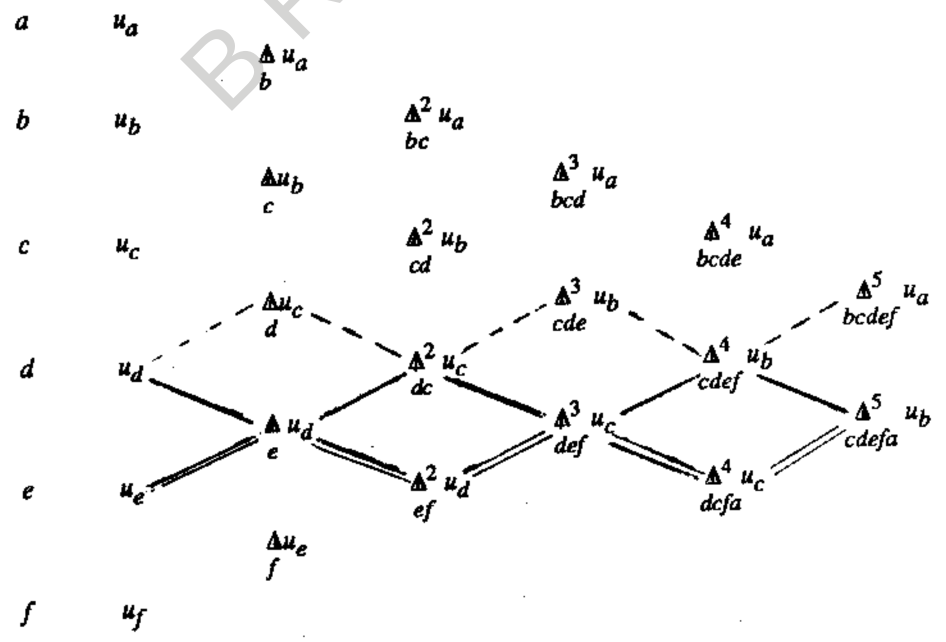
అందువలన $\delta, E, \Delta, \mu, \nabla$ లు D తో వినిమయాలు.

3.4 గాస్ సూత్రము

3.4.1 గాస్ పురోగమన సూత్రము

విభిన్న విలువలు $x = a, b, c, d, e, f$ లకు u_x విలువలు ఇచ్చారనుకుందాము. x విలువలు సమ దూరాలలో ఉండవలసిన అవసరం లేదు. అపుడు విభాజిత భేద పట్టిక క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

పట్టిక 3.4



a, b, c, d, e, f లు 'h' అంతరము కలిగి సమదూరాలలో ఉన్న సందర్భంలో పై పట్టికలో చూపబడిన ముక్కల గీత solid గీతలను అనుసరించి

$$\underset{d}{\boldsymbol{\Delta}} u_c = \boldsymbol{\Delta} u_c = \frac{1}{h\ 1!} \Delta u_c,$$

$$\underset{dc}{\boldsymbol{\Delta}^2} u_c = \boldsymbol{\Delta}^2 u_c = \frac{1}{h^2\ 2!} \Delta^2 u_c,$$

$$\underset{cde}{\boldsymbol{\Delta}^3} u_b = \boldsymbol{\Delta}^3 u_b = \frac{1}{h^3\ 3!} \Delta^3 u_b,$$

$$\underset{cdef}{\boldsymbol{\Delta}^4} u_b = \boldsymbol{\Delta}^4 u_b = \frac{1}{h^4\ 4!} \Delta^4 u_b,$$

$$\underset{bcdef}{\boldsymbol{\Delta}^5} u_a = \boldsymbol{\Delta}^5 u_a = \frac{1}{h^5\ 5!} \Delta^5 u_a,$$

$$\underset{e}{\boldsymbol{\Delta}} u_d = \boldsymbol{\Delta} u_d = \frac{1}{h\ 1!} \Delta u_d,$$

$$\underset{def}{\boldsymbol{\Delta}^3} u_c = \boldsymbol{\Delta}^3 u_c = \frac{1}{h^3\ 3!} \Delta^3 u_c,$$

$$\underset{cdefa}{\boldsymbol{\Delta}^5} u_b = \boldsymbol{\Delta}^5 u_b = \frac{1}{h^5\ 5!} \Delta^5 u_b,$$

సాధారణంగా $\boldsymbol{\Delta}^r u_x = \dfrac{1}{h^r\ r!} \Delta^r u_x.$

$a = -3, b = -2, c = -1, d = 0, e = 1, f = 2$ తీసుకుంటే

$A = x + 3, B = x + 2, C = x + 1, D = x, E = x - 1, F = x - 2.$

solid రేఖ వెంబడి షెప్పర్డ్ నియమాన్ని పాటిస్తే, ($h = 1$ కాబట్టి)

$$u_x = u_0 + \frac{x}{1!} \Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 u_{-1} + \frac{x(x-1)(x+1)}{3!} \Delta^3 u_{-1}$$

$$+ \frac{x(x-1)(x+1)(x-2)}{4!} \Delta^4 u_{-2}$$

$$+ \frac{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{5!} \Delta^5 u_{-2} + \dots$$

లేక $$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 u_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3 u_{-1} + \binom{x+1}{4} \Delta^4 u_{-2}$$

$$+ \binom{x+2}{5} \Delta^5 u_{-2} + \dots$$

దీనినే గౌస్ పురోగమన సూత్రము అంటాము.

రెండవ పద్ధతి :

పట్టిక 3.5

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$	$\Delta^5 u_x$
-2	u_{-2}					
		Δu_{-2}				
-1	u_{-1}		$\Delta^2 u_{-2}$			
		Δu_{-1}		$\Delta^3 u_{-2}$		
0	u_0		$\Delta^2 u_{-1}$		$\Delta^4 u_{-2}$	
		Δu_0		$\Delta^3 u_{-1}$		$\Delta^5 u_{-2}$
1	u_1		$\Delta^2 u_0$		$\Delta^4 u_{-1}$	
		Δu_1		$\Delta^3 u_0$		$\Delta^5 u_{-1}$
2	u_2		$\Delta^2 u_1$		$\Delta^4 u_0$	
		Δu_2		$\Delta^3 u_1$		
3	u_3		$\Delta^2 u_2$			
		Δu_3				
4	u_4					

$$\Delta^3 u_{-1} = \Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_{-1},$$

$$\Delta^4 u_{-1} = \Delta^3 u_0 - \Delta^3 u_{-1},$$

$$\Delta^5 u_{-1} = \Delta^4 u_0 - \Delta^4 u_{-1},$$

$$\Delta^5 u_{-2} = \Delta^4 u_{-1} - \Delta^4 u_{-2}.$$

కాబట్టి పై విలువల నుండి

$$\Delta^2 u_0 = \Delta^2 u_{-1} + \Delta^3 u_{-1},$$

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^3 u_{-1} + \Delta^4 u_{-1}$$

$$\Delta^4 u_0 = \Delta^4 u_{-1} + \Delta^5 u_{-1}$$

$$\Delta^4 u_{-1} = \Delta^4 u_{-2} + \Delta^5 u_{-2}$$ అని వస్తాయి.

పై విలువలను న్యూటన్ పురోగమన సూత్రము

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 u_0 + \binom{x}{4} \Delta^4 u_0 + \ldots$$ లో

ప్రతిక్షేపించగా

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_0 + \binom{x}{2} \left(\Delta^2 u_{-1} + \Delta^3 u_{-1}\right)$$

$$+ \binom{x}{3} \left(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^4 u_{-2} + \Delta^5 u_{-2}\right)$$

$$+ \binom{x}{4} \left(\Delta^4 u_{-2} + \Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-1}\right) + \ldots \text{ అవుతుంది.}$$

$\binom{x}{r} + \binom{x}{r-1} = \binom{x+1}{r}$ ఫలితాన్ని పై సమీకరణంలో ఉపయోగిస్తే గౌస్ పురోగమన సూత్రం క్రింది విధంగా వస్తుంది.

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 u_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3 u_{-1} + \binom{x+1}{4} \Delta^4 u_{-2} + \ldots$$

3.4.2 గౌస్ తిరోగమన సూత్రం

చుక్కల గీత ననుసరించి షెప్పర్డ్ నియమాన్ని పాటించి గౌస్ తిరోగమన సూత్రాన్ని క్రింది విధంగా ఉత్పాదించవచ్చు.

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_{-1} + \binom{x+1}{2} \Delta^2 u_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3 u_{-2}$$

$$+ \binom{x+2}{4} \Delta^4 u_{-2} + \binom{x+2}{5} \Delta^5 u_{-3} + \ldots$$

రెండవ పద్ధతి

$$\Delta u_0 - \Delta u_{-1} = \Delta^2 u_{-1}$$

$$\Delta^3 u_{-1} - \Delta^3 u_{-2} = \Delta^4 u_{-2}$$

$$\Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_{-1} = \Delta^3 u_{-1},$$

$$\Delta^3 u_0 - \Delta^3 u_{-1} = \Delta^4 u_{-1} \ldots \text{ అని తెలియును.}$$

పై విలువల నుంచి

$$\Delta u_0 = \Delta u_{-1} + \Delta^2 u_{-1}$$

$$\Delta^3 u_{-1} = \Delta^3 u_{-2} + \Delta^4 u_{-2}$$

$$\Delta^2 u_0 = \Delta^2 u_{-1} + \Delta^3 u_{-1},$$

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^3 u_{-1} + \Delta^4 u_{-1} \ldots \text{ అని వస్తాయి.}$$

పై విలువలను న్యూటన్ పురోగమన సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించగా,

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \left(\Delta u_{-1} + \Delta^2 u_{-1}\right) + \binom{x}{2} \left(\Delta^2 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2} + \Delta^4 u_{-2}\right)$$

$$+ \binom{x}{3} \left(\Delta^3 u_{-2} + \Delta^4 u_{-2} + \Delta^4 u_{-1}\right) + \ldots \text{ అవుతుది.}$$

పై సమీకరణంలో

$\binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} = \binom{x+1}{n}$ సంబంధాన్ని ఉపయోగిస్తే

గాస్ తిరోగమన సూత్రం క్రింది రూపంలో వస్తుంది.

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \Delta u_{-1} + \binom{x+1}{2} \Delta^2 u_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3 u_{-2} + \ldots$$

3.4.3 గాస్ మూడొవ సూత్రం

రెండు గీతలు ఉన్న దారిలో సూత్రం వ్రాయగా

$$u_x = u_1 + (x-1)\Delta u_0 + x(x-1)\frac{\Delta^2 u_0}{2} + x(x-1)(x-2)\frac{\Delta^3 u_{-1}}{3!}$$

$$+ x\left(x^2-1\right)(x-2)\frac{\Delta^4 u_{-1}}{4!} + x\left(x^2-1\right)(x-2)(x-3)\frac{\Delta^5 u_{-2}}{5!} + \ldots$$

$$= u_1 + \binom{x-1}{1}\Delta u_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 u_{-1}$$

$$+ \binom{x+1}{4}\Delta^4 u_{-1} + \binom{x+1}{5}\Delta^5 u_{-2} + \ldots$$

ఈ సూత్రాన్ని గాస్ మూడవ సూత్రము అంటాము.

గాస్ తిరోగమన సూత్రంలో పాదికలను ను ఒక ప్రమాణం ముందుకు జరిపి, x కు బదులు $x-1$ వ్రాసి గాస్ మూడవ సూత్రాన్ని రాబట్టవచ్చును.

3.5 స్టర్లింగ్ సూత్రము

ఇపుడు గాస్ పురోగమన, తిరోగమన సూత్రాల సరాసరి తీసుకొని స్టర్లింగ్ సూత్రాన్ని రాబట్టుతాము.

$$u_x = u_0 + \frac{x\left(\Delta u_{-1} + \Delta u_0\right)}{2} + \frac{x^2}{2}\Delta^2 u_{-1}$$

$$+ \frac{x\left(x^2-1\right)}{3!}\frac{\left(\Delta^3 u_{-2} + \Delta^3 u_{-1}\right)}{2} + \frac{x^2\left(x^2-1\right)}{4!}\Delta^4 u_{-2}$$

$$+ \frac{x\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)}{5!}\frac{\left(\Delta^5 u_{-3} + \Delta^5 u_{-2}\right)}{2} + \ldots$$

$$\mu\delta u_0 = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)\Delta E^{-1/2} u_0$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\left(E^{-1} + 1\right)u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta u_{-1} + \Delta u_0\right)$$

$$\delta^2 u_0 = \Delta^2 E^{-1} u_0 = \Delta^2 u_{-1},$$

$$\mu\delta^3 u_0 = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)\Delta^3 E^{-3/2} u_0 = \frac{1}{2}\Delta^3\left(E^{-1} + E^{-2}\right) u_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Delta^3 u_{-2} + \Delta^3 u_{-1}\right),$$

$$\delta^4 u_0 = \Delta^4 E^{-2} u_0 = \Delta^4 u_{-2},$$

$$\mu\delta^5 u_0 = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)\Delta^5 E^{-5/2} u_0 = \frac{1}{2}\Delta^5\left(E^{-3} + E^{-2}\right) u_0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Delta^5 u_{-3} + \Delta^5 u_{-2}\right).$$

కేంద్రీయ భేదము 'δ' సంకేతంలో స్టర్లింగ్ సూత్రాన్ని క్రింది రూపంలో వ్రాస్తాము.

$$u_x = u_0 + x\mu\,\delta u_0 + \frac{x^2}{2!}\,\delta^2 u_0 + \frac{x\left(x^2 - 1\right)}{3!}\,\mu\delta^3 u_0$$

$$+ \frac{x^2\left(x^2 - 1\right)}{4!}\delta^4 u_0 + \frac{x\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 2^2\right)}{5!}\,\mu\delta^5 u_0 + \ldots$$

రెండో పద్ధతి :

$$\Delta u_0 = \delta\, E^{1/2} u_0 = \delta u_{1/2},\ \Delta^2 u_0 = \delta^2 u_1,$$

$$\Delta^3 u_0 = \delta^2 u_{3/2},\ \Delta^4 u_0 = \delta^4 u_2, \ldots$$

న్యూటన్ పురోగమన సూత్రాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$u_x = u_0 + x\,\delta u_{1/2} + \frac{x(x-1)}{2!}\delta^2 u_1 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\delta^3 u_{3/2}$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\,\delta^4 u_2 + \ldots$$

ఇపుడు $\delta u_{1/2} = \delta\, E^{1/2} u_0 = \delta\left(\mu + \frac{\delta}{2}\right)u_0 = \mu\,\delta u_0 + \frac{1}{2}\,\delta^2 u_0$

$$\delta^2 u_1 = \delta^2 E u_0 = \delta^2\left(\mu + \frac{\delta}{2}\right)u_0 = \delta^2\left(\mu^2 + \frac{\delta^2}{4} + \mu\delta\right)u_0$$

$$= \delta^2\left(1 + \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}\mu\delta\right)u_0$$

$$= \delta^2\left(1 + \mu\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)u_0$$

$$= \delta^2 u_0 + \mu\delta^3 u_0 + \frac{1}{2}\,\delta^4 u_0\,.$$

$$\delta^3 u_{3/2} = \mu\delta^3 u_0 + \frac{3}{2}\,\delta^4 u_0 + \mu\delta^5 u_0 + \frac{1}{2}\mu\delta^6 u_0,$$

$$\delta^4 u_2 = \delta^4 u_0 + 2\,\mu\delta^5 u_0 + 2\,\delta^6 u_0 + \mu\,\delta^7 u_0 + \frac{1}{2}\,\delta^8 u_0 \;\ldots$$

ఈ విలువలను పై సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించి, సూక్ష్మీకరించగా

$$u_x = u_0 + x\,\mu\delta u_0 + \frac{x^2}{2!}\,\delta^2 u_0 + \frac{x\left(x^2-1\right)}{3!}\,\mu\delta^3 u_0 + \frac{x^2\left(x^2-1\right)}{4!}\,\delta^4 u_0 + \ldots$$

3.6 బెస్సెల్ సూత్రం

బెస్సెల్ సూత్రమును ఉత్పాదించుటకు గౌస్ మూడవ సూత్రమును తీసుకుందాము.

$$u_x = u_1 + \binom{x-1}{1}\Delta u_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 u_{-1}$$

$$+ \binom{x+1}{4}\Delta^4 u_{-1} + \binom{x+1}{5}\Delta^5 u_{-2} + \ldots$$

గౌస్ పురోగన సూత్రం క్రింది విధంగా ఉంటుందని తెలుసు.

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1}\Delta u_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 u_{-1} + \binom{x+1}{3}\Delta^3 u_{-1}$$

$$+ \binom{x+1}{4}\Delta^4 u_{-2} + \binom{x+2}{5}\Delta^5 u_{-2} + \ldots$$

పై రెండు సూత్రాల సరాసరిని తీసుకొంటే

$$u_x = \frac{u_0 + u_1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{2}\,\frac{\left(\Delta^2 u_{-1} + \Delta^2 u_0\right)}{2}$$

$$+ \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!}\Delta^3 u_{-1} + \frac{x\left(x^2-1\right)(x-2)}{4!}$$

$$\frac{\left(\Delta^4 u_{-2} + \Delta^4 u_{-1}\right)}{2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-1\right)(x-2)}{5!}\Delta^5 u_{-2} + \ldots$$

ఇది బెస్సెల్ సూత్రం యొక్క ఒక రూపము.

$$\frac{u_0 + u_1}{2} - \frac{1}{2}\Delta u_0 = \frac{u_0 + u_1}{2} - \frac{1}{2}\left(u_1 - u_0\right) = u_0,$$

కాబట్టి, పై సూత్రాన్ని క్రింది రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

$$u_x = u_0 + x\,\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{2}\cdot\left(\frac{\Delta^2 u_{-1} + \Delta^2 u_0}{2}\right)$$

$$+ \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{3!}\Delta^3 u_{-1}$$

$$+ \frac{x\left(x^2-1\right)(x-2)}{4!}\,\frac{\left(\Delta^4 u_{-2} + \Delta^3 u_{-1}\right)}{2}$$

$$+ \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-1\right)(x-2)}{5!}\Delta^5 u_{-2} + \dots$$

$x = \frac{1}{2}$ వ్రాస్తే

$$u_{1/2} = \frac{u_0 + u_1}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{\left(\Delta^2 u_{-1} + \Delta^2 u_0\right)}{2} + \frac{3}{128}\,\frac{\left(\Delta^4 u_{-2} + \Delta^4 u_{-1}\right)}{2} \dots$$

బెస్సల్ సూత్రము యొక్క ఈ ప్రత్యేక సందర్భమును మధ్య విలువలకు అంతర్వేశన సూత్రము అంటాము. ఇచ్చిన రెండు విలువల యొక్క మధ్య విలువ వద్ద ప్రమేయ విలువను కనుక్కోవడానికి ఈ సూత్రమును ఉపయోగిస్తాము.

$x = z + \frac{1}{2}$ ప్రతిక్షేపిస్తే, బెస్సల్ సూత్రము ఈ క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చు.

$$u_{z+1/2} = \frac{u_0 + u_1}{2} + z\,\Delta u_0 + \frac{z^2 - 1/4}{2!}\,\frac{\left(\Delta^2 u_{-1} + \Delta^2 u_0\right)}{2}$$

$$+ \frac{z\left(z^2 - 1/4\right)}{3!}\Delta^3 u_{-1}$$

$$+ \frac{\left(z^2 - 1/4\right)\left(z^2 - 9/4\right)}{4!}\,\frac{\left(\Delta^4 u_{-2} + \Delta^4 u_{-1}\right)}{2}$$

$$+ \frac{z\left(z^2 - 1/4\right)\left(z^2 - 9/4\right)}{5!}\Delta^5 u_{-2} + \dots$$

$$\mu u_{1/2} = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)u_{1/2} = \frac{1}{2}\left(u_0 + u_1\right)$$

$$\Delta u_0 = \delta E^{1/2} u_0 = \delta u_{1/2};$$

$$\frac{\left(\Delta^2 u_{-1} + \Delta^2 u_0\right)}{2} = \frac{\left(\delta^2 u_0 + \delta^2 u_1\right)}{2} = \delta^2 \mu u_{1/2} = \mu\delta^2 u_{1/2};$$

$$\Delta^3 u_{-1} = \delta^3 E^{3/2} u_{-1} = \delta^3 u_{1/2};$$

$$\frac{\left(\Delta^4 u_{-2} + \Delta^4 u_{-1}\right)}{2} = \frac{\left(\delta^4 u_0 + \delta^4 u_1\right)}{2} = \delta^4 \mu u_{1/2} = \mu\delta^4 u_{1/2} ;$$

$$\Delta^5 u_{-2} = \delta^5 E^{5/2} u_{-2} = \delta^5 u_{1/2} ;$$

ఈ విలువలను పై సూత్రంలో ఉపయోగిస్తే క్రింది రూపంలోకి వస్తుంది.

$$u_{z+1/2} = \mu u_{1/2} + z\,\delta u_{1/2} + \frac{\left(z^2 - 1/4\right)}{2!}\mu\delta^2 u_{1/2}$$

$$+ \frac{z\left(z^2 - 1/4\right)}{3!}\delta^3 u_{1/2} + \frac{\left(z^2 - 1/4\right)\left(z^2 - 9/4\right)}{4!}\mu\delta^4 u_{1/2}$$

$$+ \frac{z\left(z^2 - 1/4\right)\left(z^2 - 9/4\right)}{5!}\delta^5 u_{1/2} + \ldots$$

$z = 0$ వ్రాస్తే కేంద్రీయ భేద సంకేతంలో ముఖ్యమైన సూత్రం వస్తుంది. ఈ సూత్రం అంతరము యొక్క మధ్య విలువల వద్ద ప్రమేయపు విలువను కనుక్కోవడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

$$u_{1/2} = \mu u_{1/2} - \frac{1}{8}\mu\delta^2 u_{1/2} + \frac{3}{128} + \mu\delta^4 u_{1/2} - \ldots$$

రెండవ పద్ధతి

బెస్సల్ సూత్రాన్ని మరియొక పద్ధతి ద్వారా కూడా రాబట్టవచ్చును.

$$\delta^2 u_1 = \delta^2 E^{1/2} u_{1/2} = \delta^2\left(\mu + \frac{\delta}{2}\right)u_{1/2}$$

$$= \mu\delta^2 u_{1/2} + \frac{1}{2}\delta^3 u_{1/2},$$

$$\delta^3 u_{3/2} = \delta^3 E\, u_{1/2} = \delta^3\left(\mu + \frac{\delta}{2}\right)^2 u_{1/2}$$

$$= \delta^3\left(\mu^2 + \mu\delta + \frac{\delta^2}{4}\right)u_{1/2}$$

$$= \delta^3\left(1 + \frac{\delta^2}{4} + \mu\delta + \frac{\delta^2}{4}\right)u_{1/2}$$

$$= \delta^3\left(1 + \mu\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)u_{1/2}$$

$$= \delta^3 u_{1/2} + \mu\,\delta^4 u_{1/2} + \frac{1}{2}\delta^5 u_{1/2},$$

$$\delta^4 u_2 = \delta^4 E^{3/2} u_{1/2} = \delta^4\left(\mu + \frac{\delta}{2}\right)^3 u_{1/2}$$

$$= \delta^4\left(\mu^3 + 3\mu^2\frac{\delta}{2} + 3\mu\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^3}{8}\right)u_{1/2}$$

$$= \delta^4\left(\mu + \frac{\mu\delta^2}{4} + \frac{3\delta}{2} + \frac{3\delta^3}{8} + \frac{3}{4}\ \mu\delta^2 + \frac{\delta^3}{8}\right)u_{1/2}$$

$$= \delta^4\left(\mu + \mu\delta^2 + \frac{3\delta}{2} + \frac{\delta^3}{2}\right)u_{1/2}$$

$$= \mu\delta^4 u_{1/2} + \mu\delta^6 u_{1/2} + \frac{3}{2}\ \delta^5 u_{1/2} + \frac{1}{2}\ \delta^7 u_{1/2}.$$

న్యూటన్ పురోగమన సూత్రాన్ని δ సంకేతంతో వ్రాస్తే

$$u_x = u_0 + x\delta u_{1/2} + \frac{x\,(x-1)}{2!}\ \delta^2 u_1 + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3!}\ \delta^3 u_{3/2}$$

$$+ \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}{4!}\ \delta^4 u_2 + \ldots$$

ఈ సూత్రంలో పై విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$u_x = u_0 + x\delta u_{1/2} + \frac{x\,(x-1)}{2!}\ \mu\delta^2 u_{1/2} + \frac{x\,(x-1)\,(x-1/2)}{3!}\ \delta^3 u_{1/2}$$

$$+ \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,(x+1)}{4!}\ \mu\delta^4 u_{1/2} + \ldots$$ అవుతుంది.

$$\mu u_{1/2} = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)u_{1/2} = \frac{1}{2}\left(u_0 + u_1\right)$$

$$= u_0 + \frac{1}{2}\left(u_1 - u_0\right) = u_0 + \frac{1}{2}\delta u_{1/2}$$

అని గుర్తించి $x = z + \frac{1}{2}$ ను పై సూత్రంలో వ్రాస్తే,

$$u_{z+1/2} = \mu\, u_{1/2} + z\,\delta\, u_{1/2} + \frac{\left(z^2 - 1/4\right)}{2!}\mu\delta^2 u_{1/2}$$

$$+ \frac{z\left(z^2 - 1/4\right)}{3!}\ \delta^3 u_{1/2} + \frac{\left(z^2 - 1/4\right)\ \left(z^2 - 9/4\right)}{4!}\ \mu\delta^4 u_{1/2} + \ldots$$

అవుతుంది.

ఇదే బెస్సెల్ సూత్రము.

3.7 ఎవరెట్ సూత్రము

ఎవరెట్ సూత్రాన్ని ఉత్పాదించుటకు ముందు, క్రింది ఉపసిద్ధాంతాన్ని నిరూపిస్తాము.

$$\binom{z}{j}\delta^j u_a + \binom{z+1}{j+1}\delta^{(j+1)} u_{(a+1/2)} = \binom{z+1}{j+1}\delta^j u_{a+1} - \binom{z}{j+1}\delta^j u_a$$

ఉపపత్తి :

$$\binom{z}{j} + \binom{z}{j-1} = \binom{z+1}{j}$$

లేదా $\binom{z}{j-1} = \binom{z+1}{j} - \binom{z}{j}$ అని తెలుసు.

యిపుడు j బదులు $(j+1)$ వ్రాస్తే,

$$\binom{z}{j} = \binom{z+1}{j+1} - \binom{z}{j+1} \text{ అవుతుంది.}$$

దీనిని ఉపసిద్ధాంతము ఎడమవైపు ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\binom{z}{j}\delta^j u_a + \binom{z+1}{j+1}\delta^{(j+1)} u_{(a+1/2)}$$

$$= \left(\binom{z+1}{j+1} - \binom{z}{j+1}\right)\delta^j u_a + \binom{z+1}{j+1}\delta^{(j+1)} u_{(a+1/2)}$$

$$= \binom{z+1}{j+1}\delta^j\left(1 + \delta\, E^{1/2}\right)u_a - \binom{z}{j+1}\delta^j u_a$$

$$= \binom{z+1}{j+1}\delta^j u_{(a+1)} - \binom{z}{j+1}\delta^j u_a$$

$$\left(\because 1 + \delta\, E^{1/2} = 1 + \Delta = E\right)$$

గౌస్ పురోగమన సూత్రం 'δ' సంకేతంలో,

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1}\delta u_{1/2} + \binom{x}{2}\delta^2 u_0 + \binom{x+1}{3}\delta^3 u_{1/2} + \binom{x+1}{4}\delta^4 u_0 + \binom{x+2}{5}\delta^5 u_{1/2} + \ldots$$

పై ఉపసిద్ధాంతం బట్టి

$$\binom{x-1}{0}u_0 + \binom{x}{1}\delta u_{1/2} = \binom{x}{1}u_1 - \binom{x-1}{1}u_0$$

$$\binom{x-1}{0} = 1 \text{ కాబట్టి}$$

$$u_0 + \binom{x}{1}\delta u_{1/2} = \binom{x}{1}u_1 - \binom{x-1}{1}u_0.$$

యిదే విధంగా,

$$\binom{x}{2}\delta^2 u_0 + \binom{x+1}{3}\delta^3 u_{1/2} = \binom{x+1}{3}\delta^2 u_1 - \binom{x}{3}\delta^2 u_0,$$

$$\binom{x+1}{4}\delta^4 u_0 + \binom{x+2}{5}\delta^5 u_{1/2} = \binom{x+2}{5}\delta^4 u_1 - \binom{x+1}{5}\delta^4 u_0.$$

పై గౌస్ సూత్రంలో ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$u_x = \binom{x}{1} u_1 + \binom{x+1}{3} \delta^2 u_1 + \binom{x+2}{5} \delta^4 u_1 + \ldots$$

$$- \binom{x-1}{1} u_0 - \binom{x}{3} \delta^2 u_0 - \binom{x+1}{5} \delta^4 u_0 - \ldots$$

దీనినే ఎవరెట్ మొదటి సూత్రం అంటాము.

పై సూత్రంలో $x + y = 1$ అని వ్రాస్తే, పై సూత్రం సులభమైన, సొష్టవ రూపంలోకి వస్తుంది.

$$u_x = x \left[u_1 + \frac{(x^2-1)}{3!} \delta^2 u_1 + \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{5!} \delta^4 u_1 + \ldots\right]$$

$$+ y \left[u_0 + \frac{(y^2-1)}{3!} \delta^2 u_0 + \frac{(y^2-1)(y^2-4)}{5!} \delta^4 u_0 + \ldots\right]$$

దీనినే లాప్లాస్ - ఎవరెట్ సూత్రం అంటాము.

గౌస్ తిరోగమన సూత్రం 'δ' సంకేతంలో

$$u_x = u_0 + \binom{x}{1} \delta u_{-1/2} + \binom{x+1}{2} \delta^2 u_0 + \binom{x+1}{3} \delta^3 u_{-1/2}$$

$$+ \binom{x+2}{4} \delta^4 u_0 + \ldots$$

ఉపసిద్ధాంతం ఇట్టి

$$\binom{x}{1} \delta u_{-1/2} + \binom{x+1}{2} \delta^2 u_0 = \binom{x+1}{2} \delta u_{1/2} - \binom{x}{2} \delta u_{-1/2},$$

$$\binom{x+1}{3} \delta^3 u_{-1/2} + \binom{x+2}{4} \delta^4 u_0 = \binom{x+2}{4} \delta^3 u_{1/2} - \binom{x+1}{4} \delta^3 u_{-1/2}$$

గౌస్ తిరోగమన సూత్రంలో పై వాటిని ప్రతిక్షేపిస్తే

$$u_x = u_0 + \binom{x+1}{2} \delta u_{1/2} + \binom{x+2}{4} \delta^3 u_{1/2} + \ldots$$

$$- \binom{x}{2} \delta u_{-1/2} - \binom{x+1}{4} \delta^3 u_{-1/2} - \ldots$$

దీనిని ఎవరెట్ రెండవ సూత్రము అంటాము.

పై సూత్రంలో $p = \frac{1}{2} + x$, $q = \frac{1}{2} - x$ అని వ్రాస్తే

$$u_x = u_0 + \left[\frac{(p^2 - 1/4)}{2!} \delta u_{1/2} + \frac{(p^2 - 1/4)(p^2 - 9/4)}{4!} \delta^3 u_{1/2} + \ldots\right]$$

$$- \left[\frac{(q^2 - 1/4)}{2!} \delta u_{-1/2} + \frac{(q^2 - 1/4)(q^2 - 9/4)}{4!} \delta^3 u_{-1/2} + \ldots\right]$$

$$\therefore u_{0.5} = 27 + .5\,(7) + \frac{1.5 \times .5}{2}\,(5) + \frac{1.5 \times .5 \times (-.5)}{6}\,(3)$$

$$+ \frac{(2.5)\,(1.5)\,(.5) \times (-.5)}{24}\,(-7)$$

$$+ \frac{(2.5)\,(1.5)\,(.5)\,(-.5)\,(-.15)}{120}\,(-10)$$

$$= 27 + 3.5 + 1.875 - .1875 + .2734375 - .1171875$$

$$= 32.34375 \text{ వేలు.}$$

కాబట్టి 1936 సం॥లో అంచనా వేసిన జనాభా 32.34375 వేలు.

ఉదా 3 : క్రింది పట్టికలో x యొక్క సమదూరపు విలువలకు, సంభావ్యత సంకలనం

$$u(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

విలువలు యివ్వబడినవి. స్టర్లింగ్ సూత్రం ఉపయోగించి, $x = 0.5437$ అయినపుడు పై సమాకలనం $u(x)$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

x	.51	.52	.53	.54	.55	.56	.57
u	.5292437	.5378987	.5464641	.5549392	.5633233	.5716157	.5798158

.54 ను మూలబిందువుగాను, 0.01 ను ప్రమాణంగాను తీసుకుందాము.

$$t = \frac{.5437 - .54}{.01} = 0.37 \text{ కు } u \text{ విలువను కనుక్కోవాలి.}$$

భేద పట్టిక :

t	u	Δu_t	$\Delta^2 u_t$	$\Delta^3 u_t$	$\Delta^4 u_t$
−3	.5292437				
		86550×10^{-7}			
−2	.5378987		-896×10^{-7}		
		85654×10^{-7}		-7×10^{-7}	
−1	.5464641		903×10^{-7}		0
		85751×10^{-7}		-7×10^{-7}	
0	.5549392		-910×10^{-7}		0
		83841×10^{-7}		-7×10^{-7}	
1	.5633233		916×10^{-7}		1×10^{-7}
		82924×10^{-7}		6×10^{-7}	
2	.5716157		-923×10^{-7}		
		82001×10^{-7}			
3	.5798158				

స్టర్లింగ్ అంతర్వేశన సూత్రం

$$u_t = u_0 + t\mu\delta u_0 + \frac{t^2}{2!}\delta^2 u_0 + \frac{t^2\left(t^2-1\right)}{3!}\mu\delta^3 u_0 + \frac{t^2\left(t^2-1\right)}{4!}\delta^4 u_0 + \ldots$$

$$\therefore u_{0.37} = .5549392 + \frac{.37\,(.0084751 + .0083841)}{2} + \frac{(.37)^2\,(-.0000910)}{2}$$

$$+ \frac{(.37)\left(.37^2-1\right)}{6}\,\frac{(-.0000007 - .0000007)}{2}$$

$$= .5549392 + .00311895 - .00000623 + .00000004$$

$$= .5580520.$$

$x = .5437$ అయినపుడు సంభావ్యత సమాకలనం విలువ .5580520.

ఉదా 4 : క్రింది పట్టిక నుండి $u_{12.2}$ విలువను కనుగొనుటకు స్టర్లింగ్ సూత్రాన్ని అనువర్తింప చేయుము. ఇక్కడ $\left(u_x = 1 + \log_{10}\sin x\right)$

x° :	10	11	12	13	14
$10^5 u_x$:	23967	28060	31788	35209	38368

'12' ను మూలబిందువుగాను, 1 ని ప్రమాణంగాను తీసుకొందాము. అపుడు

$$t = \frac{12.2 - 12}{1} = .2$$ కు v_t, అనగా u_x విలువ కనుక్కోవాలి.

భేద పట్టిక :

t	v_t	δv_t	$\delta^2 v_t$	$\delta^3 v_t$	$\delta^4 v_t$
–2	.23967				
		.04093			
–1	.28060		–.00365		
		.03728		.00058	
0	.31788		–.00307		–.00013
		.03421		.00045	
1	.35209		–.00262		
		.03159			
2	.38368				

స్టర్లింగ్ సూత్రం

$$v_t = v_0 + t\mu\delta v_0 + \frac{t^2}{2!}\delta^2 v_0 + \frac{t\left(t^2-1\right)}{3!}\mu\delta^3 v_0 + \frac{t^2\left(t^2-1\right)}{4!}\delta^4 v_0 + \ldots$$

యిక్కడ $v_0 = .31788,$

$$\mu\delta v_0 = \frac{1}{2}\,(.03728 + .03421) = .035745,$$

$$\delta^2 v_0 = -.00307,$$

$$\mu\delta^3 v_0 = \frac{1}{2}(.00058 + .00045) = .000515,$$

$$\delta^4 v_0 = -.00013$$

$$\therefore v_{.2} = .31788 + (.2)(.035745) + \frac{(.2)^2}{2}(-.00307) + \frac{(.2)(-.96)}{6}(.000515) + \frac{(.04)(-.96)}{24}(-.00013)$$

$$= .31788 + .007149 - .0000614 - .0000164 + .0000002$$

$$= .3249514$$

$u_{12.2}$ = .32495 (ఉజ్జాయింపుగా)

ఉదా 5 : x యొక్క సమదూరపు విలువలకు e^{-x} విలువలు, క్రింది పట్టికలో యివ్వబడినవి. బెస్సల్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $x = 1.7489$ కు e^{-x} విలువ కనుక్కోండి.

x	1.72	1.73	1.74	1.75	1.76	1.77	1.78
e^{-x}	.1790661479	.1772844100	.1755204006	.1737739435	.1720448638	.1703329888	.1686381473

1.74 ను మూలబిందువుగాను, .01 ను ప్రమాణంగాను తీసుకుందాము

అపుడు $u = \frac{1.7489 - 1.74}{.01}$ కు e^{-x} విలువ కనుక్కోవాలి.

$v = u - \frac{1}{2} = .89 - .50 = 0.39$ అవుతుంది.

భేద పట్టిక :

u	$e^{-x} = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
–2	.1790661479				
		–.0017817379			
–1	.1772844100		.0000177285		
		–.0017640094		–.0000001762	
0	.1755204006		.0000175523		.0000000013
		–.0017464571		–.0000001749	
1	.1737739435		.0000173774		.0000000022
		–.0017290797		–.0000001727	
2	.1720448638		.0000172047		.0000000015
		–.0017118750		–.0000001712	
3	.1703329888		.0000170335		
		–.0016948415			
4	.1686381473				

బెస్సెల్ సూత్రం

$$y_u = \frac{y_0 + y_1}{2} + v\Delta y_0 + \frac{\left(v^2 - 1/4\right)}{2}\frac{\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right)}{2}$$

$$+ \frac{v\left(v^2 - 1/4\right)}{3!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{\left(v^2 - 1/4\right)\left(v^2 - 9/4\right)}{4!}\frac{\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right)}{2} + \ldots$$

$$y_{0.89} = \frac{.1755204006 + .1737739435}{2} + .39\,(-.00174664571)$$

$$+ \left(\frac{.39^2 - .25}{2}\right)\frac{(.0000175523 + .0000173774)}{2}$$

$$+ .39\left(\frac{.39^2 - .25}{2}\right)(-.0000001749) + \frac{\left(.39^2 - .25\right)\left(.39^2 - 2.25\right)}{24}$$

$$\frac{(.0000000013 + .0000000022)}{2}$$

$$= .17464717205 - .00068111827 - .00000085490$$

$$+ .0000000111 + .0000000001$$

$$= .1739652000$$

$x = 1.7489$ అయినపుడు e^{-x} యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ .1739652000.

ఉదా 6 : క్రింది పట్టికలో x యొక్క కొన్ని సమదూరపు విలువలను $x^{1/3}$ విలువలు యివ్వబడినవి. $(344.5)^{1/3}$ విలువను కనుక్కోండి.

x :	342	343	344	345	346	347
u_x :	6.993191	7.000000	7.006796	7.013579	7.020349	7.027106

344 ను మూలబిందువుగాను, 1 ని ప్రమాణంగాను తీసుకొందాము. అపుడు

భేద పట్టిక :

t	u_t	δu_t	$\delta^2 u_t$
–2	6.993191		
		.006809	
–1	7.00000		– .000013
		.006796	
0	7.006796		– .000013
		.006783	
1	7.013579		– .000013
		.006770	
2	7.020349		– .000013
		.006557	
3	7.027106		

$\cos 0.8070 = 0.691668188$

$\cos 0.8075 = 0.691306994$

$\cos 0.8080 = 0.690945627$ [Ans. 0.691960629]

9. y_x, x సం॥ వయస్సుగల మనుష్యుల సంఖ్యను సూచిస్తుంది. $y_{20} = 512$, $y_{30} = 439$, $y_{40} = 346$, $y_{50} = 243$ అయితే స్టర్లింగ్ సూత్రం ఉపయోగించి y_{35} కనుక్కోండి. [Ans. 395]

10. $y_{20} = 2854$, $y_{24} = 3162$, $y_{28} = 3544$, $y_{32} = 3992$ అయితే బెస్సెల్ సూత్రం ద్వారా y_{25} విలువను రాబట్టండి. [Ans. 3250.875]

11. క్రింది పట్టికలో $u_x = 1.015^{-x}$ విలువలు యివ్వబడినవి.

x	u_x
48	.48936170
50	.47500468
52	.46106887
54	.44754192
56	.43441182

బెస్సెల్ సూత్రం ద్వారా 1.015^{-53} విలువను లెక్కకట్టండి. [Ans. 0.454255.05]

12. 3వ భేదములు స్థిరాంకములైతే,

$y_{x+1/2} = \frac{1}{2}\left(y_x + y_{x+1}\right) - \frac{1}{16}\left(\Delta^2 y_{x-1} + \Delta^3 y_x\right)$ అని నిరూపించుము.

13. ఎవరెట్ సూత్రం ఉపయోగించి u_{1031} విలువను రాబట్టండి.

x	u_x
1000	0
1010	43214
1020	86002
1030	128372
1040	170333
1050	211893
1060	253059
1070	293838

[Ans: 132586]

3.10 SAQ లకు సమాధానాలు

SAQ 1 δ యొక్క నిర్వచనాన్ని బట్టి

$$
\begin{aligned}
\delta u_x &= \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) u_x = u_{x+h/2} - u_{x-h/2} \\
u_x &= x, \text{ we have on replacing } x \text{ by } x + h/2, \\
u_{x+h/2} &= x + h/2 \\
u_{x-h/2} &= x - h/2.
\end{aligned}
$$

కాబట్టి $\delta x = (x + h/2) - (x - h/2) = h$

SAQ2 δ యొక్క నిర్వచనమును బట్టి

$$\delta u_x = \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) u_x = u_{x+h/2} - u_{x-h/2}$$

ఇంకా $\Delta E^{-1/2} u_x = \Delta u_{x-h/2} = u_{x+h/2} - u_{x-h/2}$

$$
\begin{aligned}
\nabla E^{1/2} u_x &= \nabla u_{x+h/2} = u_{x+h/2} - u_{x-h/2} \\
\therefore \delta u_x &= \Delta E^{-1/2} u_x = \nabla E^{1/2} u_x \\
\text{i.e., } \delta &= \Delta E^{-1/2} = \nabla E^{1/2}
\end{aligned}
$$

'δ' ను వర్గము, ఘనము చేస్తే

$$
\begin{aligned}
\delta^2 &= \Delta^2 E^{-1} = \nabla^2 E \\
\delta^3 &= \Delta^3 E^{-3/2} = \nabla^3 E^{3/2}
\end{aligned}
$$

అవుతాయి. ఈ సమస్యలో $h = 1$ కాబట్టి

$$
\begin{aligned}
\delta u_{1/2} &= \Delta E^{-1/2} u_{1/2} = \Delta u_0 \\
\delta u_{1/2} &= \nabla E^{1/2} u_{1/2} = \nabla u_1 \\
\therefore \Delta u_0 &= \nabla u_1 = \delta u_{1/2}
\end{aligned}
$$

ఇంకా

$$
\begin{aligned}
\delta^2 u_0 &= \Delta^2 E^{-1} u_0 = \Delta^2 u_{-1} \\
\delta^2 u_0 &= \nabla^2 E u_0 = \nabla^2 u_1 \\
\therefore \Delta^2 u_{-1} &= \nabla^2 u_1 = \delta^2 u_0.
\end{aligned}
$$

మరియు

$$
\begin{aligned}
\delta^3 u_{-1/2} &= \Delta^2 E^{-3/2} u_{-1/2} = \Delta^3 u_{-2} \\
\delta^3 u_{-1/2} &= \nabla^3 E^{3/2} u_{-1/2} = \nabla^3 u_1 \\
\therefore \Delta^3 u_{-2} &= \nabla^3 u_1 = \delta^3 u_{-1/2}
\end{aligned}
$$

ఖండిక – 4 : అంతర్వేశన సూత్రాలలోని దోషాలు; కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు

విషయ సూచిక

4.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివిన తరువాత మీరు : (i) లెగ్రాంజ్, న్యూటన్ పురోగమన, తిరోగమన, స్టైర్లింగ్, బెస్సెల్ అంతర్వేశన సూత్రాలలోని దోషాలను అంచనా వేయగలగాలి, (ii) పట్టికలలోని సరళ అంతర్వేశనంలోని గరిష్ఠ దోషమునకు సూత్రాన్ని రాబట్టి గలగాలి, (iii) సరళరేఖ, పరావలయము, $y = \alpha x^m$ వంటి వక్రాలకు కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపును రాబట్టగలగాలి.

4.2 ఉపోద్ఘాతం

ఇంతవరకు అంతర్వేశన సూత్రాలను రాబట్టి వాటి ద్వారా మనం అంచనా వేయాల్సిన బహు పదులను గాని, వాటి విలువలను గాని కనుక్కొన్నాము. అయితే, ఆ రాబట్టిన సూత్రాలు ఎంత వరకు యదార్థ విలువలను ఇస్తున్నాయనే దాని గురించి మనం చర్చించలేదు. ఈ ఖండికలో వివిధ అంతర్వేశన సూత్రాలలోని దోషాలను అంచనా వేయడానికి సూత్రాలను రాబట్టాము. కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు పద్ధతిని కూడా ఇక్కడ చర్చించాము.

ఒక ప్రమేయము $f(x)$ యొక్క విలువలు $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$ విలువలు ఇచ్చారు అనుకొందాము. వాటి భేద పట్టిక నుండి అంతర్వేశన బహుపది $\phi(x)$ ను $\phi(x_0) = f(x_0)$, $\phi(x_1) = f(x_1)$, ... $\phi(x_n) = f(x_n)$ అయ్యేలా కనుగొనుట మనకు వెనుకటి ఖండికలు వలన తెలుసు. n అనంతంగా పెరిగితే, $x_0 \le x \le x_n$ లో ఉన్న ఏ x కైన $\phi(x)$, $f(x)$ తో ఏకీభవిస్తుంది అని మన భావన.

అలా ఏకీభవిస్తే [$\phi(x), f(x)$ కు అభిసరణము చెందితే] [$f(x) - \phi(x)$] ను $\phi(x)$ లో దోషము అని నిర్వచిస్తాము.

అంతర్వేశనం ద్వారా ప్రమేయాలను, బహుపదులతో ఉజ్జాయింపు చేసేటప్పుడు, (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots n$ అన్ని బిందువుల గుండాపోయే ఒక బహుపదిని కనుక్కొన్నాం. ఇది, ఇచ్చిన దత్తాంశం సరియైనదైతే మంచి ఉజ్జాయింపు వస్తుంది కాని, దత్తాంశం, ఏదైనా ఒక ప్రయోగం నుండి తీసుకొన్నదైతే, x_i విలువలలో గాని y_i విలువలలో గాని లేదా రెండింటిలో గాని దోషం ఉండవచ్చు. ఈ సందర్భంలో ఇచ్చిన విలువల గుండాపోయే అంతర్వేశన బహుపదిని కనుక్కోవడం, నిజానికి ఆ విలువలే దోష భూయిష్టం అయినప్పుడు అర్థంలేని పని. ఈ సందర్భంలో ఇచ్చిన అన్ని బిందువుల గుండా పోకపోయినా అన్ని బిందువులను దగ్గరగా పోయే వక్రాన్ని కనుక్కొంటాం. దీనిని కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు పద్ధతిలో చేస్తాము.కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు పద్ధతి, సైద్ధాంతిక విలువలకు, ప్రాయోగిక విలువలకు మధ్యనున్న భేదాల వర్గాలు కనిష్ఠం అయ్యేటట్లు ఉంచుతుంది. ఈ సూత్రంపై ఆధారపడి., సరళరేఖ, పరావలయము, $y = \alpha x^m$ (m స్థిరము) అనే వక్రాల కనిష్ఠ వర్గాల అంచానాధారము రాబట్టాము. సరళరేఖకు, సైద్ధాంతిక, ప్రాయోగిక విలువల మధ్య గల, కనిష్ఠ వర్గ విచలనాల మొత్తాన్ని గణించటానికి సూత్రం రాబట్టాము.

4.3 లగ్రాంజ్, న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రాలలో దోషము

$[x_0, x_n]$ అంతరంలో $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నం, అన్ని పరిమాణాల అవిచ్ఛిన్న ఉత్పన్నాలు కలిగి ఉంది అనుకొందాము. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రమేయాన్ని క్రింది విధంగా వ్రాద్దాం.

$$F(z) = f(z) - \phi(z) - [f(x) - \phi(x)] \frac{(z - x_0)(z - x_1) \ldots (z - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}$$

ఇక్కడ $f(x)$ ఇచ్చిన ప్రమేయము, $\phi(x)$ అంతర్వేశన సూత్రము, z వాస్తవ చలరాశి.

$z = x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n + 2)$ విలువల వద్ద $F(z)$ సున్నా అవుతుంది. $f(x)$ అవిచ్ఛిన్నము, అన్ని పరిమాణాల అవిచ్ఛిన్న ఉత్పన్నాలు కలిగి ఉన్నందువలన, $F(z)$ కూడా అలాగే ఉంటుంది. $F(z)$ రోల్ సిద్ధాంతంలోని నియమాలను తృప్తి పరుస్తుంది. అందువలన $F(z)$ మొదటి ఉత్పన్నము కనీసము $F(x)$ యొక్క ప్రతి రెండు వరస సున్నా విలువల మధ్య సున్నా అవుతుంది.

(x_0, x_n) అంతరంలో $F'(z)$, $(n + 1)$ సార్లు, $F''(z)$, n సార్లు, $F'''(z)$, $(n - 1)$ సార్లు సున్నా అవుతాయి.

$F(z)$ యొక్క $(n + 1)$ వ అవకలని కనీసము ξ అనే బిందువు వద్ద సున్నా అవుతుంది అనుకొందాము. ఇక్కడ ξ అనేది (x_0, x_n) అంతరంలోది.

$\phi(z)$ ఒక nవ ఘాత బహుపది కాబట్టి,

$(n + 1)$వ ఉత్పన్నం సున్నా అవుతుంది. $(z - x_0)(z - x_1) \ldots (z - x_n)$ సమాసము $(n + 1)$ వ ఘాత బహుపది అందువలన దాని $(n + 1)$వ అవకలని, z^{n+1} యొక్క $(n + 1)$ వ అవకలని ఒకటి అవుతుంది. అది $(n + 1)!$ అవుతుంది.

F (z) ను (n + 1) సార్లు z దృష్ట్యా అవకలనము చేసి, ఏదైనా $z = \xi$ వద్ద

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - [f(x) - \phi(x)] \frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$$ అవుతుంది.

$F^{(n+1)}(z) = 0$ అవుతుంది. కాబట్టి

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - \phi(x)] \frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$$ అవుతుంది.

దోషము $= R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$,

ఇక్కడ ξ, x_0, x_n ల మధ్య x యొక్క ఏదైనా ఒక విలువ లగ్రాంజ్, న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రాలలో ఇది శేష పదము.

R_n లో $x - x_0 = hu, x - x_1 = h(u-1)$,

$x - x_2 = h(u-2), \dots x - x_n = h(u-n)$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$$R_n = \frac{h^{(n+1)} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} u(u-1)(u-2)\dots(u-n)$$ అవుతుంది.

న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రమునందు కూడా శేషపదము ఇదే వస్తుంది. $f(x)$ యొక్క విశ్లేషణా రూపము తెలియనపుడు $f^{(n+1)}(\xi)$ విలువను భేద పదాలలో వ్రాస్తాము. భేదములకు, అవకలనికి మధ్య గల ప్రాథమిక సంబంధము

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x + \theta n \Delta x), 0 < \theta < 1.$$

$x = x_0, \Delta x = h$, వ్రాస్తే

$$f^{(n)}(x_0 + \theta n h) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}$$ అవుతుంది.

$(x_0 + \theta n h)$, ξ లు x_0, x_n అంతర్వేశన అంతరంలో x విలువలు కాబట్టి,

$\xi = x_0 + \theta n h$ అని వ్రాశాము.

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}.$$

అందుచే $$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} f(x_0)}{h^{n+1}}$$ అవుతుంది.

R_n లో $f^{(n+1)}(\xi)$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$$R_n = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} u(u-1)(u-2)\dots(u-n)$$

[$f(x_0) = y_0$ కాబట్టి]

$(2n+3)$ బిందువులు $z = x, x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}$ వద్ద $F(z)$ సున్నా అవుతుంది. $\phi(z)$, $(2n+1)$ వ ఘాత బహుపది కాబట్టి దాని $(2n+2)$ వ అవకలని సున్నా అవుతుంది. అందువలన $F(z)$ ను $(2n+2)$ సార్లు z దృష్ట్యా అవకలనము చేసి, ఏదైనా $z = \xi$ వద్ద $F^{(2n+2)}(z) = 0$ వ్రాస్తే,

$$0 = f^{(2n+2)}(\xi) - [f(x) - \phi(x)] \frac{(2n+2)!}{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_{-1}\right)\ldots\left(x - x_n\right)\left(x - x_{-n}\right)\left(x - x_{n+1}\right)}$$

అవుతుంది. దీని నుండి

$$f(x) - \phi(x) = R_n = \text{దోషము}$$

$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\left(x - x_{-1}\right)\ldots\left(x - x_n\right)\left(x - x_{-n}\right)\left(x - x_{n+1}\right)$$

అవుతుంది.

$x - x_0 = hu, x - x_1 = h(u-1), \left(x - x_{-1}\right) = h(u+1), \ldots$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$$R_n = \frac{h^{2n+2} f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} u(u-1)(u+1)(u-2)(u+2) \ldots (u-n)(u+n)(u-n-1)$$

అవుతుంది. ఇదే బెస్సల్ సూత్రములో శేషపదము.

$f(x)$ తెలియనపుడు, $f^{(2n+2)}(\xi)$ బదులు $\frac{m_{2n+2}}{h^{2n+2}}$ వ్రాస్తే

ఇక్కడ $m_{2n+2} = \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2}$,

అపుడు $R_n = \frac{m_{2n+2}}{(2n+2)!} u(u-1)(u+1)(u-2)(u+2) \ldots (u-n)(u+n)(u-n-1)$ అవుతుంది.

$u = v + \frac{1}{2}$ వ్రాస్తే

$$R_n = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)\ldots\left(v^2 - \frac{(2n+1)^2}{4}\right) \text{లేదా}$$

$$R_n = \frac{m_{2n+2}}{(2n+2)!}\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)\ldots\left(v^2 - \frac{(2n+1)^2}{4}\right)$$

పై రెండింటిలో $v = 0$ వ్రాస్తే, మధ్య విలువలను అంతర్వేశనం చేసే సూత్రాలలోని శేష పదములు వస్తాయి.

ఆ విధంగా

$$R_n = \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} (-1)^{n+1} \frac{[1.3.5 \ldots (2n+1)]^2}{2^{2n+2}} \text{ లేదా}$$

$$R_n = \frac{m_{2n+2}}{(2n+2)!} (-1)^{n+1} \frac{[1.3.5 \ldots (2n+1)]^2}{2^{2n+2}}$$

4.7 పట్టికలలోని సరళ అంతర్వేశనం యదార్థత

పట్టికలలోని సరళ అంతర్వేశనంలోని గరిష్ట దోషమునకు సులభ సూత్రమును రాబడదాము.

న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రములోని దోషమునకు గల సూత్రములో $n = 1$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$$R_1 = \frac{h^2 f^{(2)}(\xi)}{2} u(u-1) = \frac{h^2 M}{2}\left(u^2 - u\right) \text{ అవుతుంది.}$$

ఇక్కడ $M, f''(x)$ యొక్క గరిష్ట పరమ మూల్యము (h పొడవు గల ఏదైనా ఒక అంతరము) R యొక్క గరిష్ట సంఖ్యా విలువ కనుగొనుటకు మనము దీనిని u దృష్ట్యా అవకలనముచేసి, దాని అవకలనమును సున్నాకు సమానం చేసి, u ను సాధించి, ఆ విలువను R_1 లో ప్రతిక్షేపించాలి.

$$\frac{dR_1}{du} = \frac{h^2 M}{2}(2u-1) = 0$$

$$\therefore u = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{d^2R_1}{du^2}\right|_{u=\frac{1}{2}} = h^2 M \text{ ఒక ధనాత్మక సంఖ్య.}$$

అందువలన $u = \frac{1}{2}$ వద్ద గరిష్ట విలువ వస్తుంది. R_1 గరిష్ట విలువ పరిమాణములో $\frac{h^2 M}{8}$ అవుతుంది.

$$\therefore |R_{max}| = \frac{h^2 M}{8}.$$

గరిష్ట లోపమునకు సూత్రము $E \le \frac{h^2 M}{8}$

మాదిరి సమస్యలు

ఉదా. *1* : క్రింది పట్టిక నుండి న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\log_{10} 1.024$ ను అంతర్వేశనం చేయడంలో గరిష్ట దోషమును నిర్ణయించండి.

x :	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
$f(x)$:	0.0086002	0.0128372	0.0170333	0.0211893	0.0253059

యిక్కడ $h = .01 = 10^{-2}, u = \frac{1.024 - 1.02}{.01} = .4$

$\therefore u - 1 = -.6, u - 2 = -1.6, u - 3 = -2.6$

$$f^{(6)}(x) = \frac{d^6}{dx^6}\left(\log_{10} x\right) = \frac{d^6}{dx^6}\left(\log_e x\right) . \log_{10} e$$

$$= -\frac{120}{x^6} \log_{10} e$$

$$\therefore f^{(6)}(\xi) = -\frac{120}{\xi^6} \times .4342944$$

$$= -\frac{52.115333}{\xi^6}$$

$\xi = 40$ అయినపుడు

$$R_5 = 10^{-6} \times 0.007422$$

$$= 10^{-8} \times .7422$$

$\xi = 50$ అయినపుడు

$$R_5 = 10^{-6} \times .0019456$$

$$= 10^{-8} \times 0.19456$$

$10^{-8} \times 0.19456 <$ దోషము $< 10^{-8} \times 0.7422$

అంతర్వేశన దోషము ఎనిమిదవ స్థానములో ఒక యూనిట్ తక్కువ.

ఉదా. 3 : x యొక్క కొన్ని విలువలకు $y = x^4 + 10x^5$ ప్రమేయము విలువలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. $x = 2.27$ అయినపుడు y విలువను బెస్సెల్ సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనుము. దోషమును రాబట్టుము.

x :	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
y :	336.0000	427.8582	538.7888	671.6184	829.4400	1015.6250

భేద పట్టిక

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2.0	336.0000				
		91.8582			
2.1	427.8582		19.0724		
		110.9306		2.8266	
2.2	538.7888		21.8990		0.2664
		132.8296		3.0930	
2.3	671.6184		24.9920		0.2784
		157.8216		3.3714	
2.4	829.4400		28.3634		
		186.1850			
2.5	1015.6250				

$x_0 = 2.2, x = 2.27, h = .1$ గా తీసుకొందాము

అపుడు $u = \frac{2.27 - 2.20}{.1} = 0.7$

$$\therefore v = u - \frac{1}{2} = .2$$

$$y_{2.27} = \frac{1}{2}(538.7888 + 671.6184) + (0.2)(132.8296)$$

$$+ \frac{(.04 - .25)}{2}\frac{(21.8990 + 24.992)}{2} + (.2)\frac{(0.04 - 0.25)}{6}(3.0930)$$

$$= 605.2036 + 26.56592 - 2.46178 - .02165$$

$$= 629.28609.$$

$$\therefore y_{2.27} = 629.28609.$$

R_n కనుగొనుటకు $2n + 2 = 4$

కాబట్టి $n = 1$

ఇంకా $f^{(4)}(x) = 24 + 1200\,x$

$$\therefore f^{(4)}(\xi) = 24 + 1200\,\xi$$

ξ విలువ 2.0, 2.5 ల మధ్య ఉంటుంది కాబట్టి ξ ను క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$\xi = 2.25 + 0.1\eta$$

యిక్కడ η విలువ –2.5, 2.5 ల మధ్య ఉంటుంది. $f^{(4)}(\xi)$ లో ξ ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$f^{(4)}(\xi) = 2724 + 120\eta.$$

$$R_1 = \frac{h^4 f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)$$

$$= \frac{(.1)^4}{24}(2724 + 120\,\eta)(.04 - .25)(.04 - 2.25)$$

$$= .00527 + .000232\,\eta$$

$$= .00527 \pm .00058$$

$\therefore$ .00469 < దోషము < .00585

దోషాన్ని సవరించగా వచ్చిన $y_{2.27}$ విలువ, 629.28609 కు .00585, .00469 లను కలుపగా వచ్చిన విలువలు వరుసగా 629.2919, 629.2908 ల మధ్య ఉంటుంది. ఈ 2 విలువల సరాసరి విలువ 629.2914.

R_n లో వ్యుత్పన్నానికి బదులుగా భేదాలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$m_4 = \frac{(.2664 + .2784)}{2} = .2724$$

$$\therefore R_1 = \frac{m_4}{4!}\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)$$

$$= \frac{.2724}{24}(.04 - .25)(.04 - 2.25)$$

$$= .00527$$

అపుడు $y_{2.27} = 629.28609 + .00527 = 629.29136$ లేక 629.2914 (నాలుగు దశాంశ స్థానాల వరకు సవరించిన విలువ).

ఉదా. 4 : 1 నుండి, 12,500 వరకు యూనిట్ అంతరాలలో ప్రమేయం $\frac{1}{N}$ విలువ బార్లో (Barlow's) పట్టికలో పొందుపరచబడినది. $N = 650$ అయినపుడు ఈ ప్రమేయపు విలువను సరళ అంతర్వేశనము చేయడంలో వచ్చే దోషాన్ని కనుక్కోండి.

$f(N) = \frac{1}{N}$, కాబట్టి $f'(N) = -\frac{1}{N^2}$, $f''(N) = \frac{2}{N^3}$

$h = 1, N = 650$ తీసుకొని

$E \leq \frac{h^2 M}{8}$, $M = f''(N)$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$E \leq \frac{1}{4 \times (650)^3} = \frac{1}{1098500000}$$

లేక $E \leq .000000001$

గమనిక : 1వ భేదాలు స్థిరాంకాలయినపుడే సరళ అంతర్వేశనం వీలవుతుంది. కాబట్ట సరళ అంతర్వేశనాన్ని ఉపయోగించే ముందు 1వ భేదాలు స్థిరాంకాలు అయ్యాయో లేదో గమనించవలెను.

4.8 కనిష్ట వర్గాల ఉజ్జాయింపు

గుర్తించబడిన బిందువుల శ్రేణిలోని 'అవశేషములు' అంటే ఆ బిందువులకు, అతి సన్నిహితముగా ఉండే వక్రానికి క్షితిజ లంబదూరాలు. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి, ఈ అవశేషముల వర్గములమొత్తము అతి సన్నిహితముగా ఉండే వక్రానికి కనిష్టముగా ఉండాలిన చెబుతుంది. అవశేషములలో కొన్ని ధనాత్మకాలు, కొన్ని ఋణాత్మకాలు. అవశేషాల వర్గాలు ధనాత్మకం కాబట్టి, వాటి వర్గాల మొత్తం కనిష్టంగా ఉండాలి అన్న నియమమును బట్టి, వాటి సాంఖ్యక విలువలు చాలా తక్కువగా ఉంటాయి. గుర్తించబడిన బిందుల శ్రేణిలో అన్ని బిందువులకు అతి సన్నిహితంగా ఉండే వక్రమును సంధానించడం అనే పద్ధతిని వివిధ వక్రాలను అనువర్తిద్దాము.

4.8.1 సరళరేఖకు కనిష్ట వర్గాల అంచనాధారము

(x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ దత్త బిందువులు.

$F(x) = \alpha + \beta x$ అనే వక్రానికికనిష్ట వర్గాల అంచనాధారము కనుగొంటాము.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ లకు సైద్ధాంతిక విలువలు వరుసగా

$\alpha + \beta x_1, \alpha + \beta x_2, \ldots, \alpha + \beta x_n$ సైద్ధాంతిక, పరిశీలక విలువల భేదాల వర్గాల మొత్తమును

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha - \beta x_i \right)^2$$ వ్రాయవచ్చు.

S (α, β), α, β; లలో ప్రమేయము. దానిని కనిష్టము చేయాలి అంటే

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \text{ కావాలి.}$$

α, β లకు అనుగుణముగా వరుసగా కావలసిన అంచనాలు a, b. ఇవి రెండు ఏకఘాత సమీకరణాలు

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \alpha - \beta x_i\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - \alpha - \beta x_i\right)$$

సున్నకు సమానం చేసి సాధించగా వచ్చేవి. ఇక్కడ x_i, y_i లు చలరాశులు కావని గమనించాలి. ఇవి పరిశీలక విలువలు. పై సమీకరణములను సూక్ష్మీకరిస్తే

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

దీని నుంచి $f(x) = a + bx$ అనే సరళ రేఖ వస్తుంది.

ఇది $F(x) = \alpha + \beta x$ ను అంచనా వేస్తుంది.

పై సమీకరణములు సరళరేఖకు నార్మల్ సమీకరణములు.

మాదిరి సమస్యలు

ఉదా. 1 : ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు సరళరేఖను సంధానించండి.

x :	2	4	6	8	10	12
y :	7.32	8.24	9.20	10.19	11.01	12.05

	x_i	x_i^2	y_i	$x_i\, y_i$
	2	4	7.32	14.64
	4	16	8.24	32.96
	6	36	9.20	55.20
	8	64	1.096	81.52
	10	100	11.01	110.10
	12	144	12.05	144.60
Σ	42	364	58.01	439.02

$f(x) = a + bx$ సరళరేఖకు నార్మల్ సమీకరణములు

$$6a + 42b = 58.01$$

$$42a + 364b = 439.02$$

సాధించగా

$$a = 6.3733333,$$

$$b = .4707143.$$

దత్తాంశమునకు సరళరేఖను సంధానించును.

$$f(x) = 6.3733333 + 0.4707143x$$

$x, 2 \le x \le 12$ అయినచో

$f(x)$ నిజ విలువలకు దీని నుండి అంచనా వేయచ్చును.

4.8.2 పరావలయానికి కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాధారము

$f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ అనే నిజ వక్రానికి దత్త బిందువులు (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$ వద్ద కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాధారమును కనుగొందాము. సైద్ధాంతిక, పరిశీలక విలువల భేదాల వర్గాల మొత్తము

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha - \beta x_i - \gamma x_i^2 \right)^2 \text{ అవుతుంది.}$$

అపుడు
$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha - \beta x_i - \gamma x_i^2 \right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - \alpha - \beta x_i - \gamma x_i^2 \right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(y_i - \alpha - \beta x_i - \gamma x_i^2 \right).$$

అనే సమీకరణములు వస్తాయి. ఈ పాక్షిక అవకలనులను సున్నకు సమానముచేస్తే a, b, c విలువలు (α, β, γ లకు అంచనాలు) ఈ క్రింది సమీకరణములను సాధించుట ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

$$\sum y = na + b\sum x + c\sum x^2,$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3,$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

పై సమీకరణములు పరావలయమునకు నార్మల్ సమీకరణములు అంటాము.

ఉదా. 2 : క్రింది దత్తాంశమునకు పరావలయాన్ని సంధానించండి.

x :	2	4	6	8	10
y :	3.07	12.85	31.47	57.38	91.29

ఈ సందర్భములో బేసి విలువలు ఉన్నాయి కాబట్టి

$X = \frac{x-6}{2}$ గా వ్రాసి సూక్ష్మీకరించవచ్చు.

	X	y	Xy	X^2y
	–2	3.07	–6.14	12.38
	–1	12.85	–12.85	12.85
	0	31.47	0.00	0.00
	1	57.38	57.38	57.38
	2	91.29	182.58	365.16
Σ	0	196.06	220.97	447.67

నార్మల్ సమీకరణములు

$$\Sigma y = na + b\Sigma X + c\Sigma X^2,$$

$$\Sigma Xy = a\Sigma X + b\Sigma X^2 + c\Sigma X^3,$$

$$\Sigma X^2 y = a\Sigma X^2 + b\Sigma X^3 + c\Sigma X^4.$$

ఇక్కడ $n = 5, \Sigma X^2 = 10, \Sigma X^3 = 0, \Sigma X^4 = 34$

$$5a + 10c = 196.06$$

$$10b = 220.97$$

$$10a + 34c = 447.67$$

పై సమీకరణములను సాధిస్తే

$a = 31.276286, b = 22.097, c = 3.967857$

$$f(X) = 31.276286 + 22.097X + 3.967857X^2.$$

$$f(x) = 0.695999 - 0.855071x + 0.991964x^2.$$

4.8.3 $F(x) = \alpha x^m$, (m స్థిర సంఖ్య) రూపములో ఉండే వక్రానికి కనిష్ట వర్గాల అంచనాధారము

(x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ దత్త బిందువులకు $F(x) = ax^m$ (m స్థిర సంఖ్య) అనే వక్రానికి కనిష్ట వర్గాల అంచనాధారము కనుగొంటాము. ఈ సమస్యలో α ఒక్కటే పరామితి.

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha x_i^m \right)^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i^m \left(y_i - \alpha x_i^m \right).$$

$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$ నుండి α కు కనిష్ట వర్గముల అంచనా a ను కనుగొనవచ్చు.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m \; y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}}$$

a ఇంకా కొన్ని అంచనాలు ఉండవచ్చు. కాని అవి కనిష్ట వర్గాల అంచనాలు కావు. ఉదాహరణకు, దత్తాంశములో ప్రతి n పదాలకు $\frac{y_i}{x_i^m}$ గణించి తరువాత

$$a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i^m}$$ ను గణించవచ్చు.

ఇంకొక అంచనాధారము a_2 ను, దత్తాంశానికి సంవర్గమానములు తీసుకొని కనుగొనవచ్చు. సిద్ధాంత వక్రానికి $F(x) = \alpha x^m$ బదులుగా

$\log F(x) = \log \alpha + m \log x$ ను పరిశీలిద్దాము. దీనిని

$F^*(x) = \alpha^* + m x^*$

ఇక్కడ $F^*(x) = \log F(x), a^* = \log \alpha$

$x^* = \log x$, దత్తాంశమును $\left(x_i^*, y_i^* \right)$ రూపంలో తీసుకొంటాము. కనిష్ట వర్గాల అంచనా α^* ను కనుగొనవచ్చు.

$$\alpha^* = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^* - m \sum_{i=1}^{n} x_i^* \right]$$

α యొక్క అంచనాధారము a_2 ను $\log a_2 = a^*$ నుండి కనుగొనవచ్చు.

ఉదా. 3 : $F(x) = \alpha x^2$ వక్రానికి, క్రింది దత్తాంశమును ఉపయోగించి α ను అంచనా వేయడానికి, మూడు అంచనా పద్ధతులను ఉపయోగించండి.

x_i :	2	4	6	8	10
y_i :	0.973	3.839	8.641	15.987	23.794

$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 15664, \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 3778.96$ అని గమనించవచ్చు.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \, y_i}{\sum_{i=1}^{5} x_i^4} = \frac{3778.96}{15664} = 0.24125$$

$$a_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i^2} = \frac{1.210952}{5} = 0.24219$$

a_2 ను అంచనా వేయుటకు ఈ క్రింది పట్టిక కావాలి.

x_i^*	y_i^*
0.30103	1.98811
0.60206	0.58422
0.77815	0.93656
0.90309	1.20377
1.00000	1.37647

ఇక్కడ సంవర్గమానములను 10ని ఆధారముగా తీసుకొంటాము.

అపుడు $\sum_{i=1}^{5} y_i^* = 4.08913, \sum_{i=1}^{5} x_i^* = 3.58433,$

$a^* = -0.61591$ అవుతాయి.

ప్రతి సంవర్గమానము తీసుకొంటే

$a_2 = 0.24214.$

4.8.4 కనిష్ట వర్గ విచలనాల మొత్తాన్ని గణించుట

$f(x) = a + bx$ వక్రానికి,

$$m = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)^2 \text{ ని గమనించవచ్చు.}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right) y_i - a \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)$$

$$- b \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - a - bx_i\right) .$$

సరళరేఖలకు నార్మల్ సమీకరణముల దృష్ట్యా రెండు, మూడు పదాలు సున్న అవుతాయి.

$$m = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} y_i - b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

ఉదా. *4 :* సరళరేఖను సంధానించడానికి, కనిష్ఠ వర్గ విచలనాల మొత్తమును, మాదిరి సమస్య 1లో ఇచ్చిన దత్తాంశమును కనుక్కోండి.

మాదిరి సమస్య 1లో $a = 6.3733333$, $b = .4707143$ అని కనుగొన్నాము.

ఇంకా $\sum_{i=1}^{6} y_i = 58.01$, $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 439.02$ అని తెలుసు.

$\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 576.3787$ అవుతుందని గమనించవచ్చు.

$f(x) = a + bx$ సరళరేఖకు కనిష్ఠ వర్గాల విచలనాల మొత్తము

$$m = \sum_{i=1}^{6} y_i^2 - a \sum_{i=1}^{6} y_i - b \sum_{i=1}^{6} x_i y_i$$

$$= 576.3787 - 6.3733333\,(58.01) - 439.02\,(.4707143)$$

$$= .00864328.$$

4.9 సారాంశము

ఈ ఖండికలో న్యూటన్ పురోగమన, తిరోగమన, లెగ్రాంజ్, స్టెర్లింగ్, బెస్సెల్ అంతర్వేశ సూత్రాల లోని శిష్ట పదాలను రాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశానికి ఈఈ సూత్రాల యదార్థతలను కనుగొన్నాము. కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు ద్వారా, సరళరేఖ, పరావలయము, $y = \alpha x^m$ వంటి వక్రాలకు కనిష్ఠ వర్గాల అంచనాధారము రాబట్టాము.

4.10 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానం వ్రాయండి.

1. $\log_{10} \sin 37' 22''$ విలువను కనుక్కోండి.

$$\log \sin 37' = 8.0319195 - 10$$
$$\log \sin 38' = 8.0435009 - 10$$
$$\log \sin 39' = 8.0547814 - 10$$
$$\log \sin 40' = 8.0657763 - 10$$
$$\log \sin 41' = 8.0764997 - 10$$

$\log \sin 42' = 8.0869646 - 10$

$\log \sin 43' = 8.0971832 - 10$

న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రం ఉపయోగించి దోషాన్ని అంచనా వేయండి.

[Ans. 8.0363956 – 10; 0.3 × .0000001]

2. cos 0.806595 విలువను స్టర్లింగ్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

$\cos .8050 = .693111235$

$\cos .8055 = .692750733$

$\cos .8060 = .692390058$

$\cos .8065 = .692029210$

$\cos .8070 = .691668188$

$\cos .8075 = .691306994$

$\cos .8080 = .690945627$

దోషాన్ని అంచనా వేయండి.

[0.691960629; .015 × 0.000000001]

3. $\sin(0.1) = .09983$, $\sin(0.2) = .19867$ అయితే లగ్రాంజ్ అంతర్వేశనాన్ని బట్టి $\sin(0.15)$ ఉజ్జాయింపు విలువను కనుక్కోండి. గరిష్ఠ పరమ దోషాన్ని కనుక్కోండి.

[0.14925; 0.00025]

4. సరళ అంతర్వేశనం ద్వారా నాలుగు దశాంశాల వరకు ఖచ్చిత విలువలు రావడానికి, [1, 3] అంతరంలో $f(x) = \sin x$ విలువలు పట్టిక రూపంలో పొందుపరచుటకు h పొడవు ఎంత ఉండాలో నిర్ణయించండి.

[$h \le 0.02$]

5. క్రింది బిందువులకు అంత్యంత సన్నిహితముగా ఉండే బిందువుల నుండి పోయే సరళరేఖ సమీకరణమును కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతిలో కనుగొనండి.

x :	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y :	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02

[$y = -0.285 + 1.096x$]

6. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు రెండవ ఘాత సమీకరణమును కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతిని కనుగొనండి.

x :	–2	–1	0	1	2
$f(x)$:	15	1	1	3	19

$$\left[y = \frac{1}{35}(-37 + 35x + 155x^2)\right]$$

7. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు $y = a + bx^2$ రూపములో ఉండే సమీకరణమును కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా సంధానించండి.

x :	20	24	29	36	43
y :	2100	2980	4310	6600	9360

[$94.87 + 35\,x + 5.0132x^2$)

8. $I = a\,D^n$ రూపములో ఉండే సమీకరణమును క్రింది దత్తాంశమునకు సంధానించండి.

D :	1720	2300	3200	4100
I :	655	789	1000	1164

[$I = 4.473\,D^{0.6691}$]

9. ప్రశ్న 1లో కనిష్ఠవర్గ విచలనాల మొత్తాన్ని కనుక్కోండి. [0.01688].

ఖండిక – 5 : విలోమ అంతర్వేశనము

విషయసూచిక

5.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివిం తరువాత మీరు : (i) విలోమ అంతర్వేశన సమస్యను చెప్పగలగాలి, (ii) లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రం, పారంపరిక ఉజ్జాయింపు శ్రేణి ప్రత్యావర్తన పద్ధతుల ద్వారా విలోమ అంతర్వేశనం సమస్యను సాధించగలగాలి, (iii) విలోమ అంతర్వేశన పద్ధతి ద్వారా బీజీయ సమీకరణాలను సాధించగలగాలి.

5.2 ఉపోద్ఘాతం

ఒక ప్రమేయ విలువలను ఒక పట్టీలో ఇచ్చారనుకోండి. ఇంతవరకు చదివిన పాఠాలలో అంతర్వేశనం గురించి తెలుసుకున్నాం. అంటే "x ఇస్తే u_x ఎలా కనుక్కోవాలనేది చూశాం". విలోమ అంతర్వేశనం "u_x ఇస్తే, x ను ఎలా కనుక్కోవాలి" అనేది తెలియజేస్తుంది. ఇక్కడ u_x ఇచ్చిన పట్టీ విలువల మధ్యలో ఉండాలి.

కొన్ని ప్రమేయాలకు విలోమ అంతర్వేశనం అంతకష్టం కాదు. ఉదాహరణకు, $y = \sin x, x = \sin^{-1} y$. అలాగే, $y = \log_e x,\ x = e^y$ మొదలగు ప్రమేయాలకు, y విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే x విలువలు నేరుగా వస్తాయి. కాని x, u_x లను ప్రమేయం ద్వారా ఈయకుండా, సంఖ్యలద్వారా తెలిపితే విలోమ అంతర్వేశనం కొంచెం కష్టం అవుతుంది. ఈ విలోమ అంతర్వేశనం చేయడానికి కొన్ని పద్ధతులున్నాయి. వాటిలో

(i) లెగ్రాంజ్ సూత్రాన్ని వాడటం.

(ii) పారంపరిక ఉజ్జాయింపు లేదా పునరుక్త పద్ధతి.

(iii) శ్రేణి ప్రత్యావర్తనము (Method of reversion of series) ముఖ్యమైనవి.

5.3 లెగ్రాంజ్ సూత్రం ద్వారా విలోమ అంతర్వేశనం

x విలువలు సమాన అంతరాలలో లేకుంటే, లెగ్రాంజ్ సూత్రంలో x, y (లేదా u_x) లను ఒకదానికొకటి మార్పు, చేయడంద్వారా విలోమ అంతర్వేశనం చేస్తాము. లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రాన్ని 2.5 లోని సమీకరణం (2) లో ఇచ్చాము. దీనినే సమీకరణం (1) లో క్రింది విధంగా వ్రాశాము.

$$x = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\cdots(y_0-y_n)} x_0 + \ldots$$

$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\cdots(y_n-y_{n-1})} x_n \qquad \ldots (1)$$

ఈ సూత్రాన్ని వాడే ఒక ఉదాహరణను క్రింద నిస్తున్నాం.

ఉదా *1* : లెగ్రాంజ్ సూత్రం ద్వారా క్రింది ప్రశ్నకు విలోమ అంతర్వేశనము చేయండి.

వయస్సు :	x	30	35	40	45	50
వార్షిక విలువ :	u_x	15.9	14.9	14.1	13.3	12.5

(of $4\frac{1}{2}$%)

13.6 వార్షిక విలువ కనుగుణంగా వయస్సును కనుక్కోండి.

ఇక్కడ $x_0 = 30, x_1 = 35, x_2 = 40, x_3 = 45, x_4 = 50.$

$y_0 = 15.9, y_1 = 14.9, y_2 = 14.1, y_3 = 13.3, y_4 = 12.5.$

సమీకరణం (1)లో ఇచ్చిన లెగ్రాంజ్ సూత్రాన్ని వాడితే, $y = 13.6$ కనుగుణంగా x విలువ :

$$x = \frac{(13.6-14.9)(13.6-14.1)(13.6-13.3)(13.6-12.5)}{(15.9-14.9)(15.9-14.1)(15.9-13.3)(15.9-12.5)} \times 30$$

$$+ \frac{(13.6-15.9)(13.6-14.1)(13.6-13.3)(13.6-12.5)}{(14.9-15.9)(14.9-14.1)(14.9-13.3)(14.9-12.5)} \times 35$$

$$+ \frac{(13.6-15.9)(13.6-14.9)(13.6-13.3)(13.6-12.5)}{(14.1-15.9)(14.1-14.9)(14.1-13.3)(14.1-12.5)} \times 40$$

$$+ \frac{(13.6-15.9)(13.6-14.9)(13.6-14.1)(13.6-12.5)}{(13.3-15.9)(13.3-14.9)(13.3-14.1)(13.3-12.5)} \times 45$$

$$+ \frac{(13.6-15.9)(13.6-14.9)(13.6-14.1)(13.6-12.5)}{(12.5-15.9)(12.5-14.9)(12.5-14.1)(12.5-13.3)} \times 50$$

$$= 40.1$$

5.4 పారంపరిక ఉజ్జాయింపు లేదా పునరుక్త పద్ధతి

న్యూటన్ పురోగమన విభాజిత సూత్రం

$$y_u = y_0 + u\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

తీసుకొని u కొరకు సాధించగా

$$u = \frac{1}{\Delta y_0}\left[y_u - y_0 - \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{u(u-1)(u-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]$$

రెండవ తరగతి, ఆ పై తరగతి భేదాలను వదిలివేస్తే, మొదటి ఉజ్జాయింపు వస్తుంది.

దీన్ని $$u_1 = \frac{1}{\Delta y_0}\left(y_u - y_0\right)$$

రెండవ ఉజ్జాయింపులో, u కు బదులు u_1 వాడి, రెండవ భేదం వరకు తీసుకొంటాం.

ఇది $$u_2 = \frac{1}{\Delta y_0}\left[y_u - y_0 - \frac{u_1(u_1 - 1)}{2}\Delta^2 y_0\right]$$ అవుతుంది.

అదే విధంగా, మూడవ ఉజ్జాయింపు

$$u_3 = \frac{1}{\Delta y_0}\left[y_u - y_0 - \frac{u_2(u_2 - 1)}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{u_2(u_2 - 1)(u_2 - 2)}{6}\Delta^3 y_0\right]$$

అని తీసుకొంటాం. ఈ విధంగా ఉజ్జాయింపుల్ని తీసుకొంటాం. రెండు వరుస ఉజ్జాయింపులు మనకు కావలసిన డెసిమల్ బిందువు వరకు సమానం అయ్యేంతవరకు ఈ పద్ధతిన ఉజ్జాయింపులు పెంచుకుంటూ పోతాం. క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా ఈ పద్ధతిని వివరించడమైనది.

ఉదా 2 : $y = x^3$ ప్రమేయానికి $x = 2, 3, 4, 5$ విలువ వద్ద పట్టిక వ్రాసి 10 యొక్క ఘనమూలము, (మూడు డెసిమల్ స్థానాలవరకు) కనుక్కోండి.

సాధన

ఇక్కడ $y_u = 10, y_0 = 8, \Delta y_0 = 19, \Delta^2 y_0 = 18, \Delta^3 y_0 = 6.$ u కు పారంపరిక ఉజ్జాయింపులు

$$u_1 = \frac{1}{19}(2) = 0.1$$

$$u_2 = \frac{1}{19}\left[2 - \frac{0.1(0.1 - 1)}{2}\times 18\right] = 0.15$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	8			
		19		
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

$$u_3 = \frac{1}{19}\left[2 - \frac{0.15(0.15 - 1)}{2}(18) - \frac{0.15(0.15 - 1)(0.15 - 2)}{6}(6)\right]$$

$$= 0.1532,$$

$$u_4 = \frac{1}{19}\left[2 - \frac{0.1532\,(0.1532-1)}{2}(18) - \frac{0.1532\,(0.1532-1)\,(0.1532-2)}{6}(6)\right]$$

$$= 0.1541$$

$$u_5 = \frac{1}{19}\left[2 - \frac{0.1541\,(0.1541-1)}{2}(18) - \frac{0.1541\,(0.1541-1)\,(0.1541-2)}{6}(6)\right]$$

$$= 0.1542.$$

మూడు డెసిమల్ బిందువులకు సరిచేస్తే, $u = 0.154$ అని తీసుకొంటాం. కాబట్టి 10 యొక్క ఘనమూలం $x_0 + uh = 2 + (.154)\,1 = 2.154$ అవుతుంది.

ఉదా 3 : $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx$, సంభావ్యతా సమాకలని విలువల పట్టీనిచ్చాం. ఏ x విలువకు ఈ సమాకలని $\frac{1}{2}$ అవుతుంది?

సాధన

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.45	0.4754818				
		.0091737			
0.46	0.48446555		– .0000840		
		.0090897		– .0000011	
0.47	0.4937452		– .0000851		.0000001
		.0090046		– .0000010	
0.48	.5027498		–.0000861		.0000002
		.0089185		– .0000008	
0.49	0.5116683		– .0000869		
		.0088316			
0.50	0.5204999				

ఇక్కడ బెస్సెల్ సూత్రాన్ని వాడతాం. పట్టిక నుండి చూస్తే, కావలసిన x విలువ 0.47, 0.48 ల మధ్యన ఉందని తెలుస్తుంది.

$x_0 = 0.47,\ h = .01,\ y = \frac{1}{2} = 0.5$ అని తీసుకొంటాం.

బెస్సెల్ సూత్రం

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} + v\,\Delta y_0 + \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)}{2}\,\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2}$$

$$+ \frac{v\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)}{3!}\,\Delta^3 y_{-1}$$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$0.5 = 0.4982475 + 0.0090046\, v + \frac{\left(v^2 - 0.25\right)}{2} (-0.0000856)$$

$$+ \frac{v\left(v^2 - 0.25\right)}{2} (-.0.0000010)$$ అని వస్తుంది.

v కొరకు సాధించి, 0.0090046 చే భాగించగా,

$$v = 0.194623 - \left(v^2 - 0.25\right)(-0.004753) - v\left(v^2 - 0.25\right)$$

$$(-0.000185) \qquad \ldots (2)$$

ఈ సమీకరణంలో v యొక్క మొదటి తరగతి పదాలు తప్ప, మిగిలిన పదాలు వదిలివేస్తే మొదటి ఉజ్జాయింపు వస్తుంది.

$$v_1 = 0.194623.$$

సమీకరణం (2)లో ఈ v_1 విలువను కుడిచేతివైపు v ఉన్నచోట ప్రతిక్షేపిస్తే,

$$v_2 = 0.194623 - \left[(0.194623)^2 - 0.25\right](-0.004753)$$

$$- 0.194623\left[(0.194623)^2 - 0.25\right](-0.0000185)$$

$$= 0.194623 - 0.001008 - 0.000001 = 0.193614.$$

$$v_3 = 0.194623 - 0.0010101 - 0.000001 = 0.193612.$$

ఈ విలువ v_2 తో ఇంచుమించు సమానంగా ఉంది కాబట్టి ఉజ్జాయింపులను ఇంతటితో ఆపుతాము.

$$\because u = v + \frac{1}{2}, x = x_0 + hu \text{ కాబట్టి } u = 0.693612,$$

$$x = 0.47 + 0.01\,(0.693612) = 0.47693612$$

ఇది 6 డెసిమల్ బిందువుల వరకు సరిగా ఉంది.

5.5 శ్రేణి ప్రత్యావర్తనము

ఇంతవరకు రాబట్టిన అంతర్వేశన సూత్రాలన్నీ ఘాతశ్రేణి (power series) రూపంలో ఉన్నాయి. ఘాతశ్రేణి రూపంలో ఉన్న ఏ శ్రేణినైనా ప్రత్యావర్తనము (Reversion) చేయవచ్చు.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad \ldots (3)$$

అనే ఘాతశ్రేణిని ప్రత్యావర్తనం చేసినప్పుడు

$$x = \left(\frac{y - a_0}{a_1}\right) + c_1\left(\frac{y - a_0}{a_1}\right)^2 + c_2\left(\frac{y - a_0}{a_1}\right)^3 + c_3\left(\frac{y - a_0}{a_1}\right)^4 + \ldots$$

$$+ c_{n-1}\left(\frac{y - a_0}{a_1}\right)^n + \ldots \qquad \ldots (4)$$

ఇక్కడ

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{a_2}{a_1},\\
c_2 &= -\frac{a_3}{a_1} + 2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2,\\
c_3 &= -\frac{a_4}{a_1} + 5\left(\frac{a_2 a_3}{a_1^2}\right) - 5\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3,\\
c_4 &= -\frac{a_5}{a_1} + 6\,\frac{a_2 a_4}{a_1^2} + 3\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2,\\
&\quad -21\,\frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} + 14\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^4, \text{ etc.}
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots (5)$$

సంఖ్యాత్మక గుణకాలున్న ఒక శ్రేణిని ప్రత్యావర్తనం చేసినప్పుడు, సమీకరణం (5) నుంచి గుణకాలను గుణించడం మంచిది. గణించిన ఈ గుణకాలను (4) వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తాం.

ఇప్పుడు న్యూటన్, స్టిర్లింగ్, బెస్సెల్ సూత్రాలను ఘాతశ్రేణి రూపంలో వ్రాసి, $a_0, a_1, \ldots, a_4$ విలువలను వ్రాద్దాం. ఇక్కడ నాల్గవ తరగతి భేదాలతో సరిపెట్టాం. కాని, కావాలంటే ఇంకా ఎక్కువ తరగతి భేదాలకు కూడా దీన్ని వ్యాపింపజేయవచ్చు.

(a) న్యూటన్ పురోగమన సూత్రం

$$\begin{aligned}
y &= y_0 + u\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{6}\,\Delta^3 y_0\\
&\quad + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{24}\,\Delta^4 y_0\\
&= y_0 + \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right)u\\
&\quad + \left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{3} + 11\,\frac{\Delta^4 y_0}{24}\right)u^2\\
&\quad + \left(\frac{\Delta^3 y_0}{6} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right)u^3 + \frac{\Delta^4 y_0}{24}u^4.
\end{aligned}$$

ఇక్కడ

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0,\\
a_1 &= \Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4},\\
a_2 &= \frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_0}{3} + 11\,\frac{\Delta^4 y_0}{24},
\end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{6} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}$$

$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_0}{24}$$

(b) స్టెర్లింగ్ సూత్రం

$$y = y_0 + u\,\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2}\,\Delta^2 y_{-1} +$$

$$\frac{u(u^2-1)}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{24}\,\Delta^4 y_{-2}$$

$$= y_0 + \left(\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{12}\right)u$$

$$+ \left(\frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} - \frac{\Delta^4 y_{-2}}{24}\right)u^2 + \left(\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{12}\right)u^3 + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{24}\,u^4.$$

ఇక్కడ $a_0 = y_0,$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta y_{-1} + \Delta y_0\right) - \frac{1}{12}\left(\Delta^3 y_{-2} - \Delta^3 y_{-1}\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\,\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{24}\,\Delta^4 y_{-2},$$

$$a_3 = \frac{1}{12}\left(\Delta^3 y_{-2} - \Delta^3 y_{-1}\right),$$

$$a_4 = \frac{1}{24}\,\Delta^4 y_{-2}.$$

(c) బెస్సెల్ సూత్రం

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} + v\Delta y_0 + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{2}\,\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2}$$

$$+ \frac{v\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)}{6}\,\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)\left(v^2 - \frac{9}{4}\right)}{24}\,\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_0 + y_1\right) - \frac{1}{16}\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right)$$

$$+ \frac{3}{256}\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right) + \left(\Delta y_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 y_{-1}\right)v +$$

$$\left[\frac{1}{4}\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right) - \frac{5}{96}\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right)\right]v^2$$

$$+ \frac{1}{16}\Delta^3 y_{-1}\,v^3 + \frac{1}{48}\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right)v^4.$$

ఇక్కడ

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(y_0 + y_1\right) - \frac{1}{16}\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right)$$

$$+ \frac{3}{256}\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right)$$

$$a_1 = \Delta y_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 y_{-1},$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\left(\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0\right) - \frac{5}{96}\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right)$$

$$a_3 = \frac{1}{16}\Delta^3 y_{-1},$$

$$a_4 = \frac{1}{48}\left(\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}\right).$$

ఉదా 4 : $\sin hx = 62$ అయితే శ్రేణి ప్రత్యావర్తనం పద్ధతిద్వారా క్రింది దత్తాంశం ఉపయోగించి x కనుక్కోండి.

x	$y = \sin hx$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4.80	60.7511			
		0.6106		
4.81	61.3617		0.0062	
		0.6168		0
4.82	61.9785		0.0062	
		0.6230		0
4.83	62.6015		0.0062	
		0.6292		
4.84	63.2307			

శ్రేణి ప్రత్యావర్తనం ద్వారా ఇచ్చిన లెక్కను సాధించడానికి స్టెర్లింగ సూత్రాన్ని వాడదాం.

ఇక్కడ $a_0 = y_0 = 61.9785,$

$$a_1 = 0.6199$$

$$a_2 = \frac{.0062}{2} = .0031,$$

$$a_3 = a_4 = 0.$$

$$\because \; y = 62,$$

$$y - a_0 = 62 - 61.9785 = 0.0215$$

$$\therefore \frac{y - a_0}{a_1} = \frac{0.0215}{06199} = 0.034683$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{0.0031}{0.6199} = 0.005001.$$

కాబట్టి $c_1 = -.005001,$

$$c_2 = 2(.005001)^2 = 0.00005002$$

$$c_3 = 0 \text{ Practically}$$

$$\therefore u = 0.034683 - 0.005001\,(0.034683)^2 = 0.0347$$

$$\therefore x = 4.82 + 0.01\,(0.0347) = 4.8203.$$

5.6 విలోమ అంతర్వేశనం ద్వారా బీజీయ సమీకరణ మూలాలు కనుక్కోవడం

$f(x) = 0$ సమీకరణ వాస్తవ మూలం ఒకటి వివర్జితమైందనుకోండి (located) ఈ మూలం సామీప్యంలో ఒక పరిమిత అంతరంలో $f(x)$ ను గణించి పట్టికలో రాసి, కేంద్రీయ భేదాలతో సూచించవచ్చు. ఇది, ఎక్కువ డిగ్రీపదాల విలువ ఎక్కువగాలేని, ఒక బహుపది సమీకరణాన్ని ఇస్తుంది. దీనినుంచి, కావలసిన మూలానికి దగ్గర ఉజ్జాయింపు వస్తుంది. ఈ ఉజ్జాయింపును పునరుక్త పద్ధతి ద్వారా మెరుగు పర్చవచ్చు. ఈ పద్ధతిని క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా వివరిద్దాం.

ఉదా 5 : విలోమ అంతర్వేశనం ద్వారా $x^3 + x - 3 = 0$ సమీకరణానికి 1.2, 1.3 ల మధ్యనున్న వాస్తవ మూలం కనుక్కోండి.

x	X	$y = (x^2+x-3)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	–0.2	–1				
			0.431			
1.1	–0.1	–0.569		0.066		
			0.497		0.006	
1.2	0	–0.072		0.072		0
			0.569		0.006	
1.3	0.1	0.497		0.078		
			0.647			
1.4	0.2	1.144				

ఇచ్చిన సమీకరణ మూలం $1.2 + 0.1\,u$; u కనుక్కోవలసిన రాశి.

1.2 ను మూలబిందువుగా తీసుకొని; భేద అంతరాన్ని 0.1 గా తీసుకొని, స్టెర్లింగ్ సూత్రం

$$y = y_0 + u\,\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{u^2}{2}\,\Delta^2 y_{-1} + \frac{u\,(u^2-1)}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}$$

వాడితే

$$0 = -0.072 + u\,\frac{.569 + .497}{2} + \frac{u^2}{2}\,(0.072) + \frac{u\,(u^2-1)}{6}\,(.006)$$

$$= -.072 + .532\,u + .036\,u^2 + .001\,u^3$$

ఈ మూడొవ తరగతి సమీకరణాన్ని పారంపరిక ఉజ్జాయింపు పద్ధతిని సాధిస్తాము. దీన్ని

$$u = \frac{.072}{.532} - \frac{.036}{.532}u^2 - \frac{.001}{.532}u^3. \qquad \ldots (6)$$

మొదటి ఉజ్జాయింపు,

$$u_1 = \frac{.072}{.532} = 0.1353$$

రెండొవ ఉజ్జాయింపుకు u_1 ను (6) సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపిస్తాము.

$$u_2 = .1353 - .0677\,(.1353)^2 - \frac{.001}{.532}\,(.1353)^3$$

$$= .134 \text{ సుమారుగా}$$

$$\therefore \text{ వాస్తవ మూలం } = 1.2 + 0.1 \times 0.134 - 1.2134.$$

5.7 సారాంశము

ప్రమేయపు విలువలు ఇస్తే, ఇచ్చిన విలువల మధ్య స్వతంత్ర చలరాశి విలువను అంచనా వేయడాన్ని విలోమ అంతర్వేశనం అంటున్నాం. లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రాన్నుపయోగించి, పారంపరిక ఉజ్జాయింపు పద్ధతి నుపయోగించి, శ్రేణి ప్రత్యావర్తనం ద్వారాను విలోమ అంతర్వేశన సమస్యను సాధించాం. ఇంకా విలోమ అంతర్వేశన పద్ధతి ద్వారా, బీజీయ సమీకరణాలను సాధించడం కూడా చూశాము.

5.8 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

1. లెగ్రాంజ్ సూత్రం వాడి $u_x = 0.163$ అనుగుణంగా x విలువ కనుక్కోండి.

x :	80	82	84	86	88
u_x :	0.134	0.154	0.176	0.200	0.227

[Ans : $x = 82.8$]

2. $\cosh x = 1.285$ అని ఇచ్చారు. పారంపరిక ఉజ్జాయింపు పద్ధతి ద్వారా (బెస్సల్ సూత్రానికి) విలోమ అంతర్వేశనం చేసి క్రింది దత్తాంశానికి x కనుక్కోండి.

x :	0.736	0.737	0.738	0.739	0.740	0.741
$y = \cosh x$:	1.2832974	1.2841023	1.2849085	1.2857179	1.2865247	1.2873348

[Ans : $x = 0.738110$]

3. క్రింది దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి $x = \log_{10} x$ ను సాధించండి.

x :	1.35	1.36	1.37	1.38
$\log_{10} x$:	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399

[Ans : $x = 1.37136$]

4. స్టైర్లింగ్ సూత్రానికి విలోమ అంతర్వేశనం ద్వారా, $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ సమీకరణానికి 2.1, 2.2 ల మధ్యమున్న వాస్తవ మూలాన్ని కనుక్కోండి.

[Ans : $x = 2.1027751$]

బ్లాక్ – 2 : సమీకరణాల సాధనలు

ఉపోద్ఘాతం

సాధారణ సమీకరణాలను (4 వ తరగతి వరకు) సాధించడం క్రిందటి తరగతులలో నేర్చుకొని ఉన్నారు. అయితే $ax + b \log x = c$, $a e^{-x} + b \tan x = 5$ మొదలగునటువంటి బీజాతీత (transcendental) సమీకరణాలను సాధించడం నేర్చుకోలేదు. ఇటువంటి బీజాతీత సమీకరణాల సాధనను వాటి గుణకాలలో కనుక్కోవడానికి ఒక ప్రత్యేకమైన పద్ధతంటూ ఏదీ లేదు. అయితే సమీకరణాల గుణకాలు కేవలం సంఖ్యలే అయితే అటువంటి సమీకరణాల సాధనను మనకు కావలసిన యదార్థత వరకు గణించడానికి కొన్ని పద్ధతులున్నాయి.

6వ ఖండికలో సంఖ్యలు గుణకాలుగాగలిగిన సమీకరణాల సాధనలను కనుక్కోవడానికి కొన్ని ముఖ్యమైన పద్ధతులను గురించి చర్చిస్తాము. ఖండిక–7లో ఏకకాలిక సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించడం గురించి చర్చిస్తాము. భేద సమీకరణాలు, వాటిని సాధించడం గురించి ఖండిక–8లో చర్చిస్తాము.

ఖండిక – 6 : బీజీయ, బీజాతీత సమీకరణాల సాధనలు

విషయసూచిక

6.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు : (i) $f(x) = 0$ అనే రూపంలోనున్న సమీకరణానికి (a) సమద్విఖండన పద్ధతి (b) రెగ్యులా ఫాల్సి పద్ధతి (c) న్యూటన్ – రాఫ్సన్ పద్ధతి (d) పునరుక్త విధానాల ద్వారా ఒక వాస్తవ మూలం కావలసిన యథార్థతకు కనుక్కోగలగాలి (ii) పైన తెలిపిన అన్ని పద్ధతుల జ్యామితీయ వివరణ తెలుసుకోగలగాలి (iii) న్యూటన్ – రాఫ్సన్, పునరుక్త విధానాల ద్వారా రెండు ఏకకాలిక సమీకరణాలు $\phi(x, y) = 0; \psi(x, y) = 0$ సాధనాలు కనుక్కోగలగాలి.

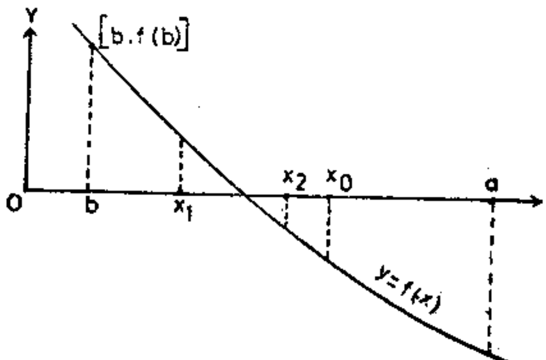
6.2 ఉపోద్ఘాతం

ఒక సమీకరణం $ax^2 + bx + c = 0$ ను సాధించడం మీకు తెలుసు. దీని సాధనలు $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ అని కూడా నేర్చుకొన్నారు. అయితే సాధారణ త్రిఘాత సమీకరణం (cubic equation) సాధించడం కొంచెం కష్టమే. సాధారణ నాల్గవ తరగతి సమీకరణ సాధన ఇంకా కష్టమే. అయితే 4 కంటె ఎక్కువ తరగతిగల సాధారణ సమీకరణ సాధనకు ఒక సూత్రం అంటూ ఏదీ లేదు అని ఒక సిద్ధాంతం తెలియజేస్తుంది. అందుచేత, ఏదోకొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో తప్ప, రెండు కన్నా ఎక్కువ తరగతి బహుపది సమీకరణాల సాధనకు సంఖ్యాత్మక పద్ధతులనవలంబిస్తాము. బీజాతీత ప్రమేయాలు (e^x, $\log x$, $\sin x$, $\tan x$ వంటివి) కలిగిన సమీకరణాలకు వైశ్లేషిక (analytic) సాధనలు అరుదు, అందుకని అటువంటి సమీకరణ సాధనల కొరకు సంఖ్యాత్మక పద్ధతులను ఆశ్రయించక తప్పదు.

6.4 సమద్విఖండన పద్ధతి (Bisection Method)

మనము పైన చెప్పిన సిద్ధాంతములో $f(a)$ ఋణాత్మకము, $f(b)$ ధనాత్మకము అనుకొందాము. అపుడు మూలము a, b ల మధ్య ఉంటుంది. దాని సుమారు విలువ $x_0 = \frac{a+b}{2}$ అనుకొందాము. $f\left(x_0\right) = 0$ అయితే $f(x) = 0$ సమీకరణానికి x_0 మూలము అనుకొందాము. అలాకాకపోతే మూలము x_0, b మధ్యకాని x_0, a మధ్యకాని ఉంటుంది. ఇది $f\left(x_0\right)$ ఋణాత్మకమా లేక ధనాత్మకమా అన్న దానిపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఇదివరకు లాగా అంతరాన్ని సమద్విఖండన చేసి పై పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాము. దీనిని మనకు కావలసిన యదార్థత వచ్చేవరకు ఉపయోగిస్తాము. ఈ పద్ధతిని పటము 3లో చూపాము.



పటం – 3 సమద్విఖండన పద్ధతి

మాదిరి 3 : $x^3 - x - 1 = 0$ సమీకరణానికి సమద్విఖండన పద్ధతి ద్వారా ఒక వాస్తవ మూలమును కనుగొనండి.

ఇచ్చిన సమీకరణములో

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \text{ గా వ్రాస్తాము.}$$

$f(1)$ ఋణాత్మకము, $f(2)$ ధనాత్మకము కాబట్టి వాస్తవమూలము 1, 2 మధ్య ఉంటుంది. అందువలన $x_0 = \frac{3}{2}$ గా తీసుకొందాము. అపుడు

$$f\left(x_0\right) = \frac{7}{8} \text{ అవుతుంది. ఇది ధనాత్మకము.}$$

అందువలన మూలము 1, 1.5 ల మధ్య ఉంటుంది.

$$x_1 = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25 \text{ అవుతుంది.}$$

$f\left(x_1\right) = \frac{-19}{64}$ కాబట్టి, 1.25, 1.5 ల మధ్య ఉంటుంది అని చెప్పవచ్చు. అందువలన

$$x_2 = \frac{1.25 + 1.5}{2} = 1.375 \text{ అవుతుంది.}$$

ఈ పద్ధతిని పునావృతము చేస్తే పారంపరిక సుమారు విలువలు వస్తాయి.

$x_3 = 1.3125, x_4 = 1.34375, \ x_5 = 1.328125$ etc.

6.5 రెగ్యులా – ఫాల్సి పద్ధతి

ఇచ్చిన సమీకరణమునకు వాస్తవ మూలమును కనుగొనుటకు ఇది ప్రాచీన పద్ధతి. ఇది సమద్విఖండన పద్ధతి వలె ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిలో రెండు బిందువులను x_0, x_1 లను $f(x_0), f(x_1)$ లకు విభిన్న గుర్తులు ఉండేలా తీసుకొంటాము. $y=f(x)$ గ్రాఫు ఈ రెండు బిందువు మధ్య X - అక్షాన్ని ఖండిస్తుంది. కాబట్టి, ఒక మూలము ఈ రెండు బిందువుల మధ్య ఉంటుంది. $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)]$ బిందువులను కలిపే రేఖ సమీకరణము

$$\frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \qquad \dots (1)$$

రేఖాపరముగా,

మూలమునకు సుమారు విలువ $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)]$ బిందువులను కలిపే చాపము X - అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు అవుతుంది. $y=0$,(1)లో వ్రాస్తే మనకు కావలసిన ఖండన బిందువు వస్తుంది.

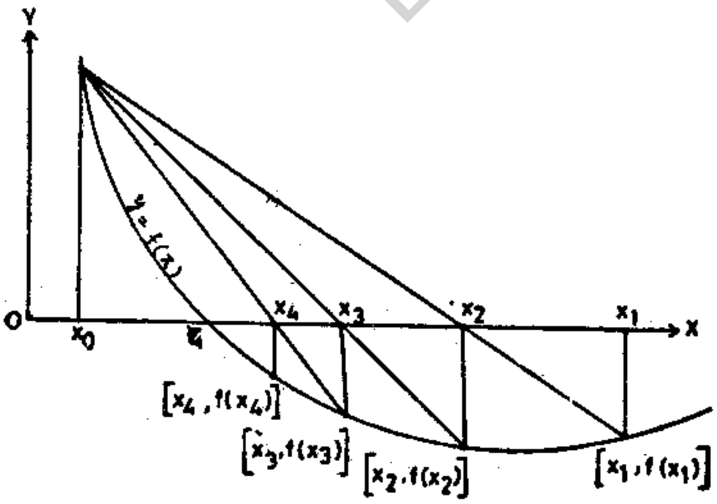
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0)$$

అందుచే రెండవ సుమారు విలువ

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0)$$

అవుతుంది.

$f(x_2), f(x_0)$ విభిన్న గుర్తులు ఉంటే మూలము x_0, x_2 ల మధ్య ఉంటుంది. (2) వ సమీకరణంలో x_2 బదులు x_1 ను వ్రాస్తాము. ఈ పద్ధతిని మూలమునకు కావలసిన యదార్థత వచ్చేవరకు తిరిగి ఉపయోగిస్తాము.



పటం – 4 రెగ్యులా–ఫాల్సీ పద్ధతి

మాదిరి 4 : $x^3 - 2x - 5 = 0$ సమీకరణానికి వాస్తవ మూలమును కనుగొనండి (Walli's Equation).

ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ రూపములో వ్రాద్దాము.

$f(2) = -1, f(3) = 16$ అని గమనించవచ్చు. (2) వ సమీకరణమునుండి

$$x_2 = 2 + \frac{1}{17} = 2.059$$

$f(x_2) = -0.386$ కాబట్టి మూలము 2.059, 3 ల మధ్య ఉంటుంది. (2) వ సమీకరణమును మరల ఉపయోగిస్తే

$$x_3 = 2.059 + \frac{0.386}{16.386}(3 - 2.059) = 2.0812$$

పై పద్ధతిని పునరావృతముచేసి, x_4, x_5 విలువలను కనుగొనవచ్చు.

$$x_4 = 2.0904,$$

$$x_5 = 2.0934, \ldots$$

ఖచ్చిత విలువ 2.0945 ... x_5 విలువ రెండు దశాంశ స్థానముల వరకు ఖచ్చిత విలువనిస్తుంది. ఈ పద్ధతి వలన చాలా నెమ్మదిగా యదార్థ విలువను కట్టగలము. ఈ ఉదాహరణను Walli 1685 లో న్యూటన్-రాఫ్సన్ (Newton-Raphson) పద్ధతిని వివరించుటకు ఇచ్చినాడు. ఈ సమీకరణము వాస్తవ మూలమును 10 దశాంశ స్థానములవరకు తెలియును.

6.6 న్యూటన్ – రాఫ్సన్ పద్ధతి

ఇప్పటి వరకు చెప్పిన పద్ధతుల ద్వారా కనుగొన్న ఫలితములను ఈ పద్ధతి ద్వారా మెరుగుపరచవచ్చు. $f(x) = 0$ సమీకరణమునకు ఉజ్జాయింపు మూలము x_0 అనుకొందాము. $x_1 = x_0 + h$ ఖచ్చిత మూలము అనుకొంటే $f(x_1) = 0$ అవుతుంది. $f(x_0 + h)$ ని టేలర్ (Taylor) శ్రేణిలో వివరిస్తే

$$f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots = 0$$

రెండు, ఆపై ఎగువ అవకలన గుణకాలను వదిలివేస్తే

$$f(x_0) + h f'(x_0) = 0$$

దీని నుండి $h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ వస్తుంది.

అందువలన x_0 కంటే మెరుగు ఉజ్జాయింపు x_1

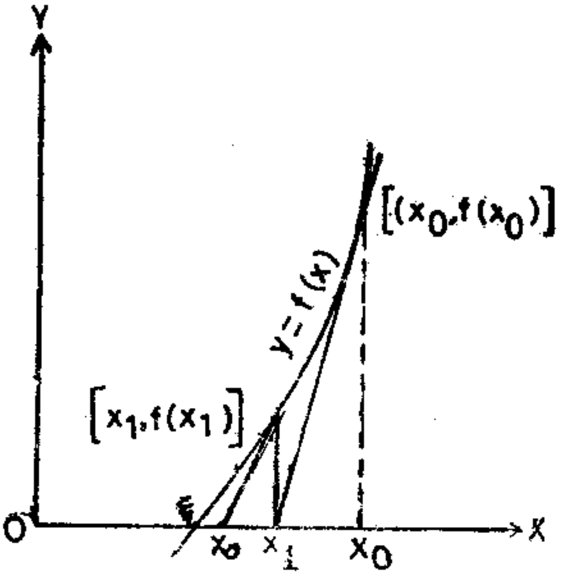
ఇక్కడ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ అవుతుంది.

పారంపరిక ఉజ్జాయింపులు $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ అవుతాయి.

ఇక్కడ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,

ఇదే న్యూటన్-రాఫ్సన్ సూత్రము

జ్యామితీయముగా పటము 5లో వివరించబడినది.



పటం – 5 న్యూటన్-రాఫ్సన్ పద్ధతి

మాదిరి 5 : న్యూటన్-రాఫ్సన్ పద్ధతిని ఉపయోగించి $x^3 - 3x - 5 = 0$ సమీకరణమునకు మూలమును కనుగొనండి.

$f(x) = x^3 - 3x - 5, f'(x) = 3x^2 - 3$.

న్యూటన్-రాఫ్సన్ సూత్రము

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3}$$ వస్తుంది.

$f(2) = -3, f(3) = 13$ కాబట్టి, 2, 3 మధ్య ఒక మూలము ఉంటుంది. $x_0 = 3$ తీసుకొందాము.

పారంపరంగా $x_1 = 3 - \frac{13}{24} = 2.46$,

$x_2 = 2.295,\ x_3 = 2.279,\ x_4 = 2.279$ వస్తాయి.

6.7 పునరుక్త విధానము

$f(x) = 0$ అనే సంఖ్యాక సమీకరణమును $x = \phi(x)$ రూపములో వ్రాయగలిగితే, వాస్తవ మూలములను పునరుక్త విధానము ద్వారా కనుగొంటాము. మొదట గ్రాఫునుండిగాని, ఇతర పద్ధతుల ద్వారాగాని మూలమునకు ఉజ్జాయింపు విలువ x_0 కనుగొంటాము. దీనికి మెరుగైన ఉజ్జాయింపు విలువ $x^{(1)}$ ను

$x^{(1)} = \phi(x_0)$ సమీకరణము ద్వారా వస్తుంది.

పారంపరిక ఉజ్జాయింపులు ఈ క్రింది సమీకరణములు నుండి వస్తాయి.

$$x^{(2)} = \phi\left(x^{(1)}\right),$$

$$x^{(3)} = \phi\left(x^{(2)}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{(n)} = \phi\left(x^{(n-1)}\right).$$

$|\phi(x)| < 1$ అయినపుడు పారంపరిక ఉజ్జాయింపులు అభిసరణము చెందుతాయి. $\phi'(x)$ విలువ తగ్గినకొలది అభిసరణము త్వరగా చెందుతుంది.

ఇక్కడ ఒక విషయమును గమనించాలి. పారంపరిక ఉజ్జాయింపులు అభిసరణము చెందేలా $x = \phi(x)$ రూపాన్ని $f(x) = 0$ కి తీసుకోవాలి. ఎందుకంటే కొన్ని రూపాల్లో ఉజ్జాయింపులు అభిసరణము చెందక పోవచ్చు.

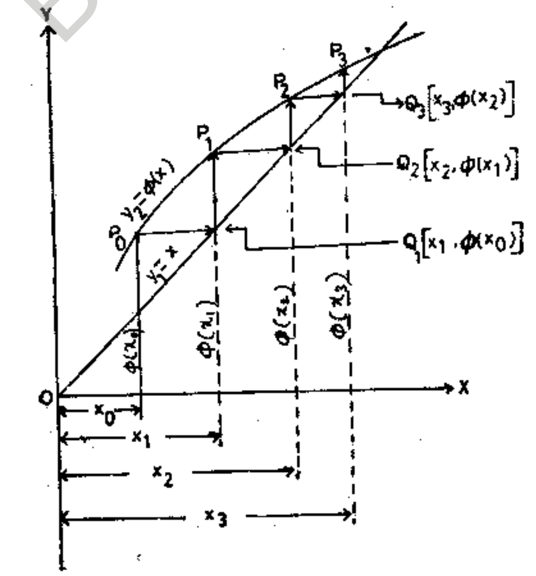
జ్యామితీయముగా పునరుక్త విధానాన్ని పరిశీలిద్దాము. సౌలభ్యము కొరకు మూలము యొక్క పారంపరిక ఉజ్జాయింపులను $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ లచే సూచిస్తాము.

$x_1 = \phi\left(x_0\right),\ x_2 = \phi\left(x_1\right), x_3 = \phi\left(x_2\right) \ldots$

సంబంధాలను క్రింది జ్యామితీయ నిర్మాణములో బిందువులుగా చూపించగలము. పటం 6లో చూపిన విధముగా $y_1 = x, y_2 = \phi(x)$ రేఖాచిత్రములను గీయుము.

అభిసరణానికి $|\phi'(x)| < 1$ కాబట్టి x_0 యొక్క సామీప్యంలో $y_2 = \phi(x)$ అనే వక్రము వాలు $45°$ కన్న తక్కువ ఉండవలెను. రేఖాచిత్ర నిర్మాణము నుండి దీనిని గమనిస్తాము.

పునరుక్త విధాను యొక్క అభిసరణమును గమనించుటకు $\phi\left(x_0\right)$ ను గీయుము. $y_1 = x$ అనే సరళరేఖను $Q_1\left(x_1, \phi\left(x_0\right)\right)$ అను బిందువువద్ద ఖండించేటట్లు P_0 అను బిందువు నుండి X అక్షానికి సమాంతరముగా ఒక సరళరేఖను గీయుము. Q_1 అనే బిందువు మొదటి పునరుక్త సమీకరణమును $x_1 = \phi\left(x_0\right)$ జ్యామితీయముగా సూచిస్తుందని గమనిస్తాము.



పటం – 6 పునరుక్త విధానము

పటం 6లో బాణములతో చూపిన విధముగా $Q_1 P_1, P_1 Q_2, Q_2 P_2, P_2 Q_3$ మొదలైనవి గీయుము. ఈ పునరుక్త విధానములు $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ మొదలైన బిందువులు $y_1 = x, y_2 = \phi(x)$ అను వక్రాల ఖండన బిందువును సమీపిస్తాయి.

Q ల యొక్క నిరూపకాలు సంబంధిత పునరుక్త సమీకరణములను తృప్తిపరుస్తాయి అని గమనించుము.

x_0 యొక్క సామీప్యములో వాలు $45°$ కంటే ఎక్కువ ఉండేలా $y_1 = \phi(x)$ అనే వక్రాన్ని గీసి పైన చెప్పిన నిర్మాణ విధానాన్ని విద్యార్థి అనుసరిస్తే, $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ బిందువులు $y_1 = x_1, y_2 = \phi(x)$ అనే రేఖాచిత్రాల ఖండన బిందువును సమీపించవని అంటే పారంపరిక ఉజ్జాయింపులు $x_1, x_2, \ldots$ మొదలైనవి పునరుక్త విధానముతో అభిసరణము చెందవని గమనిస్తాడు.

మాదిరి 6 : పునరుక్త విధానాన్ని అనుసరించి

$2x - \log_{10} x = 7$ కు వాస్తవ మూలాన్ని కనుక్కోండి.

$y_1 = 2x - 7, y_2 = \log_{10} x$ రేఖాచిత్రముల ఖండనము నుండి, ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఉజ్జాయింపు మూలము 3.8 అని కనుగొంటాము.

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\log_{10} 3.8 + 7\right) = 3.79,$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\log_{10} 3.79 + 7\right) = 3.7893,$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\log_{10} 3.7893 + 7\right) = 3.7893.$$

$x^{(2)}, x^{(3)}$ లు సమానము కాబట్టి, ఈ పునరుక్త విధానాన్ని పునరావృతం చేయనక్కరలేదు.

ఈ $x^{(3)}$ విలువనే అనగా 3.7893 ని 4 దశాంశాల వరకు ఖచ్చిత విలువగా తీసుకుంటాము.

6.8 పలు అజ్ఞాత రాసులలో సమకాలిక సమీకరణములు (Simultaneous Equations in Several Unknowns)

పలు అజ్ఞాతరాసులలో బీజాతీత, బీజీయ సమీకరణములో సమకాలిక సమీకరణముల వాస్తవ మూలములను న్యూటన్-రాఫ్సన్ పద్ధతి ద్వారాగాని, పునరుక్త విధానము ద్వారా గాని కనుగొనవచ్చు. రెండు అజ్ఞాతరాశులు ఉన్న సందర్భంలో ఈ రెండు పద్ధతుల గురించి సంగ్రహముగా వివరిస్తాము. ఈ రెండు పద్ధతులను పెక్కు అజ్ఞాత రాసులకు విస్తరించుటలో విద్యార్థికి ఎటువంటి ఇబ్బంది ఉండదు.

(i) న్యూటన్-రాఫ్సన్ పద్ధతి :

$$\phi(x, y) = 0$$

$$\psi(x, y) = 0$$

సరణి మూలమునకు ప్రారంభ ఉజ్జాయింపు (x_0, y_0) అనుకొందాము. $(x_0 + h, y_0 + k)$ పై సరణికి మూలము అయితే

$$\phi\left(x_0+h,\, y_0+k\right) = 0$$

$$\psi\left(x_0+h,\, y_0+k\right) = 0$$

కావాలి, టేలర్ శ్రేణిలో వ్రాస్తే

$$\phi_0 + h\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\right) + k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\right) + \ldots = 0,$$

$$\psi_0 + h\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right) + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_0}\right) + \ldots = 0$$

ఇక్కడ $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_0} = \left[\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right]_{x = x_0,\, y = y_0},$

$$\phi_0 = \phi\left(x_0, y_0\right)$$

రెండవ, ఆపై ఎగువ పదాలను వదిలివేస్తే

$$h\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 = -\phi_0$$

$$h\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 = -\psi_0$$

h, k లను పై సమీకరణముల నుండి సాధించవచ్చు. క్రొత్త ఉజ్జాయింపులు $x_1 = x_0 + h,\, y_1 = y_0 + k$ లు అవుతాయి. ఈ పద్ధతిని కావలసిన యదార్థత వచ్చేవరకు పునరావృతము చేస్తాము.

(ii) పునరుక్త విధానము :

$$\phi(x, y) = 0,$$

$$\psi(x, y) = 0$$

సమీకరణముల సరణిని

$$x = F(x, y)$$

$$y = G(x, y)$$

రూపములో వ్రాయవచ్చు అని అనుకొందాము. ఇక్కడ F, G లు అభిసరణ నియమాలను

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < 1$$

$\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\dfrac{\partial G}{\partial y}\right| < 1$ తృప్తిపరుస్తాయి.

$\left(x_0, y_0\right)$ ప్రారంభ ఉజ్జాయింపు అనుకొందాము. అపుడు పారంపరిక ఉజ్జాయింపుల అనుక్రమము

$$x_1 = F\left(x_0, y_0\right),\quad y_1 = G\left(x_1, y_0\right)$$

$$x_2 = F\left(x_1, y_1\right),\quad y_2 = G\left(x_2, y_1\right)$$

$$x_3 = F(x_2, y_2), \quad y_3 = G(x_3, y_2)$$

మొదలగునవి x, y విలువలు కావలసిన యధార్థతకు అభిసరణ చెందే వరకు ఈ అనుక్రమమును తీసుకోవలెను.

మాదిరి 7 : న్యూటన్-రాప్సన్ పద్ధతిని ఉపయోగించి

$$x^2 - y^2 = 4$$

$x^2 + y^2 = 16$ సమీకరణములకు ఒక వాస్తవ మూలమును కనుగొనండి.

మొదటి ఉజ్జాయింపు విలువ $x_0 = y_0 = 2.828$

ఇక్కడ $\phi = x^2 - y^2 - 4, \psi = x^2 + y^2 - 16$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x, \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x, \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2y,$$

$$h - k = 0.707$$

$$h + k = 0$$

$h = -k = 0.354$ రెండవ ఉజ్జాయింపు

$$x_1 = x_0 + h = 3.182,$$

$$y_1 = y_0 + k = 2.474.$$

(x_0, y_0) బదులు (x_1, y_1) వ్రాసి పై పద్ధతిని పునరావృతము చేస్తే, h, k విలువలు $h = -.0204$, $k = -0.0242$ వస్తాయి. $x_2 = 3.162, y_2 = 2.450$.

మాదిరి 8 : పునరుక్త విధానములో క్రింది సమీకరణములకు వాస్తవ సాధనను కనుగొనండి.

$$x + 3\log_{10} x - y^2 = 0$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

ప్రారంభ ఉజ్జాయింపు $x_0 = 3.4, y_0 = 2.2$ గా తీసుకోండి.

పై సమీకరణములను క్రింది రూపములో వ్రాస్తాము.

$$\left.\begin{aligned} x &= y^2 - 3\log_{10} x, \\ y &= \frac{1}{x} + 2x - 5 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (A)$$

$$x^{(1)} = (2.2)^2 - 3\log_{10} 3.4 = 3.25,$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{3.25} + 2(3.25) - 5 = 1.81,$$

ఖండిక – 7 : ఏకకాలిక సమీకరణ వ్యవస్థ సాధనలు

విషయ సూచిక

7.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరవాత, ఒక ఏకకాలిక సమీకరణ వ్యవస్థ ఇస్తే, క్రేమర్ పద్ధతి, మాత్రికా విలోమ పద్ధతి, గాస్ జోర్డాన్ పద్ధతి (ప్రత్యక్షపద్ధతులు) , జాకోబి, గాస్-సీడెల్ పద్ధతులలో (పరోక్ష పద్ధతులు) ఏదో ఒక అనువైన పద్ధతినుపయోగించి ఇచ్చిన వ్యవస్థను సాధించాలి.

7.2 ఉపోద్ఘాతం

ఈ ఖండికలో ఏక కాలిక సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించడానికి వివిధ పద్ధతులను తెలియజేసాము. వీటిలో కొన్ని సాధారణ పద్ధతులు మరికొన్ని, కొన్ని సమస్యలకు మాత్రమే ఉపయోగపడతాయి. ఇక్కడ విద్యార్థులందరికి, నిర్ధారకాలు, మాత్రికల మౌలిక ధర్మాలు తెలుసునని ఊహించి వాటి గురించి పెద్దగా చర్చించడం లేదు.

7.3 క్రేమర్ పద్ధతి

ఏక కాలిక సమీకరణాల సాధనకు సులభమైన పద్ధతిని గాబ్రియల్ క్రేమర్ (1704-1752) అనే స్విస్ గణితవేత్త కనుకొన్నాడు.

క్రేమర్ సూత్రాన్ని రాబట్టడానికి, క్రింది వ్యవస్థను తీసుకోండి.

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (1)$$

ఈ వ్యవస్థ యొక్క గుణకముల నిర్ధారకము

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ అయితే}$$

$$x\,\Delta = \begin{vmatrix} xa_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$C_1 + y\,C_2 + z\,C_3$

$$x\,\Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ((1) నుండి)}$$

అందుచే

$$x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \Delta = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (\Delta \neq 0 \text{ అయితే}) \qquad \ldots (2)$$

అదే విధముగా

$$y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} + \Delta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots (3)$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \Delta = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad \ldots (4)$$

గమనికలు :

(i) $\Delta \neq 0$ అయినపుడు మాత్రమే (1) సమీకరణములకు క్రేమెర్ సూత్రము నుండి ఏకైక సాధనను కనుగొనవచ్చు.

(ii) $\Delta = 0$ ఏదైన $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$ అయినపుడు ఇచ్చిన సమీకరణములకు సాధన ఉండదు.

(iii) $\Delta = 0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ లు సున్న అయితే ఇచ్చిన సమీకరణములకు అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

ఉదా. *1* : క్రేమెర్ సూత్రమును ఉపయోగించి క్రింది సమీకరణములు సాధించండి.

$$3x + y + 2z = 3$$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4$$

ఇక్కడ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(-3+2) - 2(1-4) + (-1+6) = 8$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}[3(-3+2) + 3(1-4) + 4(-1+6)] = 1$$

ఇదే విధముగా,

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$x = 1, y = 2, z = 1.$

ఉదా. *2* : λ యొక్క ఏ విలువలకు, క్రింది సమీకరణములు నిలకడగా ఉంటాయి.

$$(\lambda - 1)x + (3\lambda + 1)y + 2\lambda z = 0$$

$$(\lambda - 1)x + (4\lambda - 2)y + (\lambda + 3)z = 0$$

$$2x + (3\lambda + 1)\, y + 3\,(\lambda - 1)\, z \;=\; 0$$

$x : y : z$ నిష్పత్తులను కనుక్కోండి.

దత్త సమీకరణములు $\Delta = 0$ అయినపుడు నిలకడగా ఉంటాయి.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda - 1 & 4\lambda - 2 & \lambda + 3 \\ 2 & 3\lambda + 1 & 3\,(\lambda - 1) \end{vmatrix} = 0$$

అంటే

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda + 1 & 2\lambda \\ 0 & \lambda - 3 & 3 - \lambda \\ 2 & 3\lambda + 1 & 3\,(\lambda - 1) \end{vmatrix} = 0 \left(R_2 - R_1\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda + 1 & 5\lambda + 1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 2 & 3\lambda + 1 & 6\lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \left(C_3 + C_2\right)$$

$$(\lambda - 3)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 5\lambda + 1 \\ 2 & 2\,(3\lambda - 1) \end{vmatrix} = 0$$

$2\,(\lambda - 3)\,[(\lambda - 1)\,(3\lambda - 1) - (5\lambda + 1)] = 0$

$6\lambda\,(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda = 0$ లేక 3.

(i) $\lambda = 0$ అయితే, దత్త సమీకరణములు

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -x - 2y + 3z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$$ అవుతాయి.

రెండు, మూడు సమీకరణములను సాధిస్తే

$$\frac{x}{6 - 3} = \frac{y}{6 - 3} = \frac{z}{-1 + 4}$$

$x = y = z.$

(ii) $\lambda = 3$ అయితే అన్ని సమీకరణములు సమానమవుతాయి.

ఉదా. 3 :

$$x - 2y + 3z = 0$$
$$2x + y - 4z = 0$$
$$x - y + z = 0$$

సమీకరణములకు శూన్యేతర సాధనలు ఉన్నాయా? ఉంటే వాటిని కనుగొనండి.

$x = y = z = 0$ పై సమీకరణములకు ఒక సాధన అవుతుందని సులువుగా గమనించవచ్చు. ఇటువంటి సాధనను శూన్య సాధన అంటాము. మిగిలిన సాధనలను శూన్యేతర సాధనలు అంటాము. సమఘాత సరళ సమీకరణములకు శూన్యేతర సాధనకు $\Delta = 0$ అవ్వాలి.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \left(C_1 + C_2, C_3 + C_2\right)$$

$$= (-1)(-3) - 3 = 0.$$

అందుచే దత్త సమీకరణములకు శూన్యేతర సాధనలు ఉంటాయి. ఈ సాధనలను కనుగొనుటకు దత్త సమీకరణములలో ఏ రెండింటినైన సాధించవలెను.

$$\frac{x}{1-4} = \frac{y}{-4-2} = \frac{z}{-2-1}.$$

$\therefore x = z$ మరియు $y = 2z$ అవుతాయి.

ఇవి మొదట సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తాయి. z కు విభిన్న విలువలు ఇస్తే శూన్యేతర సాధనలు అనంతముగా ఉంటాయి.

7.4 మాత్రికా విలోమ పద్ధతి

క్రింది సమీకరణములను పరిశీలిద్దాము.

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

అయితే పై సమీకరణములు (1) క్రింది మాత్రికా సమీకరణమునకు తుల్యమగును.

$$AX = D, \quad \dots (2)$$

యిక్కడ A అనునది గుణన మాత్రిక.

(2) వ సమీకరణము రెండువైపులను A యొక్క వ్యుత్క్రమ మాత్రిక A^{-1} చే గుణించగా

$$A^{-1}AX = A^{-1}D$$

లేక $IX = A^{-1}D \qquad [\because A^{-1}A = I]$

లేక $X = A^{-1}D$

అనగా $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

ఇక్కడ $A_1, B_1 \dots$ మొదలైనవి A యొక్క నిర్ధారకము |A| లేక Δలోని $a_1, b_1 \dots$ మొదలైనవాటి సహ గుణావయవములు.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3)వ సమీకరణంలో కుడివైపున ఉన్న లబ్ధములో x, y, z లను వాటి సబంధిత మూలకాలకు తుల్యం చేస్తే మనకు కావలసిన సాధన x, y, z వస్తుంది.

గమనిక : A అనునది అసాధారణ మాత్రిక అయితే అనగా $A = 0$ అయితే పై పద్ధతి విఫలమగును.

ఉదా. 4 : మాత్రికల నుపయోగించి క్రింది సమీకరణములను సాధించుము.

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -12$$

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 8$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 7/2$$

ఇక్కడ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -10 & 2 & -36 \\ 0 & 2 & 4 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/10 & -9/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 \\ 8 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

కాబట్టి $x_1 = 1/2, x_2 = 3/2, x_3 = 5/2$.

ఉదా. 5 : మాత్రికల నుపయోగించి క్రింది సమీకరణములను సాధించుము.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + 2z &= 5 \\ 3x + y + z &= 8 \end{aligned}$$

ఇక్కడ $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

దీని నుంచి $x = 1, y = 2, z = 3$.

7.5 గాస్, గాస్–జోర్డాన్ పద్ధతులు

గాస్ పద్ధతి ద్వారా సమీకరణాల సరణిని, తుల్య ఎగువ త్రిభుజాకార సరణిగా లఘు రూపంలోకి వ్రాయ గల్గుతాము. ఈ లఘు రూపమునుండి తిరోగమన ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా ఆ సమీకరణాల సరణిని సాధిస్తాము.

ఈ పద్ధతి తెలిసికొనుటకు 3 సమీకరణాలు గల ఒక సరణిని తీసుకొందాము.

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

పై సరణికి

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

రెండవ సమీకరణము నుండి x_1 ను తొలగింకుటకు, మొదటి సమీకరణాన్ని $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ చేత గుణించి, రెండవ సమీకరణానికి కలుపుతాము. అలాగే మూడవ సమీకరణము నుండి x_1 ను తొలగించుటకు, మొదటి సమీకరణాన్ని $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ చేత గుణించి, 3వ సమీకరణానికి కలుపుతాము.

$$\begin{array}{r} \\ -a_{21}/a_{11} \\ -a_{31}/a_{11} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad \ldots (3)$$

ఇక్కడ $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}$ అను గౌస్ తొలగింపు విధానములో ప్రారంభదశలోని గుణకాలు అంటాము. ఈ దశలో $a_{11} \neq 0$ గా తీసుకున్నాము. మొదటి సమీకరణాన్ని కీలక సమీకరణమని, a_{11} ని మొదటి కీలకము అని అంటాము. ప్రారంభదశ చివరిలో (3) క్రింది విధంగా రూపొందుతుంది.

$$\begin{array}{r} \\ \\ -\frac{a_{32}'}{a_{22}'} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

ఇక్కడ $a_{22}', a_{23}' \ldots$ లు మారిన మూలకములు. a_{22}' కొత్త కీలకము $-\frac{a_{32}'}{a_{22}'}$ అనునది గుణకము.

రెండవ దశలోని చివరలో క్రింది ఎగువ త్రిభుజాకార సరణిని పొందుతాము.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

దీనినుండి, తిరోగమన ప్రతిక్షేపణ ద్వారా x_1, x_2, x_3 ల విలువలు వస్తాయి.

$a_{11}, a_{22}', a_{33}''$ అను కీలకాలలో ఏ ఒక్క కీలకము సున్న అయినా, పై గౌస్ పద్ధతి విఫలమవుతుంది. అటువంటి సందర్భాలలో, కీలకము సున్న అవకుండునట్లుగ అడ్డువరుసలను తిరిగి వ్రాయుట ద్వారా పై పద్ధతిని సవరింపవచ్చును.

మూడవ సమీకరణమునుండి x_2 ను తొలగించే బదులు మొదటి సమీకరణము నుండి కూడ x_1, x_2 మరియు x_3 విలువలు సరాసరి పొందవచ్చు. రెండవ స్థాయిలో Augmented మూత్రిక ఈ క్రింది విధముగా ఉంటుంది.

యీ విలువల సమితి రెండవ సాధన అవుతుంది. తిరిగి వీటిని సమీకరణాల సరణిలో కుడివైపు ప్రతిక్షేపిస్తే

$x_1 = 1.372, x_2 = 1.759, x_3 = 2.573, x_4 = 3.983$ వస్తాయి.

ప్రతిదశలో వచ్చిన సాధనను తిరిగి ఉపయోగిస్తూ, యీ పద్ధతిని సాగిస్తాము తదుపరి విలువలను క్రింది విధంగా అమర్చవచ్చు.

0.995	0.980	1.025	1.005	.996	1.001	1.001
1.968	1.952	1.981	2.001	1.999	1.998	2.000
2.794	3.009	2.993	2.984	3.000	3.002	2.999
3.802	3.936	4.013	3.994	3.993	4.001	4.001

ఇచ్చిన సమీకరణాల సరణికి ఖచ్చిత సాధన

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ అని సులభంగా తెలుస్తుంది కాబట్టి, పై పునరుక్త విధానము ఖచ్చిత సాధనకు అభిసరణం చెందింది అని తెలుసుకుంటాము.

7.7 గాస్–సీడల్ పద్ధతి (Gauss-Seidal Method)

ఉదా. 8 : మాదిరి 7లోని సమీకరణాలనేయీ విధానం ద్వారా కూడ సాధిస్తాము. ఆ సమీకరణాలను క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$x_1 = \frac{1}{13}\left(18 - 5x_2 + 3x_3 - x_4\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{12}\left(13 - 2x_1 - x_3 + 4x_4\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{10}\left(29 - 3x_1 + 4x_2 - x_4\right),$$

$$x_4 = \frac{1}{9}\left(31 - 2x_1 - x_2 + 3x_3\right)$$

మొదట $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ గా తీసుకుంటాము. యీ పద్ధతిలో యీ సాధనను మొదటి సమీకరణములో మాత్రమే ప్రతిక్షేపించి, x_1 విలువ కనుక్కుంటాము. $x_1 = 1.385$ తరువాత $x_1 = 1.385$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ లను 2వసమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి x_2 విలువ కనుక్కుంటాము. $x_2 = .853, x_1 = 1.385$, $x_2 = .853$, $x_3 = x_4 = 0$ లను 3వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి $x_3 = 2.826$ గా కనుక్కుంటాము. చివరగా $x = 1.385$, $x_2 = .853$, $x_3 = 2.826$, $x_4 = 0$ లను 4వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి x_4 విలువను కనుక్కుంటాము $x_4 = 3.984$.

ఈ పునరుక్త విధానమును గాస్-సీడల్ పద్ధతి అటారు. 2వ ప్రయత్న సాధనమును తీసుకుంటే మిగిలిన పునరుక్తులు ఈ క్రింది విధముగా వస్తాయి.

1.385	1.402	1.000	1.012	1.000
0.853	1.942	1.969	1.999	1.999
2.826	2.858	3.001	2.996	3.000
3.984	3.870	4.004	3.996	4.000

c) పై పద్ధతులనుపయోగించి పునరుక్తం చేయడానికి ఒక సమీకరణాల సరణిని వ్రాసే విధానమును క్రింద విశదీకరించాము.

ఉదా. *9 :* క్రింది సరణిని పునరుక్తము చేయడానికి అనువుగా వ్రాయుము.

$$3x_1 - 5x_2 + 47x_3 + 20x_4 = 18,$$

$$56x_1 + 23x_2 + 11x_3 - 19x_4 = 36,$$

$$12x_1 + 16x_2 + 17x_3 + 18x_4 = 25,$$

$$17x_1 + 65x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 84.$$

మొదట గుణన మాత్రికను క్రింది విధంగా వ్రాస్తాము.

$$\begin{matrix} 3 & -5 & 47 & 20 \\ 56 & 23 & 11 & -19 \\ 12 & 16 & 17 & 18 \\ 17 & 65 & -13 & 7 \end{matrix}$$

ఇపుడు నాలుగు పెద్ద మాత్రికా మూలకములను ఎంపిక చేయాలి. (ప్రతి అడ్డ వరుసలో ఒక్కటి, ప్రతి నిలువు వరుసలో ఒక్కటి) ఎప్పుడు గరిష్ట మూలకమును ఎంపిక చేయడానికి, 65తో మొదలు పెడతాము. 65 ఉన్న అడ్డవరుస, నిలువు వరుసను వదిలివేస్తే ఈ క్రింది లఘు నిర్ధారకము వస్తుంది.

$$\begin{matrix} 3 & 47 & 20 \\ 56 & 11 & -19 \\ 12 & 17 & 18 \end{matrix}$$

ఆ క్రమములో 56, 47, 18లను తీసుకొంటాము. కీలక గుణకములు 65, 56, 547, 18 అవుతాయి. అప్పుడు సమీకరణాలను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\underline{65}x_2 + 17x_1 - 13x_3 + 7x_4 = 84,$$

$$23x_2 + \underline{56}x_1 + 11x_3 - 19x_4 = 36,$$

$$-5x_2 + 3x_1 + \underline{47}x_3 + 20x_4 = 18,$$

$$16x_2 + 12x_1 + 17x_3 + \underline{18}x_4 = 25.$$

పునరుక్త స్కీము ఈ క్రింది విధముగా ఉంటుంది.

$$x_2 = \frac{1}{65}\left(84 - 17x_1 + 13x_3 - 7x_4\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{56}\left(36 - 23x_2 - 11x_3 + 19x_4\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{47}\left(18 + 5x_2 - 3x_1 - 20x_4\right),$$

$$x_4 = \frac{1}{18}\left(25 - 16x_2 - 12x_1 - 17x_3\right).$$

7.8 సారాంశము

ఇచ్చిన ఏకకాలిక సమీకరణ వ్యవస్థను కొన్ని ప్రత్యక్ష, పరోక్షపద్ధతుల ద్వారా సాధించాము. వీటిలో క్రేమర్ పద్ధతి, మాత్రికా విలోమ పద్ధతి, గౌస్ పద్ధతులన్నీ ప్రత్యక్ష పద్ధతులు, జాకోబి, గౌస్-సీడెల్ పద్ధతులు పరోక్ష పద్ధతులు. వీటిలో క్రేమర్ పద్ధతి సరళమైనది, అనువర్తించడం తేలికైనది; అయితే ఇచ్చిన సమీకరణాల సంఖ్య నాలుగు లేక ఐదుకంటె ఎక్కువైతే ఈ పద్ధతి అంత అనువైనది కాదు. మాత్రికా విలోమాన్ని సహగుణావయవ పద్ధతిలో కట్టాము. గౌస్ పద్ధతి సాధారణ తొలగింపు పద్ధతే. ఇందులో సమీకరణాల గుణకాల మాత్రికను ఎగువ త్రిభుజాకార మాత్రికా రూపంలోకి తీసుకొచ్చి, తిరోగమన ప్రతిక్షేపణ ద్వారా సమీకరణాలను సాధిస్తాము. గౌస్ పద్ధతిని కొద్దిగా మార్పు చేస్తే గౌస్-జోర్డాన్ పద్ధతి వస్తుంది. గౌస్-సీడెల్, జాకోబి పద్ధతులు పునరుక్త పద్ధతులు. ఈ పద్ధతులలో వరుస సమీకరణాల నుండి, ఒక్కొక్క సమీకరణం ఒక్కొక్క అవ్యక్తరాశిని రాబట్టడానికి సమీకరణాలను అనువుగా రాసి మొదటి ఉజ్జాయింపు సాధనగా అన్నీ రాశులను సున్నాగా అనుకొని ఒక ఉజ్జాయింపు సాధన రాబడతాం. ఈ విధంగావచ్చిన ఉజ్జాయింపు సాధనలను రెండవ స్టెప్‌లో వాడే మూడావ ఉజ్జాయింపు సాధనను రాబడతాం. ఈ విధంగా కావలసిన యదార్థత వచ్చే వరకు ఈ స్టెప్స్‌ను కొనసాగిస్తాము.

7.9 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

1. నిర్ధారకముల నుపయోగించి సాధించుము.

$$3x - 4y + 5z = 8,$$

$$x + 2y - 6z = 7,$$

$$2x - y + 5z = 3,$$

2. ఏ λ విలువలకు క్రింది సమీకరణములు నిలకడగా నుండును? ప్రతి λ విలువకు x, y లను కనుక్కోండి.

$$(2-\lambda)x + 2y + 3 = 0,$$

$$2x + (4-\lambda)y + 7 = 0,$$

$$2x + 5y + (6-\lambda) = 0$$

3. క్రింది సరణికి శూన్యేతర సాధన ఉంటుందా? ఉంటే సాధన కనుక్కోండి

$$x + 3y + z = 0$$
$$9x + 7y + 3z = 0$$
$$55x + 5y + 7z = 0$$

4. మాత్రికల నుపయోగించి క్రింది సమీకరణములను సాధించుము.

$$4x - y - 2z = 0$$
$$-x + 3y + z = 1$$
$$2x - 2y - 6z = 3.$$

5. ఒక విద్యుత్ వలయంలోని విద్యుత్ ప్రవాహాలు i_1, i_2, i_3 లు క్రింది సమీకరణాలను తృప్తి పరుస్తున్నాయి.

$$3i_1 + i_2 + i_3 = 8,$$
$$2i_1 - 3i_2 - 2i_3 = -5$$
$$7i_1 + 2i_2 - 5i_3 = 0.$$

పై సమీకరణాలను మాత్రికల పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

6. మాదిరి 1 లో సమీకరణాల సరణిని (a) గాస్ తొలగింపు విధానం, (b) గాస్-జోర్డాన్ పద్ధతుల ద్వారా సాధించండి.

7. జాకోబి, గాస్-సీడల్ పద్ధతుల ద్వారా క్రింది సమీకరణాలకు మూడవ దశాంశ స్థానం వరకు సాధనను కనుక్కోండి.

$$83x + 11y - 4z = 95$$
$$7x + 52y + 13z = 104$$
$$3x + 8y + 29z = 71$$

8. మాదిరి 9లోని సరణిని జాకోబి పునరుక్త విధానం ద్వారా సాధించండి.

సమాధానాలు

1. $x = 3.255, y = .545, z = -.818$

2. $\lambda = -1, 1, 12;$

$$x = \frac{-1}{11}, y = \frac{-15}{11},$$

$x = -5, y = 1,$

$x = 1/2, y = 1.$

3. Yes : $z = -10x, z = \frac{-10y}{3}$

4. $x = -1/4, y = 1/2, z = -3/4.$

5. $i_1 = 3/2, i_2 = 1, i_3 = 5/2.$

7. $x = 1.06, y = 1.37, z = 1.96$

8. $x_2 = 1.6182, \quad x_1 = -.3788$

$x_3 = 0.8241, \quad x_4 = -.5733$

ఖండిక – 8 : భేద సమీకరణాలు

విషయసూచిక

8.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు : (i) ఏదైనా ఒక ప్రమేయం, భేద అంతరం ఇస్తే, అది సంతృప్తపరి భేద సమీకరణం కనుక్కోగలగాలి (ii) ఒక భేద సమీకరణం ఇస్తే దాని పూరక ప్రమేయము, ప్రత్యే సమాకలనిలను కనుక్కోవడం ద్వారా ఆ సమీకరణం సాధించాలి.

8.2 ఉపోద్ఘాతం

సీమ విలువ సమస్య (boundary value problem)ను సాధించడం గణితశాస్త్రంలో ఎంతో ముఖ్యమైన సమస్య. ఈ సమస్యను సాధించడానికి అనేక పద్ధతులు కనుక్కొన్నారు కాని, అవన్నీ చాల కష్టమైనవి. కొన్ని సీమ విలువ సమస్యలలోని అవకలన సమీకరణాలను, వాటి భేద సమీకరణాలలో పునః స్థాపితంచేసి సాధిస్తే సమస్య తేలికగా సాధించవచ్చు. ఈ ఖండికలో భేద సమీకరణాల నిర్మాణం, భేద సమీకరణం ఇస్తే దాని యదార్థ అవకలని కనుక్కోవడం గురించి నేర్చుకొంటారు. భేద సమీకరణాలను సంఖ్యాత్మకంగా సాధించడం గురించి పై తరగతులలో నేర్చుకొంటారు.

8.3 భేద సమీకరణాల నిర్మాణము

కలన గణితంలో, సమాకలనాన్ని, అవకలన పద్ధతికి తిరోగమన పద్ధతిగా వ్యవహరిస్తాము. పరిమిత భేదాలలో ఇదే విధమైన సమస్య Δy ఇస్తే, y కొరకు సాధించడం.

ఉదాహరణకు, $\Delta y = 2x$ అని ఇస్తే, భేద అంతరం h అని ఇస్తే,

$$y = \frac{x^2}{h} - x + c$$ అని వస్తుంది.

ఇక్కడ అన్ని x విలువలకు c పూర్తిగా స్థిరాంకం కానక్కర్లేదు. h అంతరాల్లో ఇచ్చిన x విలువలకు మాత్రమే c స్థిరాంకంగా తీసుకొంటాము.

అవకలన, భేద సమీకరణాలు ఏ విధంగా వస్తాయో చూద్దాం.

అనే రూపములో ఉంటుంది. ఇక్కడ $a_1, a_2, \ldots a_n$ లు స్థిరరాసులు.

స్థిర గుణకాలుగాగల ఏకవర్గ భేద సమీకరణములను గురించి నేర్చుకొంటాము.

ప్రాథమిక ధర్మాలు

$u_1(n), u_2(n), \ldots, u_r(n)$ లు

$y_{n+r} + a_1 y_{n+r-1} + \ldots + a_r y_n = 0,$ ... (2)

సమీకరణానికి r స్వతంత్ర సాధనములు అయితే, ఆ సమీకరణమునకు పూర్తి సాధన

$$u_n = c_1 u_1(n) + c_2 u_2(n) + \ldots + c_r u_r(n)$$ అవుతుంది.

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ లు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు.

v_n సమీకరణము (1) కి ప్రత్యేక సాధన అయితే (1) కి పూర్తి సాధన

$$y_n = u_n + v_n$$ అవుతుంది. (1) లో

u_n ను పూరక ప్రమేయము (Complimentary Function (CF))

v_n ను ప్రత్యేక సమాకలని (Particular Integral (PI)) అంటారు.

(1) యొక్క పూర్తి సాధన (Complete Solution C.S)

$$y_n = CF + PI$$ అవుతుంది.

8.4.1 పూరక ప్రమేయమును కనుగొనుటకు సూత్రములు

(i) ప్రథమ తరగతి ఏకవర్ణ భేద సమీకరణాన్ని తీసుకొందాము.

$$y_{n+1} - \lambda y_n = 0$$ ఇక్కడ λ స్థిరాంకము.

$$\frac{y_{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \frac{y_n}{\lambda^n} = 0$$

$$\Delta\left(\frac{y_n}{\lambda^n}\right) = 0$$

$$y_n/\lambda^n = c$$ (c స్థిరాంకము)

అంటే $(E - \lambda) y_n = 0$ కు సాధన

$$y_n = c\lambda^n$$ అవుతుంది.

(ii) రెండవ తరగతి ఏకవర్ణ భేద సమీకరణమును తీసుకొందాము.

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0$$

దీనిని సాంకేతికంగా వ్రాస్తే

$$\left(E^2 + aE + b\right) y_n = 0 \quad \ldots (1)$$

$E^2 + aE + b = 0$ ను సహాయ సమీకరణము అని అంటాము. ఈ సమీకరణం యొక్క మూలములు λ_1, λ_2 అనుకుందాము.

సందర్భము 1

మూలములు వాస్తవము, విభిన్నాలయితే (1) క్రింది సమీకరణమునకు తుల్యము అవుతుంది.

$$\left(E-\lambda_1\right)\left(E-\lambda_2\right) y_n = 0 \quad \ldots (2)$$

లేక $\left(E-\lambda_2\right)\left(E-\lambda_1\right) y_n = 0 \quad \ldots (3)$

$\left(E - \lambda_1\right) y_n = 0$ ను y_n తృప్తిపరిస్తే, (3) వ సమీకరణమును కూడ తృప్తిపరుస్తుంది. అలాగే y_n, $\left(E-\lambda_2\right) y_n = 0$ ను తృప్తిపరిస్తే, (2) వ సమీకరణమును కూడ తృప్తిపరుస్తుంది.

$\therefore$ (2), (3) సమీకరణములు రెండింటిని y_n తృప్తిపరచడానికి క్రింది సమీకరణములను సాధిస్తాము.

$$\left(E-\lambda_1\right) y_n = 0, \quad \left(E-\lambda_2\right) y_n = 0.$$

అపుడు సాధనలు వరుసగా

$$y_n = c_1 \left(\lambda_1\right)^n, \quad y_n = c_2 \left(\lambda_2\right)^n.$$

ఇక్కడ c_1, c_2 లు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకాలు

(1) యొక్క సాధారణ సాధన

$$y_n = c_1 \left(\lambda_1\right)^n + c_2 \left(\lambda_2\right)^n$$ అవుతుంది.

సందర్భము 2

మూలములు వాస్తవము, సమానము అయితే $\left(\text{అనగా } \lambda_1 = \lambda_2\right)$, అపుడు (2) క్రింది విధంగా మారుతుంది.

$$\left(E - \lambda_1\right)^2 y_n = 0 \quad \ldots (4)$$

$$y_n = \left(\lambda_1\right)^n z_n$$ అనుకొందాము.

ఇక్కడ z_n కొత్త స్వతంత్ర చలరాశి. అపుడు (4) క్రింద రూపాన్ని పొందుతుంది.

$$\left(\lambda_1\right)^{n+2} z_{n+2} - 2\lambda_1 \left(\lambda_1\right)^{n+1} z_{n+1} + \lambda_1^2 \left(\lambda_1\right)^n z_n = 0$$

లేక $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = 0$

అనగా $\Delta^2 z_n = 0$

$$\therefore z_n = c_1 + c_2 n$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{(E-a)^2}a^n = \frac{n(n-1)}{2!}\cdot a^{n-2}$$

(iii) $(E-a)^3 y_n = a^n$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{(E-a)^3}\cdot a^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}$$

సందర్భము 2

(1) $f(n) = \sin kn$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{\phi(E)}\sin kn = \frac{1}{\phi(E)}\left\{\frac{e^{ikn}-e^{-ikn}}{2i}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\phi(E)}\cdot a^n - \frac{1}{\phi(E)}\cdot b^n\right]$$

ఇక్కడ $a = e^{ik}, b = e^{-ik}$

ఇపుడు సందర్భము 1లో పద్ధతిని అనుసరిస్తాము. (I) ...

(2) $f(n) = \cos kn$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{\phi(E)}\cdot\cos kn = \frac{1}{\phi(E)}\left\{\frac{e^{ikn}+e^{-ikn}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\phi(E)}\cdot a^n + \frac{1}{\phi(E)}b^n\right]$$

సందర్భము 1లో పద్ధతిని యిపుడు అనుసరిస్తాము.

సందర్భము 3

$$f(n) = n^p$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{\phi(E)}n^p = \frac{1}{\phi(1+\Delta)}\cdot n^p$$

(1) $[\phi(1+\Delta)]^{-1}$ ను బైనామియల్ సిద్ధాంతము ననుసరించి Δ యొక్క ఆరోహణ ఘాతాలలో విపులీకరించండి.

(2) n^p ని క్రమగుణిత రూపములో వ్రాసి, దానిపై (1) లోని విపులీకరణలోని ప్రతి పదములో పరిక్రియ చేయండి.

సందర్భము 4

$f(n) = a^n F(n)$, $F(n)$ అనునది n యొక్క పరిమిత ఘాతాలలో ఒక బహుపది.

$$\text{P.I.} = \frac{1}{\phi(E)}a^n F(n)$$

$$= a^n\cdot\frac{1}{\phi(aE)}F(n)$$

ఇపుడు F(n), n తో బహుపది కనుక 3 వ సందర్భములో పద్ధతిని అనుసరిస్తాము.

మాదిరి 5 : $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 5^n$ ను సాధించండి.

సాంకేతిక రూపములో ఇచ్చిన సమీకరణము

$$\left(E^2 - 4E + 3\right) y_n = 5^n$$

$\therefore$ దీనికి సహాయ సమీకరణము

$$E^2 - 4E + 3 = 0$$

లేక $(E-1)(E-3) = 0$

$$\therefore E = 1, 3$$

$\therefore$ పూరకప్రమేయము $= c_1 (1)^n + c_2 (3)^n = c_1 + c_2 3^n$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{E^2 - 4E + 3} 5^n = \frac{1}{5^2 - 4 \times 5 + 3} 5^n = \frac{1}{8}\, 5^n$$

అపుడు సంపూర్ణ సాధన

$y_n = c_1 + c_2 (3)^n + \frac{5^n}{8}$ అవుతుంది.

మాదిరి 6 : $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^n$ ను సాధించండి.

ఇచ్చిన సమీకరణమును సాంకేతిక రూపములో వ్రాస్తే

$$\left(E^2 - 4E + 4\right) u_n = 2^n$$

సహాయ సమీకరణము $E^2 - 4E + 4 = 0$

$$\therefore E = 2, 2$$

$\therefore$ పూరకప్రమేయము $= \left(c_1 + c_2 n\right) 2^n$.

$$\therefore \text{P.I.} = \frac{1}{(E-2)^2} \cdot 2^n = \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 2^{n-2} = n(n-1)\, 2^{n-3}$$

కాబట్టి సంపూర్ణ సాధన

$$y_n = \left(c_1 + c_2 n\right)(2)^n + n(n-1)\, 2^{n-3}$$

మాదిరి 7 : $y_{n+2} - 2\cos\alpha \cdot y_{n+1} + y_n = \cos \alpha n$ ను సాధించండి.

ఇచ్చిన సమీకరణమును సాంకేతిక రూపములో వ్రాస్తే

$$\left(E^2 - 2E \cos\alpha + 1\right) y_n = \cos \alpha n$$

సహాయక సమీకరణము $E^2 - 2\cos\alpha \cdot E + 1 = 0$

$$\therefore E = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

$$\therefore \text{పూరకప్రమేయము} = (1)^n\left[c_1 \cos\alpha n + c_2 \sin\alpha n\right]$$

$$= c_1 \cos\alpha n + c_2 \sin\alpha n$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{E^2 - 2\cos\alpha E + 1}\cos\alpha n$$

$$= \frac{1}{E^2 - E\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) + 1}\left(\frac{e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(E - e^{i\alpha}\right)\left(E - e^{-i\alpha}\right)}e^{i\alpha n} + \frac{1}{\left(E - e^{i\alpha}\right)\left(E - e^{-i\alpha}\right)}e^{-i\alpha n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(E - e^{i\alpha}\right)\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)}e^{i\alpha n} + \frac{1}{\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right)\left(E - e^{-i\alpha}\right)}e^{-i\alpha n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i\sin\alpha}\;\frac{1}{\left(E - e^{i\alpha}\right)}e^{i\alpha n} - \frac{1}{2i\sin\alpha}\;\frac{1}{\left(E - e^{-i\alpha}\right)}e^{-i\alpha n}\right]$$

$$= \frac{1}{4i\sin\alpha}\left[\frac{1}{E - e^{i\alpha}}e^{i\alpha n} - \frac{1}{E - e^{-i\alpha}}e^{-i\alpha n}\right]$$

$$= \frac{1}{4i\sin\alpha}\left[ne^{i\alpha(n-1)} - ne^{-i\alpha(n-1)}\right]$$

$$= \frac{n}{4i\sin\alpha}\left[2i\sin\alpha(n-1)\right] = \frac{n\sin\{\alpha(n-1)\}}{2\sin\alpha}$$

కాబట్టి సంపూర్ణ సాధన

$$y_n = c_1\cos\alpha n + c_2\sin\alpha n + \frac{n\sin\{(n-1)\}\alpha}{2\sin\alpha}$$ అవుతుంది.

మాదిరి 8 : $y_{n+2} - 4y_n = n^2 + n - 1$ ను సాధించండి.

ఇచ్చిన సమీకరణమును సాంకేతిక రూపములో వ్రాస్తే

$\left(E^2 - 4\right)y_n = n^2 + n - 1$ అవుతుంది.

సహాయ సమీకరణము $E^2 - 4 = 0$.

$$\therefore E = \pm 2.$$

$$\therefore \text{పూరకప్రమేయము} = c_1(2)^n + c_2(-2)^n.$$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{E^2 - 4}\left(n^2 + n - 1\right) = \frac{1}{(1+\Delta)^2 - 4}[n(n-1) + 2n - 1]$$

$$= \frac{1}{\Delta^2 + 2\Delta - 3}\left\{[n]^2 + 2[n] - 1\right\}$$

$\because [n]^2 = n(n-1),$

$[n] = n$

$$= -\frac{1}{3\left(1-\frac{2\Delta}{3}-\frac{\Delta^2}{3}\right)}\left\{[n]^2+2[n]-1\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}\left[1-\left(\frac{2\Delta}{3}+\frac{\Delta^2}{3}\right)\right]^{-1}\left\{[n]^2+2[n]-1\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}\left[1+\frac{2\Delta}{3}+\frac{\Delta^2}{3}+\left(\frac{2\Delta}{3}+\frac{\Delta^2}{3}\right)^2+\ldots\right]\times\left\{[n]^2+2[n]-1\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}\left[1+\frac{2\Delta}{3}+\frac{7}{9}\Delta^2+\ldots\right]\left\{[n]^2+2[n]-1\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}\left\{[n]^2+2[n]-1+\frac{2}{3}(2[n]+2)+\frac{7}{9}\times 2\right\}$$

$\because \Delta[n]^2 = 2[n],$

$\Delta[n] = 1,$

$\Delta^2\,[n]^2 = 2.$

$$= \frac{-1}{3}\left\{[n]^2+\frac{10}{3}[n]+\frac{17}{9}\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}\left\{n(n-1)+\frac{10n}{3}+\frac{17}{9}\right\}$$

$$= \frac{-1}{3}\left\{n^2+\frac{7n}{3}+\frac{17}{9}\right\} = \frac{-n^2}{3}-\frac{7n}{9}-\frac{17}{27}$$

కాబట్టి సంపూర్ణ సాధన

$y_n = c_1 2^n + c_2(-2)^n - \frac{n^2}{3}-\frac{7n}{9}-\frac{17}{27}$ అవుతుంది.

మాదిరి 9 : $y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n = n^2\cdot 2^n$ ను సాధించండి.

సాంకేతిక రూపములో యిచ్చిన సమీకరణము

$$\left(E^2-2E+1\right)y_n = n^2\cdot 2^n$$

దీనికి పూరక ప్రమేయము $= c_1 + c_2 n$

$$\text{P.I.} = \frac{1}{(E-1)^2}\cdot n^2\,2^n = 2^n\cdot\frac{1}{(2E-1)^2}\cdot n^2$$

$$= 2^n\cdot\frac{1}{(1+2\Delta)^2}\cdot n^2$$

$$= 2^n (1+2\Delta)^{-2} \cdot n^2 = 2^n \left(1 - 4\Delta + 12\Delta^2 - \ldots\right) \{n(n-1) + n\}$$

$$= 2^n \left(1 - 4\Delta + 12\Delta^2 - \ldots\right) \left\{[n]^2 + [n]\right\}$$

$$= 2^n \left\{[n]^2 + [n] - 4(2[n] + 1) + 12 \times 2\right\}$$

$$= 2^n \left\{[n]^2 - 7[n] + 20\right\} = 2^n \left(n^2 - 8n + 20\right).$$

కాబట్టి సంపూర్ణ సాధన

$$y_n = c_1 + c_2 n + 2^n \left(n^2 - 8n + 20\right)$$ అవుతుంది.

8.6 సారాంశము

కలనగణితంలో అవకలన సమీకరణాలకు అనురూపంగా సంఖ్యా విశ్లేషణంలో భేద సమీకరణాలు ఉన్నాయి. ఇక్కడ భేద సమీకరణాల తరగతి, సాధన, సాధారణ సాధన, ప్రత్యేక సాధన వంటి పదాలను నిర్వచించాము. ఇక్కడ సరళ భేద సమీకరణాలను మాత్రమే తీసుకొని సాధించాము. ప్రత్యేక సమాకలని కనుక్కోవడానికి అనేక పద్ధతులను వివరించాము.

8.7 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

1. $\dfrac{\log(1-z)}{1+z} = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \ldots + y_n z^n + \ldots$ గా తీసుకొని y_n తృప్తిపరిచే భేద సమీకరణమును కనుక్కోండి.

2. క్రింది సందర్భాలలో భేద సమీకరణములను ఉత్పాదించండి.

   (i) $y_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

   (ii) $y_n = (A + Bn) 2^n$

3. క్రింది భేద సమీకరణమును సాధించండి.

   $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0.$

4. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n = 0$ ను సాధించండి.

5. $u_{p+2} - 6u_{p+1} + 9u_p = 0$ ను సాధించండి.

6. $\left(\Delta^2 - 3\Delta + 2\right) f(n) = 0$ ను సాధించండి.

7. $y_{n+2} - 5y_{n+1} - 6y_n = 2^n$ ను సాధించండి.

8. $y_{n+2} - 4y_n = 2^n$ ను సాధించండి.

9. $u_{n+2} + u_n = \cos n/2$ ను సాధించండి.

10. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3n + 5$ ను సాధించండి.

11. $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n^2 + n + 1$ ను సాధించండి.

12. $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 2^n + 6n$ ను సాధించండి.

13. $u_{n+2} - 7u_{n+1} - 8u_n = 2^n [n]^2$ ను సాధించండి.

14. $u_{(x+3)} + 8u_{(x)} = (2x + 3)\, 2^x$ ను సాధించండి.

సమాధానాలు

1. $\Delta y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n + 1}$

2. (i) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$ (ii) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$

3. $y_n = c_1\, 2^n + c_2\, (-2)^n$

4. $u_n = 2^n \left[c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3}\right]$

5. $u_p = \left(c_1 + c_2\, p\right) 3^p$.

6. $f(n) = c_1\, 2^n + c_2 \,.\, 3^n$

7. $y_n = c_1\, (-1)^n + c_2\, (6)^n - \frac{2^n}{12}$

8. $y_n = c_1\, 2^n + c_2\, (-2)^n + n \,.\, 2^{n-3} - 2^{n-4}$.

9. $u_n = c_1 \cos \frac{n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{n-1}{2} \sec \frac{1}{2}$

10. $u_n = c_1 + c_2\, n + \frac{1}{2} n\, (n-1)\, (n+3)$

11. $u_n = c_1 \cos \frac{2n\pi}{2} + c_2 \sin \frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{3} \left(n^2 - n + \frac{1}{3}\right)$

12. $y_n = c_1\, 4^n + \left(c_2 - \frac{1}{4} n\right) 2^n + 2n - \frac{8}{3}$

13. $u_n = c_1\, (-1)^n + c_2\, 8^n - \frac{2^n}{54} \left(3n^2 - 5n + 2\right)$

14. $u_x = 2^x \left(c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3}\right) + c_3\, (-2)^x + x \,.\, 2^{x-3}$

బ్లాక్ – 3 : సంఖ్యాత్మక అవకలనము, సమాకలనము

ఇంజనీరింగ్, విజ్ఞాన శాస్త్ర సమస్యల సాధనలో కొన్ని కొన్ని సందర్భాలలో అవ్యక్త ప్రమేయపు స్వతంత్ర చలరాశి యొక్క కొన్ని విలువల వద్ద ప్రమేయపు అవకలని, సమాకలనిలను కనుక్కోవలసిన అవసరం కల్గుతుంటుంది. ప్రమేయపు నిర్దిష్ట స్వరూపము తెలిసి ఉంటే ఆ ప్రమేయపు అవకలని, సమాకలనిలను ప్రాథమిక పద్ధతుల ద్వారా కనుగొంటాము. ప్రమేయపు నిర్దిష్ట స్వరూపము ఇవ్వకుండా స్వతంత్ర చలరాసి యొక్క కొన్ని విలువల దగ్గర ప్రమేయపు విలువలు ఇవ్వవచ్చు. అటువంటి సందర్భాలలో అంతర్వేశన సూత్రాన్నొకదాని నుపయోగించి పొందే ఉజ్జాయింపు ప్రమేయాన్ని అవకలనం చేయడం వల్ల ప్రమేయపు అవకలని విలువలను అంచనా వేయవచ్చు. ఈ పద్ధతిని సంఖ్యాత్మక అవకలనము అంటాము.

ఇదే విధంగా ఒక నిశ్చిత సమాకలనిలోని సమాకల్యానికి క్లిష్ట స్వరూపమున్నా సమాకల్యప్రమేయపు నిర్దిష్ట స్వరూపము తెలియకుండా స్వతంత్ర చలరాసి యొక్క కొన్ని విలువల దగ్గర ఆ ప్రమేయపు విలువలు తెలిసినా, ఆ నిశ్చిత సమాకలని విలువలను అంచనా వేయడాన్ని సంఖ్యాత్మక సమాకలనం అంటాము. ఈ పద్ధతిలో కూడా అంతర్వేశనం ద్వారా సమాకల్య ప్రమేయాన్ని అంచనా వేసి, దానిని సమాకల్యంగా తీసుకొని నిశ్చిత సమాకలని విలువలను అంచనా వేస్తాము. ఇంకా ఈ బ్లాక్‌లో ఆయిలర్–మెక్లారిన్ శ్రేణి సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఇచ్చిన శ్రేణి మొత్తాన్ని కనుక్కొంటాం.

ఖండిక – 9 : సంఖ్యాత్మక అవకలనము

విషయ సూచిక

9.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక అంతానికి మీరు, (i) స్వతంత్ర చలరాశి x యొక్క కొన్ని విలువలు, వాటి దగ్గర ప్రమేయపు విలువల సమాచారం పట్టిక రూపంలో ఇస్తే ఆ ప్రమేయపు అవకలని (కావలసిన బిందువు వద్ద) కనుక్కోగలగాలి. (ii) వేర్వేరు సందర్భాలలో వేరు వేరు అంతర్వేశన సూత్రాల నుపయోగించి సంఖ్యాత్మక అవకలనం చేయగలగాలి.

9.2 ఉపోద్ఘాతం

పట్టికలో పొందుపరచిన సంఖ్యాత్మక దత్తాంశం ఆధారంగా ఒక ప్రమేయపు అవకలనిని కనుక్కోవడాన్ని సంఖ్యాత్మక అవకలనము అంటారు. ఈ సమస్యలో ప్రమేయాన్ని ఏదో ఒక అంతర్వేశన సూత్రంతో అంచనా వేసి అప్పుడు ఆ ప్రమేయాన్ని ఎన్నిసార్లు కావాలంటే అన్ని సార్లు అవకలనం చేసుకొంటాము.

ప్రమేయపు విలువలు సమాన అంతరాలలో ఇస్తే, ఆ ప్రమేయాన్ని న్యూటన్, స్టెర్లింగ్, బెస్సెల్ వంటి సూత్రాలలో అంచనా వేస్తాం. ఇచ్చిన ప్రమేయపు విలువలు సమాన అంతరాలలో లేకుంటే, విభాజిత భేద సూత్రంగాని, లెగ్రాంజ్ సూత్రంగాని వాడి ఆ ప్రమేయాన్ని అంచనా వేస్తాము. అంటే అంతర్వేశనం చేయడానికి ఈ సూత్రాలను ఏ విధంగా ఎంపిక చేసుకొన్నామో అదే విధంగా ప్రమేయాన్ని అవకలనం చేసేటప్పుడు కూడా ఎంపిక చేసుకొంటాము.

9.3 న్యూటన్ పురోగమన సూత్రం ద్వారా అవకలనము

x విలువలు, వాటి దగ్గర ప్రమేయపు విలువలు

$$x : \quad x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$$

$$y = f(x): \quad y_0, y_1, y_2, \dots y_n$$

అనుకోండి. x_i ల భేదాంతరం స్థిరాంకము h.

వ్యుత్పన్నం కావలసిన x విలువ, (x_0, x_n) అంతరంలో, x_0 కు దగ్గరగా వున్నపుడు న్యూటన్ పురోగమన భేద అంతర్వేశన సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

ఈ అంతర్వేశన సూత్రము

$$f(x_0 + xh) = f_0 + \binom{x}{1}\Delta f_0 + \binom{x}{2}\cdot\Delta^2 f_0 + \dots + \binom{x}{n}\cdot\Delta^n f_0 \text{ లో}$$

$$f_0 = f(x_0), \Delta f_0 = \Delta f(x_0), \dots$$

అంటే $$f(x_0 + xh) = f_0 + \frac{x}{1!}\Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots$$

$$+ \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

x దృష్ట్యా వ్యుత్పన్నం చేయగా

1) $$hf'(x_0 + xh) = \Delta f_0 + \frac{2x-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3x^2-6x+2}{6}\Delta^3 f_0$$

$$+ \frac{4x^3-21x^2+28x-84}{24}\Delta^4 f_0$$

$$+ \frac{5x^2-48x^3+147x^2-156x+40}{120}\Delta^5 f_0 + \dots$$

(1) లో $x = 0$ ప్రతిక్షేపిస్తే

2) $$hf'(x_0) = \Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n f_0.$$

$f'(x_1)$ కావాలంటే $x = 1, f'(x_2)$ కావాలంటే $x = 2 \dots$ ప్రతిక్షేపించవలె. (1) ని వ్యుత్పన్నం చేస్తే $f''(x_0 + xh)$ వస్తుంది.

3) $$h^2 f''(x_0 + xh) = \Delta^2 f_0 + (x-1)\Delta^3 f_0 + \dots + (n-1) \text{ పదాల వరకు}$$

కాబట్టి $$h^2 f''(x_0) = \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{7}{6}\Delta^4 f_0 - \frac{13}{10}\Delta^5 f_0 + \dots$$

క్రింద ఇచ్చిన ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదా. *1* : క్రింది పట్టికలో $x, f(x)$ ల విలువలు ఇవ్వబడినవి. $x = 0$ దగ్గర $f'(x); f''(x)$ లు కనుక్కోండి.

x :	0	1	2	3	4	5
$f(x)$:	4.21	5.11	6.20	12.80	23.70	36.80

సాధన

ఈ సమస్యలో $h = 1$.

సూత్రం (2) నుపయోగించితే

$$1.\ f'(0) = f'(x_0) = \Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 f_0 + \ldots$$

భేద పట్టిక

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	4.21					
		0.90				
1	5.11		0.19			
		1.09		5.32		
2	6.20		5.51		–8.11	
		6.60		–2.79		7.00
3	12.80		4.30		–1.11	
		10.90		–3.90		
4	23.70		2.20			
		13.10				
5	36.80					

$$f'(0) = 0.90 - \frac{1}{2}(0.19) + \frac{1}{3}(5.32) - \frac{1}{4}(-8.11) + \frac{1}{5}(7.00) = 6.006$$

సూత్రం (3) నుపయోగించితే

$$h^2 f''(0) = \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{7}{6} \Delta^4 f_0 - \frac{13}{10}\Delta^5 f_0$$

$$\therefore 1 \cdot f''(0) = 0.19 - (5.32) + \frac{7}{6}(-8.11) - \frac{13}{10}(7.00)$$

$$= -23.69$$

ఉదా. *2* : దిగువనివ్విన పట్టిక నుపయోగించి $x = 16$ దగ్గర $\sqrt{x}$ యొక్క మొదటి రెండు వ్యుత్పన్నాలను కనుగొనండి.

x :	15	17	19	21	23	25
$f(x)$:	3.873	4.123	4.359	4.583	4.790	5.000

సాధన

వ్యుత్పన్నం కావలసిన విలువరేంజ్ (15, 25) లో ప్రారంభ విలువ 15కు దగ్గరలో ఉంది.

భేదపట్టిక

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
15	3.873					
		0.250				
17	4.123		–0.014			
		0.236		0.002		
19	4.359		–0.012		–0.002	
		0.224		0.000		.007
21	4.583		–0.012		0.005	
		0.212		0.005		
23	4.795		–0.007			
		0.205				
25	5.000					

ఇక్కడ $h = 2$ మూడో తరగతి భేదాల వరకే తీసుకొని, $x = \frac{1}{2}$ అని తీసుకొంటే (2), (3) సూత్రాల నుండి

$$2 \cdot f'(16) = 0.250 + 0 - \frac{1}{24}(0.002) = 0.250 - .00008$$

$$= .24992$$

$$\therefore f'(16) = 0.12496$$

$$4 \cdot f''(16) = -0.014 + \left(-\frac{1}{2}\right)(0.002) = -0.015$$

$$\therefore f''(16) = -0.00375.$$

9.4 న్యూటన్ తిరోగమన అంతర్వేశన సూత్రం అవకలనము

x విలువ, రేంజ్ (x_0, x_n) లో చివరి విలువకు దగ్గరగా ఉన్నపుడు న్యూటన్ తిరోగమన భేద అంతర్వేశన సూత్రము

$$4)\quad f(a + nh + xh) = f(a + nh) + \Delta f(a + nh) + \frac{x^2 + x}{2!}\Delta^2 f(a + nh) + \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{3!}\Delta^3 f(a + nh) + \ldots$$

(4) ను x దృష్ట్యా వ్యుత్పన్నం చేస్తే

5) $$hf'(a+nh+xh) = \Delta f(a+nh) + \frac{2x+1}{2!}\Delta^2 f(a+nh) + \frac{3x^2+6x+2}{6}\Delta^3 f(a+nh) + \ldots$$

$x = 0$ ప్రతిక్షేపించగా

6) $$hf'(a+nh) = \Delta f(a+nh) + \frac{1}{2!}\Delta^2 f(a+nh) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a+nh) + \ldots\ldots$$

(5) ను x దృష్ట్యా వ్యుత్పన్నం చేస్తే

$f''(a+bh+xh)$ వస్తుంది.

ఉదా. 3 : క్రింది ఇచ్చిన పట్టిక నుండి $x = .06$ వద్ద $f'(x)$ కనుగొనండి.

x :	.01	.02	.03	.04	.05	.06
$f(x)$:	.102	.105	.107	.110	.112	.115

సాధన

భేద పట్టిక

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
.01	.102			
		.003		
.02	.105		–.001	
		.002		.002
.03	.107		+.001	
		.003		–.002
.04	.110		–.001	
		.002		.002
.05	.112		+.001	
		.003		
.06	.115			

x, రేంజ్ (.01, .06) లో చివరి విలువ వద్ద $f(x)$ వ్యుత్పన్నం కావాలి. కాబట్టి సూత్రం (6) ను ఉపయోగిద్దాము.

$$\text{ఇక్కడ } h = .01, \quad a+nh = .06$$

$$\therefore (0.1)f'(0.6) = .003 + \frac{1}{2}(.001) + \frac{1}{3}(.002) = .00416.$$

ప్రమేయపు అనంత విస్తరణను గణించడం వంటి సమస్యలలో, పరిమిత పదాల వరకే తీసుకొని మిగిలినవి వదిలి వేయడం జరుగుతుంది. దీని వల్ల ఛేదన దోషాలు ఏర్పడతాయి. ఛేదన దోషపరిమాణమును శేష పదము తెలుపుతుంది. ఇక్కడ వివిధ క్షేత్రకలన సూత్రాలలో శేష పదాలను గురించి చర్చిస్తాము.

10.3 సార్వత్రిక క్షేత్ర కలన సూత్రము

x విలువలు x_i దగ్గర ప్రమేయము $f(x)$ విలువలు

$$\begin{array}{lcccccc} x & : & x_0 & x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \\ f(x) & : & y_0 & y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \end{array}$$ అనుకోండి.

ఇక్కడ $x_i = x_0 + i\,h,\ y_i = f\left(x_i\right)$

సమాకల్య ప్రమేయము ఒకే స్వతంత్ర చలరాసి యొక్క ప్రమేయమైనప్పుడు $\int_a^b f(x)\,dx$ కు ఉజ్జాయింపు విలువను మనం కనుక్కోవాలి. ముందు సార్వత్రిక క్షేత్రకలన సూత్రాన్ని వ్యుత్పన్నం చేద్దాము.

$I = \int_a^b f(x)\,dx$ విలువను అంచనా వేయడానికి $[a, b]$ అంతరాన్ని h భేదాంతరముగల n సమాన భాగాలుగా విభజించుదాము.

$$h = \frac{b-a}{n}$$ అవుతుంది.

$a = x_0, b = x_n = x_0 + nh, x_k = x_0 + kh, y_k = f\left(x_k\right)$ అని సూచిద్దాము.

న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రము

$$y = y_0 + u\,.\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

లో $$u = \frac{x-x_0}{h}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx$$

$$= h\int_0^n \left(y_0 + u\,.\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots\right)du$$

$$\left(\because \frac{du}{dx} = \frac{1}{h}\right)$$

$$\therefore I = h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots\right]$$

n కు 1, 2, 3, 6 విలువలిస్తే వేర్వేరు క్షేత్రకలన సూత్రాలు లభిస్తాయి.

10.4 సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రము

సూత్రం (1) లో $n=1$ అని ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y\,dx = h\left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right] = h\left[y_0 + \frac{1}{2}\left(y_1 - y_0\right)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right]$$

($\Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0 \ldots$ పదాలు వదిలి పెడితే)

ఇదేవిధంగా $\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0+2h} y\,dx = \frac{h}{2}\left[y_1 + y_2\right], \ldots \ldots \ldots$

$$\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{2}\left[y_{n-1} + y_n\right]$$

ఈ n సమాకలనులను కూడగా

(2) $$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 2\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)\right]$$

10.5 సింప్సన్ 1/3 నియమము

సూత్రం (1) లో $n=2$ అని తీసుకొంటే

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx = h\left[2y_0 + 2\,.\,\Delta y_0 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\right]$$

(మూడవ, అంతకంటే ఎక్కువ పరిమాణ భేదాలను వదిలిపెడితే)

$$= h\left[2y_0 + 2\left(y_1 - y_0\right) + \frac{1}{3}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

ఇట్లాగే, $\displaystyle\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} y\,dx = \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$

....

....

$$\int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}\left(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right)$$

(ఇక్కడ $[a, b]$ యొక్క ఉపాంతరాల సంఖ్య సరిసంఖ్యగా ఉండాలి)

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx + \int_{x_0+2h}^{x_0+4h} y\,dx + \ldots \int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} y\,dx$$

(3) $$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}\left[\left(y_0+y_n\right)+4\left(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}\right) + 2\left(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}\right)\right]$$

సూత్రం (3) ను సింప్సన్ $\frac{1}{3}$ నియమము అంటాము.

10.6 సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ నియమము

సూత్రం (1)లో $n=3$ అని తీసుకొంటే

($\Delta^4 y_0, \Delta^5 y_0$ ...వదిలిపెడితే)

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} y\,dx = h\left[3y_0+\frac{9}{2}\Delta y_0+\frac{9}{4}\Delta^2 y_0+\frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right]$$

$$= h\left[3y_0+\frac{9}{2}\left(y_1-y_0\right)+\frac{9}{4}\left(y_2-2y_1+y_0\right) + \frac{3}{8}\left(y_3-3y_2+3y_1-y_0\right)\right]$$

$$= \frac{3h}{8}\left[y_0+3y_1+3y_2+y_3\right]$$

ఇట్లాగే,

$$\int_{x_0+3h}^{x_0+6h} y\,dx = \frac{3h}{8}\left[y_3+3y_4+3y_5+y_6\right] \text{ and so on}$$

....

....

$$\int_{x_0+(n-3)h}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{8}\left[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n\right]$$

(4) $$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{8}\left[\left(y_0 + y_n\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + \dots + y_{n-1}\right)\right.$$

$$\left. + 2\left(y_3 + y_6 + \dots + y_{n-3}\right)\right]$$

ఇక్కడ [a, b] యొక్క ఉపాంతరాల సంఖ్య 3చే భాగించబడేదిగా ఉండాలి.

సూత్రం (4) ను సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ నియమము అంటాము.

10.7 వెడెల్ సూత్రము

సూత్రం (1) లో $n = 6$ అని తీసుకొని 6వ పరిమాణము, అంత కంటే ఎక్కువ పరిమాణ భేదాలను వదిలిపెట్టగా

$$\int_{x_0}^{x_0+6h} y\,dx = h\left[6y_0 + 18\,\Delta y_0 + 27\,\Delta^2 y_0 + 24\,\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^4 y_0\right.$$

$$\left. + \frac{33}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{41}{140}\Delta^6 y_0\right]$$

అవుతుంది.

$\frac{41}{140}$ ని సుమారుగా $\frac{3}{10}$ అని తీసుకొంటే

$$\int_{x_0}^{x_0+6h} y\,dx = \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6\right]$$

ఇట్లాగే,

$$\int_{x_0+6h}^{x_0+12h} y\,dx = \frac{3h}{10}\left[y_6 + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + y_{10} + 5y_{11} + y_{12}\right]$$

... ...

$$\int_{x_0+(n-6)h}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{10}\left[y_{n-6} + 5y_{n-5} + y_{n-4} + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n\right]$$

ఈ సమాకలనములన్నింటినీ కూడితే

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + 5y_7 + \ldots\right]$$

ఇది వెడెల్ సూత్రము. ఈ సూత్రం సింప్సన్ నియమము కంటే ఖచ్చితమైన విలువ ఇస్తుంది. దీనిని వర్తింప జేయడానికి 7 ప్రమేయపు వరుస విలువలు కావలె. ఉపాంతరాల సంఖ్య 6చే భాగించబడేదిగా ఉండాలి.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదా. 1 : $\int_0^2 1 + x^2\,dx$ విలువ కనుగొనండి.

సాధన

దత్త సమాకలని ఖచ్చిత విలువ $= x + \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{14}{3} = 4.67$

మొదట సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రాన్ని వాడుదాము.

$h = .2$ అని తీసుకొంటే ఉపాంతరాల సంఖ్య 10

$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
$x_1 = 0.2$	$y_1 = 1.04$
$x_2 = 0.4,$	$y_2 = 1.16,$
$x_3 = 0.6,$	$y_3 = 1.36,$
$x_4 = 0.8$	$y_4 = 1.64$
$x_5 = 1.0$	$y_5 = 2.0$
$x_6 = 1.2$	$y_6 = 2.44$
$x_7 = 1.4$	$y_7 = 2.96$
$x_8 = 1.6$	$y_8 = 3.56$
$x_9 = 1.8$	$y_9 = 4.24$
$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 5.0$

సూత్రం (2) నుపయోగించితే

$$\int_0^2 1 + x^2\,dx = \frac{h}{2}\left[\left(y_0 + y_{10}\right) + \left(y_1 + y_3 + \ldots + y_9\right)\right]$$

$$= (.1)\,(6 + 25.4) = 3.14$$

సూత్రం (3) నుపయోగించితే

$$\int_0^2 1+x^2\,dx = \left(\frac{.2}{3}\right)\left[\left(y_0+y_{10}\right)+4\left(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9\right)\right.$$

$$\left.+2\left(y_2+y_4+y_6+y_8\right)\right]$$

$$= \left(\frac{.2}{3}\right)\ (6+46.4+17.6) = 4.67$$

ఈ రెండు సూత్రాలలో వచ్చిన సమాకలని సుమారు విలువలను, దాని ఖచ్చితమైన విలువతో పోలిస్తే, సింప్సన్ 1/3 నియమము మంచి యదార్థత ఉన్న ఫలితాన్ని ఇస్తుందని తెలుస్తున్నది.

ఉదా. 2 : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ కు సింప్సన్ $\frac{1}{3}$ నియమాన్ని వర్తింపజేసి π కు ఉజ్జాయింపు విలువ కనుగొనుడు.

సాధన

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

[0, 1] అంతరాన్ని 10 సమభాగాలుగా చేస్తే h =0.1 అవుతుంది. x_i, y_i విలువలు దిగువ పట్టికలో చూపబడినవి.

x :	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y :	1	.99	.962	.917	.862	.8	.735	.671	.610	.553	0.5

సింప్సన్ 1/3 నియమము నుపయోగించితే

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0.1}{3}\ [(1+.5)+4\ (.99+.917\ +.8+.671+.553)$$

$$+2\ (.962+.862+.735+.610)]$$

$$= 0.7854$$

$$\frac{\pi}{4} = 0.7854 \text{ సుమారుగా}$$

$$\text{or } \pi = 3.1416.$$

ఉదా. 3 : సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ నియమము, వెడెల్ సూత్రముల నుపయోగించి $\int_0^6 \frac{dx}{1+x}$ విలువ కనుగొనుము.

సాధన

$n=6$ అని తీసుకొంటే $h=1$ అవుతుంది.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	.5	.333	.25	.2	.167	.143

సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ నియమము తీసుకొంటే

$$\int_0^6 \frac{dx}{1+x} = \frac{3}{8}\left[\left(y_0+y_6\right)+3\left(y_1+y_2+y_4+y_5\right)+2y_3\right]$$

$$= \frac{3}{8}\ [1.143 + 3.6 + 0.50] = 1.966$$

వెడెల్ సూత్రమును వాడితే

$$\int_0^6 \frac{dx}{1+x} = \frac{3}{10}\ [1 + 5\,(.5) + .333 + 6\,(.25) + .2 + 5\,(.167) + .143) = 1.2933$$

సమాకలన ఖచ్చిత విలువ $= \log(1+x)\Big|_0^6 = \log 7 - \log 1$

$$= \log 7 = 1.9459$$

సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ నియమము కంటె వెడెల్ సూత్రము ఖచ్చిత విలువకు దగ్గరగా నున్న విలువ నిస్తుందని చూడవచ్చు.

ఉదా. 4 : దిగువ నిచ్చిన బిందువుల గుండా ఒక వక్రము గీయబడినది. వక్రము, x అక్షము $x = 1, x = 5$ లచేత పరిబద్ధమైన వైశాల్యము ఎంత?

x	1	2	3	4	5
y	10	50	70	80	100

సాధన

కావలసిన వైశాల్యము $= \int_1^5 y\,dx$

సింప్సన్ $\frac{1}{3}$ నియమమునుపయోగించితే

$$\int_1^5 y\,dx = \frac{h}{3}\left[\left(y_0+y_4\right)+4\left(y_1+y_3\right)+2y_2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\ [(10+100) + 4\,(50+80) + 2 \times 70]$$

$$= 256.7$$

కావలసిన వైశాల్యము = 256.7 చదరపు యూనిట్లు

ఉదా. 5 : దిగువ పట్టికలో ఒక కణపు వేగము మొదటి 80 సెకనులకు ఇవ్వబడినది. 80 సెకనులలో కణము ప్రయాణముచేసిన దూరమెంత?

t (secs) :	0	10	20	30	40	50	60	70	80
v (m/sec) :	30.0	31.63	33.34	35.47	37.75	40.33	43.25	46.69	50.67

సాధన

t సెకనులలో ప్రయాణముచేసిన దూరము s అయితే, వేగము = $\frac{ds}{dt}$.

కాబట్టి 80 సెకనులలో ప్రయాణము చేసిన దూరము = $\int_0^{80} \frac{ds}{dt} dt$.

$h = 10$ సెకనులు అని తీసుకొంటే, సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ సూత్రాన్ని బట్టి

$$\int_0^{80} \frac{ds}{dt} dt = \frac{3 \times 10}{8} [(30 + 50.67) + 3 (31.63 + 33.44 + 37.75 + 40.33 + 46.69)$$

$$+ 2 (35.47 + 43.25)]$$

$$= 3028.61 \text{ మీటర్లు}$$

10.8 క్షేత్రకలన సూత్రాలలో దోషాలు

10.8.1 సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రంలో శేషపదము

అంతరము $(x_0, x_0 + h)$ లో $f(x)$ ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమై, రెండో పరిమాణము వరకు అవిచ్ఛిన్న అవకలనులను కలిగి ఉన్నదనుకోండి.

$$\int_a^x f(x)\, dx = g(x) \text{ అనుకొంటే}$$

సమాకలని $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx$ ఖచ్చిత విలువ (I_e గా సూచిస్తే)

$$I_e = \int_a^{x_0+h} f(x)\, dx - \int_a^{x_0} f(x)\, dx = g(x_0 + h) - g(x_0)$$

సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రాన్నుపయోగించి సమాకలని విలువ (I_a)

$$I_a = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_0 + h)]$$

(1) దోషము $= I_e - I_a = [g(x_0 + h) - g(x_0)] - \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_0 + h)]$

టేలర్ శ్రేణి విస్తరణ నుంచి

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

(2) $$\therefore\ \mathrm{I}_a = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0\right) + f\left(x_0 + h\right)\right]$$

$$= hf\left(x_0\right) + \frac{h^2}{2}hf'\left(x_0\right) + \frac{h^3}{4}f''\left(x_0\right) + \ldots$$

$$g\left(x_0 + h\right) = g\left(x_0\right) + hg'\left(x_0\right) + \frac{h^2}{2!}g''\left(x_0\right) + \frac{h^3}{3!}g'''\left(x_0\right) + \frac{h^4}{4!}g^{iv}\left(x_0\right) + \ldots$$

$$g\left(x_0 + h\right) - g\left(x_0\right) = hg'\left(x_0\right) + \frac{h^2}{2!}g''\left(x_0\right) + \frac{h^3}{6!}g'''\left(x_0\right) + \ldots$$

$g(x)$ నిర్వచనాన్ని బట్టి

$g'(x) = f(x),\ g''(x) = f'(x),\ g'''(x) = f''(x), \ldots$

(3) $$\therefore g\left(x_0 + h\right) - g\left(x_0\right) = hf\left(x_0\right) + \frac{h^2}{2}f'\left(x_0\right) + \frac{h^3}{6}f''\left(x_0\right) + \ldots$$

(2), (3) లను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\text{దోషము} = \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{4}\right)f''\left(x_0\right) + \ldots = -\frac{h^3}{12}f''\left(x_0\right) + \ldots$$

రెండో పరిమాణము కంటె ఎక్కువ పరిమాణము గల అవకలనులను విసర్జించే సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రంలోని దోషము $-\frac{h^3}{12}f''\left(x_0\right)$ అవుతుంది.

$\int_a^b f(x)\,dx$ సమాకలని పరిశీలిద్దాము.

$x_0 = a,\ x_i = x_0 + ih\ (i = 1, 2, \ldots n)$

$b = x_n = x_0 + nh$ అని తీసుకొంటే

$-\frac{h^3}{12}\left[f''\left(x_0\right) + f''\left(x_1\right) + \ldots + f''\left(x_{n-1}\right)\right]$ దోషాన్నిస్తుంది.

$f'\left(x_i\right), i = 1, 2, \ldots, n-1$ లలో $f'\left(x_m\right)$ గరిష్టమైతే

$$\text{దోషము} \le -\frac{n}{12}h^3 f''\left(x_m\right) = \frac{-(b-a)}{12}\ h^2 f''\left(x_m\right)$$

$$nh = b - a$$

$f(x)$ కనక ఒకటో తరగతి బహుపది అయితే సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రం సమాకలని విలువ ఖచ్చితంగా యిస్తుందని గ్రహించవచ్చు.

10.8.2 సింప్సన్ $\frac{1}{3}$ నియమములోని దోషము

$(x_0 - h, x_0 + h)$ అంతరంలో $f(x)$ ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమై, నాలుగో పరిమాణము వరకు అవిచ్ఛిన్న అవకలనులను కలిగి ఉన్నదనుకోండి.

(10.8.1) లో మాదిరిగా

$$I_e = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\, dx = g(x_0 + h) - g(x_0 - h)$$

సింప్సన్ 1/3 నియమము ద్వారా

$$I_a = \frac{h}{3}\left[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)\right]$$

(4) $\therefore$ దోషము $= I_e - I_a = \left[g(x_0 + h) - g(x_0 - h)\right]$

$$-\frac{h}{3}\left[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)\right]$$

టేలర్ శ్రేణి విస్తరణను ఉపయోగిస్తే

(5) $f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h) = 6f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12} f^{iv}(x_0) + \ldots$

(6) $g(x_0 + h) - g(x_0 - h) = 2h\, g'(x_0) + \frac{2h^3}{3!} g'''(x_0) + \frac{2h^5}{5!} g^{v}(x_0) + \ldots$

$$= 2h f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(x_0) + \frac{h^5}{60} f^{iv}(x_0) + \ldots$$

(5), (6) లను (4)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

(7) దోషము $= h^2\left[\frac{1}{60} - \frac{1}{36}\right] f^{iv}(x_0) + \ldots$

$$= \frac{-h^5}{90} f^{iv}(x_0) + \ldots$$

(నాలుగో పరిమాణము కంటే ఎక్కువ పరిమాణముగల అవకలనులను విసర్జిస్తే)

సమాకలన అంతరము $[a, b]$ అయినపుడు

$x_0 = a, x_i = x_0 + ih, b = x_0 + nh$ అనుకోండి.

$(x_1 - h, x_1 + h)$ $(x_3 - h, x_3 + h)$, ... అంతరాలలో దోషాలు (7) ను బట్టి అంచనా వేయవచ్చు.

$\int_a^b f(x)\, dx$, లోని దోషము $\frac{-h^5}{90}\left[f^{iv}(x_1) + f^{iv}(x_3) + \ldots + f^{iv}(x_{n-1})\right]$

$f^{iv}(x_1), f^{iv}(x_3)$ ... లలోని గరిష్ఠము $f^{iv}(x_m)$ అయితే

$$\text{దోషము} \leq -\frac{n}{2}\cdot\frac{h^5}{90} f^{iv}(x_m) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{iv}(x_m)$$

$(\because b - a = nh)$

$f^{iv}(x) = 0$ అయితే దోషము సున్న అవుతుందని తెలుస్తున్నది. దీనిని బట్టి $f(x)$ నాలుగో తరగతి కంటే తక్కువ తరగతి బహుపది అయితే సింప్సన్ $\frac{1}{3}$ నియమము సమాకలని ఖచ్చిత విలువనిస్తుంది.

10.8.3 సింప్సన్ 3/8 నియమములో దోషము

ఈ సందర్భములో $(x_0, x_0 + 3h)$ అంతరాన్ని తీసుకొందాము.

$$I_e = \int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)\,dx = g(x_0 + 3h) - g(x_0)$$

$$I_a = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h) + f(x_0 + 3h)\right]$$

(8) $$= \frac{3h}{8}\left[8f(x_0) + 12hf'(x_0) + 12h^2 f''(x_0) + 9h^3 f'''(x_0) + \frac{71}{8}h^4 f^{iv}(x_0) + \ldots\right]$$

$$I_e = 3h\,f(x_0) + \frac{9h^2}{2} f'(x_0) + \frac{9}{2} h^3 f''(x_0) + \frac{27}{8} h^4 f'''(x_0) + \frac{81}{40} h^5 f^{iv}(x_0) + \ldots$$

$$\therefore \text{దోషము} = I_e - I_a = -\frac{3}{80} h^5 f^{iv}(x_0) + \ldots$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ లో దోషము} = -\frac{3}{80}h^5\left[f^{iv}(x_0) + f^{iv}(x_3) + \ldots + f^{iv}(x_{n-3})\right]$$

$f^{iv}(x_0), f^{iv}(x_3), \ldots f^{iv}(x_{n-3})$ లలో $f^{iv}(x_m)$ గరిష్ఠమైతే

$$\text{దోషము} = -\frac{3}{80} h^5 \cdot \frac{n}{3} f^{iv}(x_m) = -\frac{b-a}{80} h^4 f^{iv}(x_m)$$

$$(a < x_m < b).$$

10.8.4 వెడెల్ సూత్రంలో దోషము

$(x_0, x_0 + 6h)$ అంతరం తీసుకొంటే

$$I_e = \int_{x_0}^{x_0+6h} f(x)\,dx = g(x_0 + 6h) - g(x_0)$$

$$I_a = \frac{3h}{8}\Big[f(x_0) + 5f(x_0+h) + f(x_0+2h) + 6f(x_0+3h)$$
$$+ f(x_0+4h) + 5f(x_0+5h) + f(x_0+6h)\Big]$$

కుడివైపున ఉన్న ప్రమేయాలను టేలర్ శ్రేణిలో విస్తరణ చేసి సూక్ష్మీకరిస్తే

(9) $$I_a = \frac{3h}{10}\Big[20f(x_0) + 60h\,f'(x_0) + 120h^2 f''(x_0) + 180h^3 f'''(x_0)$$
$$+ 216h^4 f^{iv}(x_0) + 216h^5 f^{v}(x_0) + \frac{1111}{6} f^{vi}(x_0)\Big]$$

(10) $$I_e = 6h\,g'(x_0) + 18h^2 g''(x_0) + 36h^3 g'''(x_0) + 54h^4 g^{iv}(x_0)$$
$$+ \frac{324}{5}h^5 g^{v}(x_0) + \frac{324}{5}h^6 g^{vi}(x_0) + \frac{7776}{140}h^7 g^{vii}(x_0) + \dots$$
$$= 6h f(x_0) + 18h^2 f'(x_0) + 36h^3 f''(x_0) + 54h^4 f'''(x_0)$$
$$+ \frac{324}{5}h^5 f^{v}(x_0) + \frac{324}{5}h^6 f^{vi}(x_0) + \frac{7776}{140}h^7 f^{vi}(x_0) + \dots$$

(9), (10) లను బట్టి

$$I_e - I_a = -\frac{1}{140}h^7 f^{vi}(x_0) + \dots$$

(6వ పరిమాణము కంటే ఎక్కువ పరిమాణముగల అవకలజాలను విసర్జించగా)

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ లో దోషము } = -\frac{1}{140}h^7\Big[f^{vi}(x_0) + f^{vi}(x_6) + \dots + f^{vi}(x_{n-6})\Big]$$

$f^{vi}(x_0), f^{vi}(x_6), \dots, f^{vi}(x_{n-6})$ లలో గరిష్టము $f^{vi}(x_m)$ అయితే

$$\text{దోషము } \le -\frac{1}{140}h^7\cdot\frac{n}{6}f^{vi}(x_m) = -\frac{b-a}{840}h^6 f^{vi}(x_m)$$

$$(a < x_m < b)$$

$f(x)$ ఆరోవ తరగతి కంటె తక్కువ తరగతి బహుపది అయితే వెడెల్ సూత్రం సమాకలని ఖచ్చిత విలువనిస్తుంది.

10.9 సారాంశము

న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రంతో క్షేత్ర కలన సూత్రాలనురాబట్టాం. మిగిలిన అంతర్వేశన సూత్రాలనుపయోగించికూడా క్షేత్రకలన సూత్రాలను రాబట్టవచ్చు. సింప్సన్ సూత్రంకన్న వెడెల్సూత్రంతో

ఎక్కువ యదార్థత రావడం గమనించాం. అయితే వెడెల్ సూత్రం అనువర్తించాలి అంటే ఏడు వరుస ప్రమేయపు విలువలు కావాలి. మొత్తం ఇచ్చిన ప్రమేయపు విలువల సంఖ్య 6 యొక్కగుణకాలుగా ఉండాలి.

ఛేదన దోషాలను అంచనా వేయడానికి క్షేత్రకలన సూత్రాలలోని శేష పదాలను రాబట్టాము.

10.10 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. క్రింది ఇచ్చిన ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానాలు వ్రాయండి.

1. a) సంఖ్యాత్మక అవకలనమంటే ఏమిటో వివరీకరించండి. సార్వత్రిక క్షేత్రకలన సూత్రాన్ని వ్యుత్పన్నం చేయండి.

   b) $y = \sin x$ వక్రానికి, x అక్షానికి, $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ ల మధ్య వైశాల్యం కనుక్కోండి.

2. a) సింప్సన్ నియమము, సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రాలను వ్యుత్పన్నం చేయండి.

   b) వెడెల్ సూత్రం నుపయోగించి దిగువ పట్టికనుండి $\int_0^6 y\,dx$ ఉజ్జాయింపు విలువ కనుక్కోండి.

x :	0	1	2	3	4	5	6
y :	14.6	16.1	17.6	19.0	20.4	21.7	23.0

3. a) సింప్సన్ $\frac{3}{8}$ నియమము, వెడెల్ సూత్రాలను వ్యుత్పన్నం చేయండి.

   b) ఈ రెండు సూత్రాల నుపయోగించి $\int_0^{12} \frac{dx}{1+x^2}$ ఉజ్జాయింపు విలువలు కనుక్కోండి.

II. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.

1. సింప్సన్ 3/8 నియమమును $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ కు వర్తింపజేసి π యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ కనుగొనండి.

2. [3, 5] రేంజ్‌ను 8 సమభాగాలుగా చేయడం ద్వారా $\int_3^5 \frac{1}{2+x^2}\,dx$ విలువకు అంచనా వేయండి.

3. దిగువ పట్టిక నుండి $\int_0^1 f(x)\,dx$ విలువ కనుక్కోండి.

x :	0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x)$:	0.5	0.4794	0.4594	0.4398	0.4207

4. సంఖ్యాత్మక పద్ధతులలో వచ్చే వివిధ రకాల దోషాలను వివరించండి..

సమాకలని $\int_a^b f(x)\,dx$ లోని దోషము వెడెల్ సూత్రం ద్వారా కనుగొనండి.

5. సింప్సన్ 1/3, 3/8 నియమాల ద్వారా ఒక నిశ్చిత సమాకలని విలువలలోని దోషానిన అంచనా వేయండి.

6. సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రం ద్వారా $\int_a^b f(x)\,dx$ సమాకలనిలోని దోష పరిమాణ మెంత?

ఖండిక – 11 : ఆయిలర్ పరివర్తన, అనంత స్పర్శీయ విస్తరణలు

విషయసూచిక

11.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు : (i) నెమ్మదిగా అభిసరించే శ్రేణుల మొత్తాలను గణించడానికి ఇచ్చిన శ్రేణులలోని మొదటి పదాన్ని, దాని భేదాలను వాడే (a) ఆయిలర్ పరివర్తన సూత్రాన్ని (b) ఆయిలర్ – మెక్లారిన్ సూత్రాన్ని రాబట్టాలి. (ii) అనంత స్పర్శీయశ్రేణిని నిర్వచించి, ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని అనంత స్పర్శీయ శ్రేణిలో విస్తరించి, ఆ ప్రమేయపు విలువ సాధ్యమైనంత accuate గా రావడానికి ఏపదంతో శ్రేణిని truncate చేయవచ్చో తెలుసుకోగలగాలి. (iii) ఒక ప్రమేయము $f(x)$ ను x పదాలతో అభిసరణ శ్రేణిగా విస్తరణ చేయగలిగితే $x = yf(x)$ రూపంలో ఉన్న అంతర్లీన సంబంధం నుండి లగ్రాంజ్ శ్రేణి ద్వారా x ను y పదాల శ్రేణిగావ్రాయగలగాలి.

11.2 ఉపోద్ఘాతం

గణితశాస్త్రంలో మనకు అనేకచోట్ల శ్రేణుల మొత్తం కనుక్కొనే సమస్య ఎదురౌతాయి. అయితే మనకు అభిసరణ చెందే శ్రేణులయందే మనకు అభిరుచి. అయితే ఒక్కొక్కసారి మెల్లగా అభిసరణచెందే శ్రేణులు కూడా మనకు ఎదురౌతూ ఉంటాయి. వీటి మొత్తం గణించడం కొంచెం కష్టమైన పని. ఇటువంటి శ్రేణుల మొత్తాలను కనుక్కోడానికి మనం ఆయిలర్ – పరివర్తన సూత్రాన్ని రాబడతాం. ఈ సూత్రంలో శ్రేణిలోని మొదటి పదం, దాని యొక్క భేదాలను మాత్రం వాడతాము. ఇదే విధంగా ఆయిలర్ – మెక్లారిన్ శ్రేణి సూత్రాన్ని కూడా రాబట్టాము. ఇది శ్రేణుల, సమాకలనముల మధ్య సంబంధాన్ని తెలియపరుస్తుంది. సాధారణంగా ఆయిలర్ – మెక్లారిన్ విస్తరణలు అనంత స్పర్శీయ శ్రేణులనిస్తాయి. అనంతస్పర్శీయ శ్రేణిలో అంటే శ్రేణిలోని కొన్ని పదాలవరకు అభిసరణ చెందుతూ, మిగిలిన పదాలవల్ల శ్రేణి అపసరణంచెందే అనంతశ్రేణి. ఈ శ్రేణులను గణించడంలో శ్రేణిలోని ఏపదంవరకు తీసుకొంటే accurate result వస్తుందో తెలుసుకోవాలి. $x = yf(x)$ అనే రూపంలో అంతర్లీన సంబంధం నుండి x ను y పదాల విస్తరింపచేయడానికి లెగ్రాంజ్ శ్రేణి సూత్రాన్ని కూడా రాబట్టాము.

11.3 ఆయిలర్ పరివర్తన

ఏకాంతర శ్రేణి

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

(i) $u_n > 0$, (ii) $u_n > u_{n+1}$, (iii) $u_n \to 0$ as $n \to \infty$ ని పరిశీలిద్దాము.

S నెమ్మదిగా అభిసరించే శ్రేణి అయితే దాని మొత్తమును గణించడం అంత సులభతరముకాదు. కాబట్టి S ను కనుగొనడానికి శ్రేణి మొదటి పదము, అగ్రభేదాలు (Leading Differences) వాడతాము.

భేద పట్టిక

$$\begin{array}{ccccc}
u_1 & & & & \\
 & \Delta u_1 & & & \\
u_2 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta u_2 & & \Delta^3 u_1 & \ldots\ldots \\
u_3 & & \Delta^2 u_2 & \vdots & \vdots \\
 & \Delta u_3 & \vdots & \vdots & \vdots \\
u_4 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

ఇక్కడ

$$u_2 - u_1 = \Delta u_1.$$

$$u_2 = (1 + \Delta)\, u_1 = \mathrm{E} u_1$$

ఇదే విధంగా,

$$u_3 = (1 + \Delta)\, u_2 = \mathrm{E} u_2 = \mathrm{E}^2 u_1 \ldots$$

$$S = u_1 - \mathrm{E}u_1 + \mathrm{E}^2 u_1 - \mathrm{E}^3 u_1 + \ldots \text{ అని వ్రాయవచ్చు.}$$

$$= \left(1 - \mathrm{E} + \mathrm{E}^2 - \mathrm{E}^3 + \ldots\right) u_1$$

$$= \frac{1}{1 + \mathrm{E}} u_1 = \frac{1}{2 + \Delta} u_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)^{-1} u_1$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{4} - \ldots\right) u_1$$

(1) $$= \frac{1}{2}\left(u_1 - \frac{1}{2}\Delta u_1 + \frac{1}{4}\Delta^2 u_1 - \ldots\right)$$

సూత్రం (1) ని ఆయిలర్ పరివర్తన అంటాము.

ఉదా 1 : $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$ అయితే ఆయిలర్ పరివర్తన నుపయోగించి $\frac{\pi^2}{12}$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన

భేదాలు చిన్నవిగా ఉండేందుకు మొదటి పదిపదాల మొత్తాన్ని ముందుగా కనుగొందాము.

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots - \frac{1}{10^2} = 0.81796$$

$$\text{అంటే } \sum_{x=1}^{10} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2} = .81796$$

పదొవ పదము తరువాత పదాలకు భేదపట్టికను తయారుచేద్దాము.

x	$u = u_x = \frac{1}{x^2}$	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$	$\Delta^5 u$
11	.0082645					
		–.0013201				
12	.0069444		.0002929			
		–.0010272		–.0000809		
13	.0059172		.0002120		.0000265	
		–.0008152		–.0000544		–.0000102
14	.0051020		.0001576		–.0000163	
		–.0006576		–.0000381		
15	.0044444		.0001195			
		–.0005381				
16	.0039063					

$$\sum_{x=11}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2} = \frac{1}{2}\Big[.0082645 + \frac{1}{2}(.0013201) + \frac{1}{4}(.0002929)$$

$$+ \frac{.0000809}{8} + \frac{.0000265}{16} + \frac{.0000102}{32} + \ldots\ldots\Big]$$

$$= .0045049.$$

మొదటి 10 పదాలు కాక మిగిలిన పదాల మొత్తము = .0045049

$$\therefore \frac{\pi^2}{12} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2} = .81796 + .0045049$$

$$= 0.8224649.$$

గమనిక : $\frac{\pi^2}{12}$ విలువ 0.8224649 అని రావడానికి దత్తశ్రేణి రూపంలో సుమారు 10^2 పదాలదాకా తీసుకొని కూడాల్సి వచ్చేది.

$g(x)$ ఒక ప్రమేయము,

(2) $\Delta g(x) = f(x)$ అనుకోండి.

$g(x+1) - g(x) = f(x)$ $\left(h = 1 \text{ అని తీసుకొంటే}\right)$

$x = 0$ ప్రతిక్షేపిస్తే $g(1) - g(0) = f(0)$

$x = 1$ ప్రతిక్షేపిస్తే $g(2) - g(1) = f(1)$

$x = 2$ ప్రతిక్షేపిస్తే $g(3) - g(2) = f(2)$

... ...

$x = n-1$ ప్రతిక్షేపిస్తే $g(n) - g(n-1) = f(n-1)$

వీటన్నింటిని కూడితే

(3) $$g(n) - g(0) = \sum_{n=0}^{n-1} f(n) = \sum_{n=0}^{n-1} f(x)$$

టేలర్ శ్రేణి నుపయోగిస్తే

$$f(c+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} h^n$$

$c = x, h = 1$ అని వ్రాస్తే

(4) $$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right) f(x) = e^D f(x)$$

(5) కాని $f(x+1) = E f(x) = (1+\Delta) f(x)$

(4), (5) ల నుంచి

$$e^D = 1 + \Delta \text{ అని వస్తుంది.}$$

(2) నుంచి

$$g(x) = \frac{1}{\Delta} f(x) = \frac{1}{e^D - 1} f(x) = D^{-1} \frac{D}{e^D - 1} f(x)$$

ఇప్పుడు $$\frac{D}{e^D - 1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{2!} + \frac{D^2}{3!} + \frac{D^3}{4!} + \dots\right)}$$

$$= 1 - \left(\frac{D}{2!} + \frac{D^2}{3!} + \dots\right) + \left(\frac{D}{2!} + \frac{D^2}{3!} + \dots\right)^2 - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}D + \frac{1}{12}D^2 - \frac{1}{720}D^4 + \frac{1}{30240}D^6 - \dots$$

$$\therefore g(x) = \left[D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}D - \frac{1}{720}D^3 + \frac{1}{30240}D^5 - \dots\right] f(x)$$

$$= D^{-1} f(x) - \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{12} f'(x) - \frac{1}{720} f'''(x) + \dots$$

$x = 0$ అని ప్రతిక్షేపిస్తే

$$g(0) = D^{-1} f(0) - \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{12} f'(0) - \frac{1}{720} f'''(0) + \dots$$

$x = n$ అని ప్రతిక్షేపిస్తే

$$g(n) = D^{-1} f(n) - \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{12} f'(n) - \frac{1}{720} f'''(n) + \dots$$

(3) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x) = g(n) - g(0) = \int_0^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)]$$

$$+ \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] - \frac{1}{720}[f'''(n) - f'''(0)] + \dots$$

ఇరువైపులా $f(n)$ కలపగా

(6) $$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(n) + f(0)]$$

$$+ \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] - \frac{1}{720}[f'''(n) - f'''(0)] + \dots$$

సూత్రం (6) ను ఆయిలర్ - మెక్లారిన్ సూత్రమంటాము. ఈ సూత్రం సమాకలని విలువ కనుగొనడానికంటే ఎక్కువగా శ్రేణి మొత్తం కనుగొనడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదా 2 : ఆయిలర్ - మెక్లారిన్ సూత్రం నుపయోగించి $\sum_{x=1}^{n} x^2$ కనుక్కోండి.

సాధన

$f(x) = x^2$ అని తీసుకొని (6) లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\sum_{x=0}^{n} x^2 = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(n^2 + 0\right) + \frac{1}{12}(2n - 0)$$

$$= \frac{n^3}{2} - 0 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \left(x = 0 \text{ అయినప్పుడు } x^2 = 0 \text{ కాబట్టి}\right)$$

ఉదా 3 :

$$f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+nh) = \frac{1}{h}\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(a) + f(a+nh)]$$

$$+ \frac{h}{12}[f'(a+nh) - f'(a)] - \frac{h^3}{720}[f'''(a+nh) - f'''(a)] + \ldots$$

అని రుజావు చేయండి.

సాధన

$f(a+yh) = \mathrm{F}(y)$ అనుకోండి.

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)$$

$$= \sum_{y=0}^{n} f(a+yh) = \sum_{y=0}^{n} f(y)$$

$$= \int_{0}^{n} \mathrm{F}(y)\,dy + \frac{1}{2}[\mathrm{F}(n) + \mathrm{F}(0)] + \frac{1}{12}[\mathrm{F}'(n) - \mathrm{F}'(0)]$$

$$- \frac{1}{720}[\mathrm{F}'''(n) - \mathrm{F}'''(0)] + \ldots$$

$$\therefore \mathrm{F}'(y) = f'(a+yh)\cdot h$$

$$\mathrm{F}''(y) = f''(a+yh)\cdot h^2$$

....

$$= \int_{0}^{n} f(a+yh)\,dy + \frac{1}{12}[f(a+nh) - f(a)]$$

$$+ \frac{h}{12}[f'(a+nh) - f'(a)]$$

$$- \frac{1}{720}h^3[f'''(a+nh) - f'''(a)] + \ldots$$

$x = a + yh$ అని వ్రాస్తే

$$\int_{0}^{n} \mathrm{F}(y)\,dy = \frac{1}{h}\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{n} f(a+rh) = \frac{1}{h}\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,[f(a+nh)+f(a)]$$

$$+\frac{h}{12}[f'(a+nh)-f'(a)] - \frac{h^3}{720}\,[f'''(a+nh)-f'''(a)] + \ldots$$

ఉదా 4 : $n = 10^5$ అయితే $f(n) = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \log n$ విలువ గణించండి.

సాధన

ఆయిలర్ - మెక్లారిన్ సూత్రం నుండి

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = \int_{1}^{n} \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + 1\right] + \frac{1}{12}\left[-\frac{1}{n^2} + 1\right] - \frac{1}{720}\left[-\frac{6}{n^4} + 6\right] + \ldots$$

$$= \log n - \log 1 + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{n^2} + 1\right) - \frac{1}{720}\left[-\frac{6}{n^4} + 6\right] + \ldots$$

$$f(n) = \sum_{r=1}^{n=10^5} \frac{1}{r} - \log n = \frac{1}{2}(1 + .00001)$$

$$+\frac{1}{12}(1 - .0000000001) - .0083333$$

$$= 0.575005.$$

11.5 అనంత స్పర్శీయ విస్తరణలు

ఒక అనంత శ్రేణిలోని కొన్ని పదాల వరకు తీసుకొంటే ఆ శ్రేణి అభిసరణం చెందుతూ, మిగిలిన పదాలను కూడా తీసుకొన్నప్పుడు శ్రేణి అపసరణం చెందుతూ ఉంటే ఆ శ్రేణిని అనంత స్పర్శీయ శ్రేణి అంటారు. అటువంటి శ్రేణుల మొత్తం గణించాల్సి వచ్చిన ప్పుడు యదార్థ విలువ కొరకు శ్రేణిలోని ఏ పదం వరకు తీసుకొని కూడాలి అనేది తెలుసుకోవాలి.

$S_n(x)$, n పదాలు కలిగిన పరిమిత శ్రేణి అయి, $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ R_n(x) = \infty$ (x స్థిరము), $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\ R_n(x) = 0$ (n స్థిరము) అయ్యేటటువంటి పదము $R_n(x)$ అయితే

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

విస్తరణను ప్రమేయము $f(x)$ కు అనంత స్పర్శీయ శ్రేణి అంటాము.

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}} \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\, x^{-r} - f(x)\right) x^n = 0 \;(n \text{ స్థిరము})$$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(\sum_{r=0}^{n} a_r x^{-r} - f(x)\right)x^n = \infty \quad (x \text{ స్థిరము})$$

అయ్యేటటువంటి అపసరణశ్రేణి $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{-r}$ ను $f(x)$ కు అనంత స్పర్శీయ శ్రేణి అని పాయింకారె (Poincare's) నిర్వచించాడు. అభిసరణశ్రేణి లేక అపసరణ శ్రేణిలకు మామూలుగా ఇచ్చే నిర్వచనాలకంటే ఈ నిర్వచనం చాలా భిన్నంగా ఉన్నది. దీనికంటే కొంచెము మోటుగా (curde) ఉండే నిర్వచనాన్ని పైన ఇచ్చాము. ఎక్కువ భాగము అనంత స్పర్శీయ శ్రేణులు విభాగ సమాకలనీయం నుండి జనకమవుతాయి.

x విలువ పెద్దది అయినప్పుడు $\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$ కనుక్కోవాలనుకోండి.

$$\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \int_x^{\infty} -\frac{1}{t}\left(-t\,e^{-t^2/2}\right)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{t}e^{-t^2/2} - \int e^{-t^2/2}\cdot\frac{1}{t^2}\,dt\right]_x^{\infty}$$

(విభాగ సమాకలనీయ పద్ధతి వల్ల)

$$= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_{\infty}^{x} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^{\infty}\left\{-\frac{1}{t^3}\cdot\left(-te^{-t^2/2}\right)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \left[-\frac{1}{t^3}e^{-t^2/2} - \int \frac{3}{t^4}e^{-t^2/2}\,dt\right]_x^{\infty}$$

$$= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^{\infty}\frac{3}{t^4}e^{-t^2/2}\,dt$$

ఈ విధంగా విభాగ సమాకలనం చేస్తూపోతే

$$\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = e^{-x^2/2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{x^5} - \frac{1.3.5}{x^7} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\,\dots\,(2n-3)}{x^{2n-1}}\right]$$

$$+ (-1)^n R_n \text{ వస్తుంది.}$$

ఇక్కడ $R_n = 1.3.5 \ldots (2n-1) \int_x^\infty e^{-t^2/2} \cdot \frac{1}{t^{2n}}\, dt$

ఈ పద్ధతిని అపరిమితంగా పొడిగిస్తూ పోతే

$$(1) \qquad \int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt \sim e^{-x^2/2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{x^5} - \frac{1.3.5}{x^7} + \ldots\right]$$

(~ గుర్తుకు అనంత స్పర్శీయంగా సమానము అని అర్థము)

(~ అభిసరణను చూపదని గ్రహించవలె.)

క్రమపద్ధతిలో చూపితే

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt = e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{x} - R_1$$

$$= e^{-x^2/2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right] + R_2$$

$$= e^{-x^2/2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right] - R_3$$

... ...

... ...

అనంత స్పర్శీయ విస్తరణలో R_n యొక్క రూపము చాల కీలకమైనది.

$$(2) \qquad R_n = 1.3.5 \ldots (2n-1) \int_x^\infty e^{-t^2/2} \cdot \frac{1}{t^{2n}}\, dt$$

$$= \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{x^{2n+1}} e^{-x^2/2} - R_{n+1}$$

ఇక్కడ R_n, R_{n+1} ధన ప్రమేయాల సమాకలనములు గాబట్టి ధనాంకాలు. కాబట్టి (2) లోని కుడివైపు ఉన్న మొదటి పదము కంటే R_n చిన్నది. దీనివల్ల అనంత స్పర్శీయ శ్రేణిలో ఎన్ని పదాల వరకు తీసుకోవలెనన్నది నిర్ణయించగలము. R_n మొదట తగ్గి తరువాత పెరుగుతూ చివరకు చాల పెద్ద విలువ అవుతుంది.

$x = 2$ అని తీసుకొంటే,

$$\int_2^\infty e^{-t^2/2}\, dt \sim e^{-2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1.3}{2^5} - \ldots\right]$$

ఇక్కడ $R_3 < e^{-2} \cdot \frac{1.3.5}{2^7}$ (R_3 మీద ఇది కనిష్ఠ హద్దు)

$\therefore \int_2^\infty e^{-t^2/2}\, dt = e^{-2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1.3}{2^5}\right] + R_3$ తీసుకొందాము.

$$= .46875\, e^{-2} + R_3$$

ఇక్కడ $R_3 \;<\; .11719\, e^{-2}$

కాబట్టి $.46875\, e^{-2} < \int_2^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt < (.46875 + .11719)\, e^{-2}$ అని వ్రాయవచ్చు.

x పెద్దదైనప్పుడు అనంత స్పర్శీయ శ్రేణిలోని పదాలు పెరగడం ప్రారంభమయ్యేముందు చాలా చిన్నవి అవుతాయి. అందువల్ల మనము చాల ఖచ్చితమైన విలువను పొందగలుగుతాము. అనంత స్పర్శీయ శ్రేణిలో వీలయ్యే యదార్థతకు హద్దు ఉన్నది. ఈ హద్దు R_n యొక్క కనిష్ట విలువ మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఆయిలర్ – మెక్లారిన్ విస్తరణ సర్వసామాన్యంగా అనంత స్పర్శీయ శ్రేణులనిస్తుందని గ్రహించవచ్చు.

ఉదా 1 : $\int_4^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$ విలువ యదార్థతకు వీలయినంత దగ్గరగా కనుక్కోండి.

సాధన

$$\int_4^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = e^{-8}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1.3}{4^5} - \frac{1.3.5}{4^7} + \frac{1.2.5.7}{4^9} - \frac{1.3.5.7.9}{4^{11}} + \frac{1.3.5.7.9.11}{4^{13}} - \frac{1.3.5.7.9.11.13}{4^{15}}\right]$$

R_n మీద కనిష్ట హద్దు

$$R_8 \;<\; e^{-8}\left[\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{4^{17}}\right]$$

అంటే $\;<\; e^{-8} \times .000027$

కాబట్టి $\int_4^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = e^{-8}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1.3}{4^5} - \frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{4^{17}}\right] + R_8$

$$= e^{-8}\,[.236919] + R_8$$

$$\therefore \int_4^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt \simeq .236919\, e^{-8}$$

ఉదా 2 :

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\, dt = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n} + (-1)^n R_n$$

$R_n \;<\; \frac{n!}{x^{n+1}}$ అని చూపండి.

సాధన

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t} dt = e^x \int_x^{\infty} \frac{1}{t} \cdot e^{-t}\, dt$$

$$= e^{-x} \left[-\frac{1}{t} e^{-t} - \int \frac{1}{t^2} e^{-t}\, dt \right]_x^{\infty}$$

$$= \frac{e^x \cdot e^{-x}}{x} - e^x \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{x} - e^x \left[-\frac{1}{t^2} e^{-t} - \int \frac{2\,!}{t^3} e^{-t}\, dt \right]_x^{\infty}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + e^x \int_x^{\infty} \frac{2!}{t^3} e^{-t}\, dt$$

విభాగ సమాకలనాన్ని ఈ విధంగా వర్తింపజేస్తూ పోతే

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{x^n} + (-1)^n \mathrm{R}_n$$

ఇక్కడ $\mathrm{R}_n = \dfrac{n!}{x^{n+1}} - \mathrm{R}_{n+1}$

$\mathrm{R}_n, \mathrm{R}_{n+1}$ ధన ప్రమేయాల సమాకలనాలు కాబట్టి, ధనాంకాలు.

$$\therefore \mathrm{R}_n < \frac{n!}{x^{n+1}}$$

11.6 లగ్రాంజ్ శ్రేణులు

$f(x)$ ప్రమేయాన్ని

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \left(a_0 \neq 0\right). \qquad \ldots (3)$$

రూపంలో x పదాలలో అభిసరించే శ్రేణిగా విస్తరణ చేయవచ్చుననుకోండి.

ఒక్కొక్కసారి $x = y\,f(x)$ అంతర్లీన సంబంధము నుండి x ను y పదాలలో చెప్పవలసిన అవసరం కలగవచ్చు. ... (4)

అంటే

$$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots \qquad \ldots (5)$$

అయ్యేటట్లుగా స్థిరాంకాలు $b_0, b_1, b_2, \ldots$ లను కనుక్కోవాలి.

$$x = y - yx \Rightarrow x(1+y) = y$$

$$x = \frac{y}{1+y} = y\left[1 - y + y^2 - \ldots\right] = y - y^2 + y^3 - \ldots$$

ఉదా 4 : $x = y \cdot e^{-x^2}$ అయితే x ను y పదాలలో శ్రేణిగా వ్రాయండి.

సాధన

$$[f(x)]^n = \left[e^{-x^2}\right]^n = e^{-nx^2} \left(\text{ఇక్కడ } f(x) = e^{-x^2}\right)$$

$$Y = e^{-nx^2} \text{ అనుకోండి.}$$

$$\frac{dY}{dx} = -2nx \cdot Y \Rightarrow \frac{dY}{dx} + 2nx\, Y = 0$$

ఈ సమీకరణాన్ని $n-2$ పర్యాయాలు వ్యుత్పన్నం చేస్తే

$$Y_{n-1} + 2n\left[x \cdot Y_{n-2} + (n-2)\, Y_{n-3}\right] = 0$$

$x = 0$ ప్రతిక్షేపించితే

$$Y_{n-1}(0) = -2n(n-2)\, Y_{n-3}(0)$$

n సరి సంఖ్య అయినపుడు వ్యుత్పన్నాలు సున్న అవుతాయి అని గ్రహించవచ్చు. n బేసిసంఖ్య అయితే

$n = 3 \qquad Y_2(0) = -2.3.1\, Y(0)$

$n = 5 \qquad Y_4(0) = -2.5.3\, Y_2(0)$

$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$

$n = n \qquad Y_{n-1}(0) = -2n(n-2)\, Y_{n-3}(0)$

వీటన్నింటిని గుణించితే

$$Y_{n-1}(0) = (-2)^{\frac{n-1}{2}} \left(3^2 - 3.2\right)\left(5^2 - 5.2\right) \ldots \left(n^2 - 2n\right)$$

$\therefore b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -6, b_4 = 0, b_5 = 45, b_6 = 0, \ldots$

కాబట్టి $x = y - 6y^3 + 45y^5 - \ldots$ అవుతుంది.

11.7 సారాంశము

మెల్లగా అభిసరణ చెందే శ్రేణుల మొత్తాలను గణించడానికి ఆయిలర్ పరివర్తన సూత్రాన్ని, ఆయిలర్ - మెక్లారిన్ శ్రేణి సూత్రాన్ని రాబట్టాము. ఆయిలర్ పరివర్తన సూత్రంలో, ఇచ్చిన శ్రేణి మొదటి పదం, దాని భేదాలను వాడాము. ఆయిలర్ - మెక్లారిన్ శ్రేణి సూత్రం, ఒక ప్రమేయపు శ్రేణి మొత్తం, సమాకలనుల మధ్య ఒక సంబంధాన్ని ఏర్పరిచింది. అనంత స్పర్శీయ శ్రేణి మొత్తాన్ని గణించేటప్పుడు, ఏ పదం వరకు

తీసుకొంటే సరియైన రిజల్టు వస్తుందో చూసి శ్రేణిలోని పదాలను ఛేదనం చేయాలి. ఆ సందర్భంలో R_n తక్కువ అవుతుంది. $x = y f(x)$ అనే రూపంలో ఇచ్చిన అంతర్లీన సంబంధంనుండి, లెగ్రాంజ్ శ్రేణి సూత్రం x ను y పదాలలో శ్రేణిగా తెలియజేస్తుంది.

11.8 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. క్రింది ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానం వ్రాయండి.

1. (a) శ్రేణి మొత్తము కనుగొనడానికి ఆయిలర్ పరివర్తన పద్ధతి విశదీకరించండి.

   (b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$ అయితే π^2 విలువ గణించండి.

2. (a) ఆయిలర్ - మెక్లారిన్ సూత్రమును వ్యుత్పన్నం చేయండి.

   (b) సంఖ్యాత్మకంగా $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{4}$ అని రుజువు చేయండి.

3. (a) ఆయిలర్ పరివర్తన నుపయోగించి, 6 దశాంశ స్థానముల వరకు శ్రేణి

   $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots$ మొత్తము కనుగొనండి.

   (b) ఆయిలర్ మెక్లారిన్ సూత్రం నుపయోగించి

   $$\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{n^2 (n+1)}{4}$$ అని నిరూపించండి.

4. (a) $\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$ కు విభాగ సమాకలనీయంను వర్తింపజేసి అనంత స్పర్శీయ శ్రేణిని జనింపజేయ వచ్చునని చూపండి.

   (b) $\int_3^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$ విలువను అంచనా వేయండి

5. (a) లగ్రాంజ్ సూత్రాన్ని వ్యుత్పన్నం చేయండి.

   (b) $x = y e^{-x}$ అని ఇస్తే x ను y పదాలలో శ్రేణిగా వ్రాయండి.

ఖండిక – 12 : సాధారణ అవకలన సమీకరణాల సంఖ్యాత్మక సాధనలు

విషయసూచిక

12.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు : (i) ఆయిలర్ దాని సవరిత పద్ధతులు, (ii) రుంగె – కుట్ట పద్ధతులు (iii) ప్రిడిక్టార్ – కరెక్టార్ పద్ధతుల ద్వార మొదటి తరగతి ఒకటో డిగ్రీ అవకలన సమీకరణాన్ని సంఖ్యాత్మకంగా సాధించగలగాలి. వచ్చిన సాధనను సమీకరణ సాధన (తెలిసి ఉంటే) తో పోల్చి ఆ పద్ధతి యొక్క యదార్థతను రాబట్టగలగాలి. వివిధ పద్ధతుల యొక్క మంచి, చెడ్డలను గురించి చర్చించాలి.

12.2 ఉపోద్ఘాతం

మొదటి తరగతి, ఒకటో డిగ్రీ అవకలన సమీకరణ సాధారణ రూపం

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

ఈ సమీకరణం సాధించడానికి అనేక సాంప్రదాయిక పద్ధతులు ఉన్నాయి. ఈ పద్ధతులు ఉన్నా, ఒక్కొక్కసారి, అవకలన సమీకరణం సాధించడం ఎంతో కష్టం కావచ్చు, లేదా అసలు సాధించబడకపోవచ్చు. అయితే, సంఖ్యలు గుణకాలుగా గలిగిన బీజీయ, బీజాతీత సమీకరణాలను కావలసిన యదార్థత వచ్చేవరకు ఏ విధంగా సంఖ్యాత్మకంగా సాధించగలమో, అదే విధంగా సంఖ్యలు గుణకాలుగాగల అవకలన సమీకరణాలను

కూడా కావలసిన యదార్థతవచ్చేవరకు సంఖ్యాత్మకంగా సాధించవచ్చు. అయితే సంఖ్యాత్మక పద్ధతులలో x, y ల మధ్యగల సంబంధాన్ని (సాధనను) రాబట్టలేము కాని, తొలిబిందు విలువతో మొదలుకొని x విలువల వద్ద y విలువలు రాబడతాము.

సంఖ్యాత్మక పద్ధతుల ద్వారా మొదటి తరగతి మొదటి డిగ్రీ సమీకరణం సాధించడానికి కొన్ని ముఖ్యమైన పద్ధతులను ఈ ఖండికలో చర్చిస్తాము.

12.3 ఆయిలర్ పద్ధతి

ఈ పద్ధతి అన్ని పద్ధతులకెల్లా పురాతనమైనది, సరళమైనది. తొలిబిందు సమస్య (initial value problem) యొక్క సాధారణ రూపం

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y)\\ y\left(x = x_0\right) &= y_0\end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ లు (1) వ సమీకరణానికి వరుసగా $x = x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ ల వద్ద రాబట్టవలసిన పారంపరిక సాధనలు అనుకొందాం. ఇక్కడ $x_n = x_0 + nh, n = 1, 2, \ldots$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ కు $y = F(x)$ ఒక సాధారణ సాధన అనుకొందాం. ఈ సాధన యొక్క గ్రాఫ్ xy-తలంలో ఒక వక్రం అనుకొందాం. వక్రంలో ఏదైనా రెండు బిందువుల మధ్య దూరం అతి తక్కువగా తీసుకొన్నప్పుడు, ఆ వక్రాన్ని ఒక సరళరేఖతో ఉజ్జాయింపు చేయవచ్చు. (x_0, y_0) బిందువు వద్ద వక్రాన్ని దాని స్పర్శరేఖతో ఉజ్జాయింపు చేద్దాం. ఈ స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}\left(x - x_0\right) = \left(x - x_0\right) f\left(x_0, y_0\right)$$

$$\text{లేదా } y = y_0 + \left(x - x_0\right) f\left(x_0, y_0\right).$$

$x = x_1$ కు, y విలువ

$$y_1 = y_0 + \left(x_1 - x_0\right) f\left(x_0, y_0\right).$$

$$\text{లేదా } y_1 = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right). \quad \ldots (2)$$

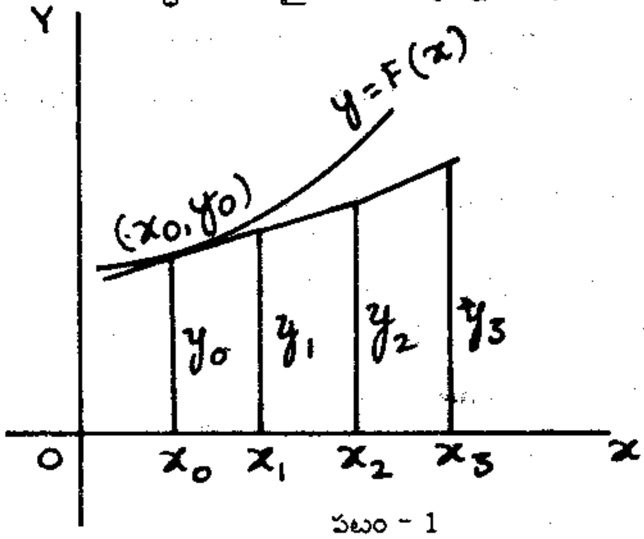
ఇదే విధంగా $\left[x_1, x_2\right]$ అంతరంలో వక్రాన్ని $\left(x_1, y_1\right)$ బిందువు గుండాపోయే సరళరేఖతో అంచనావేస్తే దాని వాలు $f\left(x_1, y_1\right)$ అవుతుంది. ఈ స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$y_2 = y_1 + hf\left(x_1, y_1\right).$$

ఇదే విధంగా, సాధారణ సూత్రం

$$y_n = y_{n-1} + hf\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right) \text{ వస్తుంది.}$$

ఈ విధంగా, ఆయిలర్ పద్ధతిలో, అసలైన సాధన వక్రాన్ని, కొన్ని వరస సరళరేఖలతో ఉజ్జాయింపు చేస్తాము.



పటం - 1

ఉదా 1 : ఆయిలర్ పద్ధతి నుపయోగించి

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{1+x}, y(0) = 2.$$

సాధనమును $x = 1$ వద్ద, అంటే $y(1)$ కనుక్కోండి.

సాధన

$x_0 = 0, y_0 = 2$ అని ఇవ్వబడింది. $h = 0.2$ అని తీసుకొంటే

$$f(x_0, y_0) = \frac{-y_0}{1+x_0} = \frac{-2}{1+0} = -2$$

$$y_1 = y(0.2) = 2 + (0.2)\ (-2) = 1.6$$

$$y_2 = y(0.4) = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.6 + (.2)\left(-\frac{1.6}{1.2}\right) = 1.334$$

$$y_3 = y(0.6) = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.334 + (.2)\left(-\frac{1.334}{1.4}\right) = 1.143$$

$$y_4 = y(0.8) = 1.143 + (.2)\left(-\frac{1.143}{1.6}\right) = 1.000$$

$$y_5 = y(1.0) = 1.000 + (.2)\left(-\frac{1}{1.8}\right) = .899.$$

$\therefore x_1 = 1$ దగ్గర y విలువ $= y(1) = 0.899$.

గమనిక : ఆయిలర్ పద్ధతి అంతగా ప్రయోగాత్మకం కాదు. ఒక అంతరంలో $\frac{dy}{dx}$ గనుక వేగంగా మార్పు చెందుతున్నట్లయితే, అంతర ప్రారంభదశలో దాని విలువ యిచ్చే సాధనమునకు యదార్థ సాధనమునకు ఎంతో భిన్నంగా ఉండవచ్చు. ఈ పద్ధతిలో యదార్థ సాధన వక్రంను చిన్న చిన్న సరళరేఖా ఖండముల అనుక్రమముతో అంచనావేస్తాము. సరళరేఖా ఖండాలు యదార్థ వక్రంతో విచలించ (Deviate) వచ్చు. అభివృద్ధి (Improved) పరచిన ఆయిలర్ పద్ధతి ఈ ప్రతిబంధకాన్ని తొలగిస్తుంది.

$$y^{v} = 8y'y'' + 6y''^2 + 2yy^{iv} \quad y^{v}(0) = 16$$

$$y(x) = 0 + \frac{x}{1!}\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}\cdot 0 + \frac{x^3}{3!}\cdot 2 + \frac{x^4}{4!}\cdot 0 + \frac{x^5}{5!}\cdot 16 + \ldots$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

$$y(0.2) = 0.2027.$$

$y(0.4)$ రాబట్టడానికి

$x_0 = 0.2, y_0 = y(0.2) = .2027$తో ప్రారంభిస్తాము.

$$y'(0.2) = 1 + [(.2027)]^2 = 1.0411$$

$$y''(0.2) = 2 \times .2027 \times 1.0411 = .4221$$

$$y'''(0.2) = 2(1.0411)^2 + 2(.2027)(.4221) = 2.3389$$

$$y(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{1!} y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y''' + \ldots$$

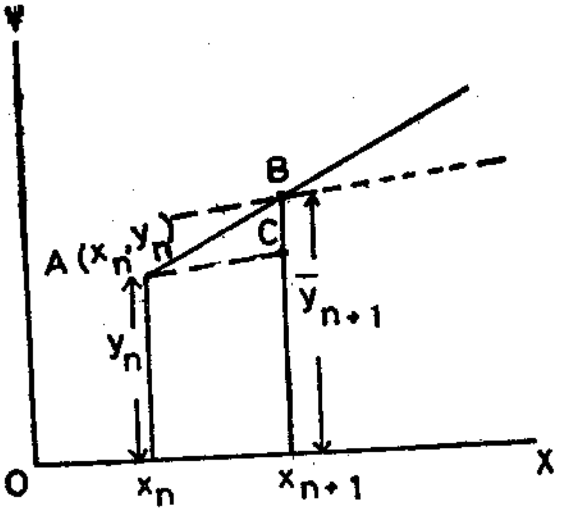
ఇక్కడ $x - x_0 = 0.4 - 0.2 = 0.2$

$$\therefore y(0.4) = .2027 + (0.2)(1.0411) + \frac{(0.2)^2}{2!}(.4221) + \frac{(0.2)^3}{3!}(2.3389) + \ldots$$

$$= 0.4224.$$

12.5 హ్యూన్ పద్ధతి లేదా అభివృద్ధిపరచిన ఆయిలర్ పద్ధతి (Heun's Method or Improved Euler Method)

ఆయిలర్ సూత్రంతో y_{n+1} ను కనుగొనడానికి (x_n, y_n), $(x_n + h, y_n + hy_n')$ బిందువుల దగ్గర వాలుల సగటును ఈ పద్ధతిలో వాడుతాము. ఈ పద్ధతిని జ్యామితీయ పరంగా వివరిద్దాము.



పటం - 2

$x = x_n$ దగ్గర సమాచారమును వాడి $\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ యొక్క సాధనమును $x = x_{n+1}$ వద్ద కనుక్కోవాలి. దీనికిగాను A (x_n, y_n) గుండా $f(x_n, y_n)$ వాలుతో ఒక సరళరేఖను గీద్దాము. ఇది $x = x_{n+1}$ ను B $\left(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}}\right)$ వద్ద ఖండిస్తుంది.

ఆయిలర్ సూత్రం ఉపయోగిస్తే

$$\overline{y_{n+1}} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

సాధన వక్రం మీది $\left(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}}\right)$ బిందువు దగ్గర వాలు $= f\left(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}}\right), f(x_n, y_n),$

$f\left(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}}\right)$ ల సగటు, వాలుగా గల సరళరేఖ A గుండా, గీస్తే $x = x_{n+1}$ ను C వద్ద ఖండిస్తుందను కోండి. C యొక్క y – నిరూపకము $x = x_{n+1}$ వద్ద అవకలన సమీకరణము యొక్క సాధనము నిస్తుంది. అంటే

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}}\right)\right] \quad \dots (6)$$

ఈ పద్ధతిలో $f(x, y)$ యొక్క వ్యుత్పన్నాన్ని కనుక్కోవలసిన పనిలేదు.

ఈ పద్ధతి రెండో తరగతి పద్ధతని చూపిద్దాము. (1) నుండి

$$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \\ & + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + h\,\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x}\right. \\ & \left. + h\,(x_n, y_n)\,\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\right] + \dots \end{aligned}$$

(టేలర్ శ్రేణి విస్తరణను వాడితే)

$$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & y_n + hf(x_n, y_n) \\ & + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + f(x_n, y_n)\,\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\right) + \dots \end{aligned}$$

టేలర్ శ్రేణి సూత్రంతో పోలిస్తే h^2 పదం వరకు ఈ సూత్రం ఏకీభవిస్తుందని గ్రహించుతాము.

12.6 సవరిత ఆయిలర్ పద్ధతి లేక అభివృద్ధిపరచిన బహుభుజి పద్ధతి (Modified Euler's Method or Improved Polygon Method)

పైన చర్చించిన పద్ధతిలో రెండు భిన్న బిందువుల దగ్గర వాలుల సగటును వాడాము. ఈ పద్ధతిలో రెండు బిందువుల మధ్యబిందువు దగ్గర వాలును గణిస్తాము. జ్యామితీయ పరంగా వివరిద్దాము.

12.7 సార్వత్రిక రంజి – కుట్ట రెండో తరగతి పద్ధతి

రంజి – కుట్ట పద్ధతులకుండే ముఖ్య లక్షణాలు

(i) y_{n+1} ను కనుక్కోవడానికి $\left(x_n, y_n\right)$ వద్ద సమాచారం చాలు.

(ii) టేలర్ శ్రేణి పద్ధతిలో వలె $f(x, y)$ కు వ్యుత్పన్నాలు కనుక్కోవలసిన అవసరంలేదు.

(iii) రంజి – కుట్ట పద్ధతి p పరిమాణము గలదైతే, ఈ పద్ధతిలో h^p ఉన్న పదాల వరకు టేలర్ శ్రేణిలో ఏకీభవిస్తుంది (ఇది p తరగతి పద్ధతి అంటాము.)

ఆయిలర్ పద్ధతి, అభివృద్ధి పరిచిన ఆయిలర్ పద్ధతి సవరిత ఆయిలర్ పద్ధతులు పైమూడు లక్షణాలను తృప్తిపరుస్తాయి. కాబట్టి ఆయిలర్ పద్ధతిని రంజి – కుట్ట మొదటి తరగతి పద్ధతి అని, అభివృద్ధిపరచిన, సవరిత ఆయిలర్ పద్ధతులను రంజి – కుట్ట రెండొవ తరగతి పద్ధతి అంటాము.

పైన చెప్పిన రెండో తరగతి రంజి – కుట్ట పద్ధతులు రెంటిని సార్వత్రికము చేయవచ్చు.

రెండూ సూత్రాలూ దిగువ ఇచ్చిన సాధారణ సమాసము నుండి వస్తాయి.

(7) $$y_{n+1} = y_n + hg\left(x_n, y_n, h\right)$$

ఇక్కడ $g\left(x_n, y_n, h\right) = a_1 f\left(x_n, y_n\right) + a_2 f\left(x_n + b_1 h, y_n + b_2 h y_n'\right)$

$$y_n' = f\left(x_n, y_n\right)$$

హాన్ పద్ధతిలో $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, b_1 = b_2 = 1.$

సవరిత ఆయిలర్ పద్ధతిలో $a_1 = 0, a_2 = 1, b_1 = b_2 = \frac{1}{2}.$

$f(x, y)$ కి రెండో పరిమాణ అవిచ్ఛిన్న పాక్షిక అవకలనులుంటే దీనికి టేలర్ శ్రేణి విస్తరణ

(8) $$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(x_n, y_n\right) + \left(x - x_n\right) f_x\left(x_n, y_n\right) + \left(y - y_n\right) f_y\left(x_n, y_n\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(x - x_n\right)^2 f_{xx}\left(\xi_0, \eta_0\right) + 2\left(x - x_n\right)\left(y - y_n\right) f_{xy}\left(\xi_0, \eta_0\right)\right. \\ &\left. + \left(y - y_n\right)^2 f_{yy}\left(\xi_0, \eta_0\right)\right] + \cdots \end{aligned}$$

ఇక్కడ $\xi_0 \in \left(x_n, x\right), \eta_0 \in \left(y_n, y\right)$,

$f_x, f_y \ldots$ పాక్షిక అవకలనులు

$x = x_n + b_1 h;\ y = y_n + b_2 hf$ అనుకుంటే

$$f\left(x_n + b_1 h, y_n + b_2 hf\right) = f + b_1 hf_x + b_2 hff_y + O\left(h^3\right)$$

$\therefore$ (7) ను

(9) $$y_{n+1} = y_n + h\left(a_1 f + a_2 f + h\left\{a_2 b_1 f_x + a_2 b_2 h f f_y\right\} + 0\left(h^3\right)\right)$$

అని వ్రాయవచ్చు.

దీనిని 12.4లోని (5) తో పోలిస్తే

(10) $a_1 + a_2 = 1$ $\left(hf\right.$ పదాలను పోల్చితే $\left.\right)$

(11) $a_2 b_1 = \frac{1}{2}, a_2 b_2 = \frac{1}{2}$ $\left(h^2 f_x, h^2 f f'_y\right.$ పదాలను క్రమంలో పోల్చితే $\left.\right)$

(10) (11) ల నుంచి 4 పరామితులను (Parameters) లు 3 సమీకరణాలలో ఉన్నాయని తెలుస్తుంది. కాబట్టి ఒక పరామితిని స్వేచ్ఛాయుతంగా (arbitrarily) ఎంచుకోవచ్చు.

ఉదాహరణకు $a_2 = \omega \neq 0$ అనుకుంటే $a_1 = 1 - \omega, b_1 = b_2 = \frac{1}{2\omega}$ అవుతాయి.

$\therefore$ సంబంధము (3)

(12) $$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\omega) f\left(x_n, y_n\right) + \omega f\left(x_n + \frac{h}{2\omega}, y_n + \frac{h}{2\omega} f\left(x_n, y_n\right)\right)\right] + 0\left(h^3\right)$$ అవుతుంది.

ఇది అతి సామాన్య రెండో తరగతి రంజి – కుట్ట పద్ధతి.

$\omega = \frac{1}{2}$ అయిన ప్పుడు హాన్ పద్ధతి,

$\omega = 1$ అయినప్పుడు సవరిత ఆయిలర్ పద్ధతి వస్తాయి.

12.8 రంజి – కుట్ట నాలుగో తరగతి సూత్రము

టేలర్ శ్రేణి విస్తరణలో h^4 పదం వరకు ఛేదించగా

$$y_{i+1} = y\left(x_i + h\right) = y_i + \frac{h}{1!} y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{2!} y_i''' + \frac{h^4}{2!} y^{iv}$$

ఇప్పుడు $y_i' = f\left(x_i, y_i\right)$

$$y_i'' = f_x\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_i, y_i\right) f_y\left(x_i, y_i\right) = f_x + f f_y$$

$$y_i''' = f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y\left(f_x + f f_y\right)$$

$$\begin{aligned} y_i^{iv} = {} & f_{xxx} + 2f f_{xxy} + f^2 f_{xyy} + f^2 f_{yyy} \\ & + f_y\left(f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}\right) + 3\left(f_x + f f_y\right)\left(f_{xy} + f f_{yy}\right) \\ & + f_y^2\left(f_x + f f_y\right) \end{aligned}$$

$$\therefore y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + f f_y\right) + \frac{h^2}{6}\left[f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}\right.$$

(1) $$+f_y\left(f_x+ff_y\right)\Big]+\frac{h^4}{24}\Big[f_{xxx}+3ff_{xxy}+3f^2f_{xyy}+f^2f_{yyy}+f_y\left(f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy}\right)+3\left(f_x+ff_y\right)\left(f_{xy}+ff_{yy}\right)+f_y^2\left(f_x+ff_y\right)\Big]$$

ఇక్కడ $f_y = f_x + f\cdot f_y$

(2) $$k_1 = hf(x,y),\ k_2 = hf\left(x+mh,\ y+mk_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x+nh,\ y+nk_2\right),\ k_4 = hf\left(x+ph,\ y+pk_3\right)$$

అని నిర్వచిద్దాము.

ఇప్పుడు y_{i+1} ను

(3) $y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$ రూపంలో వ్రాయడానికి ప్రయత్నించుదాము.

$$g_1 = f_x + ff_y,\ g_2 = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}$$

$$g_3 = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^2 f_{yyy}$$

అని సూచిస్తే

టేలర్ శ్రేణి నుపయోగించగా సూత్రం (2) నుంచి

(4) $$\begin{cases} k_1 = hf \\ k_2 = h\left[f + mhg_1 + \dfrac{m^2h^2}{2}g_2 + \dfrac{m^2h^2}{6}g_3 + \ldots\right] \\ k_3 = h\Big[f + nhg_1 + \dfrac{h^2}{2}\left(n^2g_2 + 2mn\,f_y\,g_1\right) \\ \qquad + \dfrac{h^3}{6}\left(n^2g_3 + 3m^2n\,f_y g_2 + 6mn^2 f_y' g_1\right) + \ldots\Big] \\ k_4 = h\Big[f + phg_1 + \dfrac{h^2}{2}\left(p^2g_2 + 2np\,f_y g_1\right) \\ \qquad \dfrac{h^3}{6}\left(p^3g_2 + 3n^2\,pf_y g_2 + 6np^2 f_y' g_1 + 6mnpf_y{}^2 g_1\right) + \ldots\Big] \end{cases}$$

(4) ను (3) లో ప్రతిక్షేపించి (1), (3) లను పోల్చితే

$$(5)\quad \begin{cases} a+b+c+d = 1 & cmn + dnp = \frac{1}{6} \\ m + cn + dp = \frac{1}{2} & cmn^2 + dnp^2 = \frac{1}{8} \\ bm^2 + cn^2 + dp^2 = \frac{1}{3} & cm^2 n + dn^2 p = \frac{1}{12} \\ bm^3 + cn^3 + dp^3 = \frac{1}{4} & dmnp = \frac{1}{24} \end{cases}$$

(5) యొక్క ఏ సాధనమైనను మనకు ఉపయోగకరమే

$m = n = \frac{1}{2}$, $\quad$ $p = 1$ అని తీసుకొంటే

$a = d = \frac{1}{6}$, $\quad$ $b = c = \frac{1}{3}$

$\therefore$ (2) నుంచి

$$k_1 = hf(x, y), k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), k_4 = hf\left(x + h, y + k_3\right)$$

(3) నుంచి

$$(6)\quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

దీనిని రంజి – కుట్ట నాలుగో తరగతి సూత్రం అంటాము.

ఈ సూత్రంలో f విలువ నాలుగు బిందువుల వద్ద కావలసి వస్తుంది.

ఇది సూత్రం (1)తో h^4 పదాలవరకు ఏకీభవిస్తుంది.

ఉదా 1 : $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$ ని $x = 0.2$ దగ్గర సాధించండి.

సాధన $\quad h = 0.2$ అని తీసుకొంటే

$$y(0.2) = y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad \text{((6) నుంచి)}$$

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right) = (0.2)\left(0^2 + 1^2\right) = 0.2$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$= (0.2)\left[(0.1)^2 + (1.1)^2\right] = 0.244$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$= (0.2)\left[(0.1)^2 + (1.122)^2\right] = 0.254$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)$$

$$= (0.2)\left[(0.2)^2 + (1.254)^2\right] = 0.323$$

$$\therefore y(0.2) = 1 + \frac{1}{6}(0.2 + .488 + .508 + .323) = 1.253.$$

12.9 ప్రెడిక్టార్ – కరెక్టార్ పద్ధతులు

మొదట రెండో తరగతి ప్రెడిక్టార్ - కరెక్టార్ పద్ధతి చర్చించుదాము. ఈ పద్ధతులలో సరళమైనది, మనము ఇంతకుముందు చర్చించిన హాన్ పద్ధతి.

(7) $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)\right]$$

ఆయిలర్ సూత్రం నుంచి

(8) $$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right)$$

(పైన వ్రాసిన (0) ఆరంభ అంచనాను సూచిస్తుంది.)

ఈ విధంగా y_{n+1} విలువను ఆయిలర్ పద్ధతినుంచి ముందుగా తెలుసుకొంటాము.

(8) నుంచి y_{n+1} విపులవను (7) లో ప్రతిక్షేపించితే y_{n+1} కు సవరణనిస్తుంది.

y_{n+1} యొక్క సవరిత (corrected) విలువ

(9) $$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right)\right]$$

దీనికంటె మెరుగైన అంచనా రావడానికి $f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}\right)$ కనుగొని (7) లో ప్రతిక్షేపించవలె. యదార్థ విలువకు బాగా దగ్గర ఉజ్జాయింపు వచ్చేదాకా ఈ పద్ధతిని పునరుక్తం చేయవచ్చు.

ఈ విధంగా క్రింది పునరుక్త సూత్రం వస్తుంది.

(10) $$y_{n+1}^{(m)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(x_n, y_n\right) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(m-1)}\right)\right]$$

12.10 మిల్నె పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో కూడా y_{n+1} విలువ ముందుగా తెలుసుకొని తరువాత సవరిస్తాము న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రం

$$g(x) = g\left(x_0 + uh\right) = g\left(x_0\right) + \frac{u}{1}\Delta g\left(x_0\right) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 g\left(x_0\right)$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 g\left(x_0\right) + \dots$$

దీనిలో $g(x) = y'$, $g\left(x_0\right) = y_0'$ అని వ్రాస్తే

(11) $$y' = y_0' + \frac{u}{1!}\Delta y_0' + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0' + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0' + \ldots$$

ఇరువైపులా x_0 నుంచి x_0+h కు సమాకలనం చేస్తే

$$\int_{x_0}^{x_0+4h} y'\,dx = h\int_0^4 \left(y_0' + u\,\Delta y_0' + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0' + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0'(x_0) + \ldots \right) du$$

$$(\because dx = h\,du)$$

$$\therefore y_{x_0+4h} - y_0 = h\left[4y_0' + 8\Delta y_0' + \frac{20}{3}\Delta^2 y_0' + \frac{8}{3}\Delta^3 y_0'\right]$$

(మూడో పరిమాణ భేదాలవరకే తీసుకొంటే)

అంటే $y_4 - y_0 = \frac{4h}{3}\left[2y_1' - y_2' + 2y_3'\right]$

లేదా $y_4 = y_0 + \frac{4h}{3}\left(2y_1' - y_2' + 2y_3'\right)$

ఈ విధంగా

(12) $$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left[2y_{n-2}' - y_{n-1}' + 2y_n'\right]$$

ఇది మిల్నె ప్రిడిక్టార్ సూత్రము.

ఇప్పుడు (11) ను x_0 నుంచి x_0+2h వరకు సమాకలనం చేద్దాము.

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y'\,dx = h\int_0^2 \left(y_0 + u\,\Delta y_0' + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0' + \ldots \right) du$$

$$\therefore y_2 - y_0 = h\left[2y_0' + 2\Delta y_0' + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0'\right]$$

(రెండో పరిమాణ భేదాలవరకే తీసుకొంటే)

$$y_2 = y_0 + \frac{h}{3}\left(y_0' + 4y_1' + y_2'\right)$$

ఈ విధంగా మిల్నె కరెక్టార్ సూత్రం

(13) $$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(y_{n-1}' + 4y_n' + y_{n+1}'\right)$$

(13) లో కుడివైపున (12) నుండి పొందిన y_{n+1} విలువ వాడబడింది. ప్రిడిక్టార్ - కరెక్టార్ సూత్రాలు f పదాలలో వ్రాస్తే

$$\overline{y_{n+1}} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n\right)$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n-1} + 4f_n + \overline{f_{n+1}}\right)$$

(పై సూత్రాలలో ప్రిడిక్టార్ సూత్రంలోని విలువను కరెక్టార్ సూత్రంలో వాడిన గుర్తుగా y_{n+1} పైన '—' గుర్తు వ్రాయబడింది.)

ఈ పద్ధతిని వర్తింపజేయడానికి సాధన కావలసిన బిందువుకు ముందు బిందువులు మూడింటి వద్ద సాధనలు తెలిసి ఉండాలి.

ఉదా 2 : $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$ ను మిల్నె పద్ధతి నుపయోగించి $x = 2.0, 2.5$ దగ్గర సాధించండి.

సాధన

మిల్నె సూత్రం వాడటానికి $x = 0.5, 1.0, 1.5$ దగ్గర $y, \frac{dy}{dx}$ విలువలు ముందుగా సాధించాలి.

$x_0 = 0, y_0 = 1$ ఇవ్వబడింది. $h = 0.5$ అని తీసుకొంటే,

ఆయిలర్ సూత్రం ద్వారా

$y_1 = y(0.5) = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right) = 1 + (0.5)(1) = 1.5$

$y_2 = y(1.0) = y_1 + hf\left(x_2, y_2\right) = 2.5 + (0.5)(3.5) = 4.25$

ఈ విధంగా

x :	0	0.5	1.0	1.5
y :	1	1.5	2.5	4.25
$\frac{dy}{dx}$:	1	2.0	3.5	5.75

మిల్నె ప్రిడిక్టార్ సూత్రం

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2y_{n-2}' - y_{n-1}' + 2y_n'\right)$$

లో $n = 3, h = 0.5$ వ్రాస్తే

$$y(2.0) = y_4 = 1 + \frac{2}{3}\left[2(2.0) - 3.5 + 2(5.75)\right] = 9.0$$

మిల్నె కరెక్టార్ సూత్రం నుండి

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}\left[y_2' + 4y_3' + y_4'^{(p)}\right]$$

(పైన వ్రాసిన 'p' ప్రిడిక్టార్ విలువను సూచిస్తుంది.)

$$= 2.5 + \frac{0.5}{3}(3.5 + 4(5.75) + 11.0) = 8.75$$

$$\left(\because y_4'^{(p)} = f\left(x_4, y_4\right) = x_4 + y_4 = 2.0 + 9.0 = 11.0\right)$$

$\therefore$ $y(2.0)$ కరెక్టార్ విలువ = 8.75.

$n = 4$ అని తీసుకొంటే

$$y_5 = y_1 + \frac{4h}{3}\left(2y_2' - y_3' + 2y_4'\right)$$

$$y(2.5) = y_5 = 1.5 + \frac{2}{3}(7.0 - 5.75 + 22) = 17$$

ఇది ప్రిడిక్టార్ విలువ

$$y(2.5) = y_5 = y_3 + \frac{h}{3}\left(y_3' + 4y_4' + y_5'^{(p)}\right)$$

$$= 4.25 + \frac{0.5}{3}(5.75 + 44 + 19.5) = 15.79$$

$$= 15.79$$

ఇది సవరించిన విలువ.

ఉదా 3 : పై ఉదాహరణలో $h = 0.1$ గా తీసుకొని $y(0.5)$ కనుక్కోండి.

సాధన : ఇక్కడ $h = 0.1$. ఆయిలర్ సూత్రం నుంచి

$$y_1 = y(0.1) = 1 + (0.1)(1) = 1.01$$

$$y_2 = y(0.2) = 1.01 + (0.1)(1.11) = 1.21$$

$$y_3 = y(0.3) = 1.21 + (0.1)(1.41) = 1.351 \simeq 1.35$$

ఈ విధంగా

x :	0	0.1	0.2	0.3
y :	1	1.01	1.21	1.35
$\frac{dy}{dx}$:	1	1.11	1.41	1.65

ప్రిడిక్టార్ విలువ

$$y_4^{(p)} = y(0.4)^{(p)} = y_0 + \frac{4h}{3}\left(2y_1' - y_2' + 2y_3'\right)$$

$$= 1 + \frac{0.4}{3}(2.22 - 1.41 + 3.3)$$

$$= 1.548.$$

రెండవ భాగం

కంప్యూటర్ ప్రోగ్రామింగ్ ప్రాథమిక సూత్రాలు

బ్లాక్ – 5 : కంప్యూటర్ ప్రోగ్రామింగ్ ప్రాథమిక సూత్రాలు – ఫోర్ట్రాన్ – IV

ఉపోద్ఘాతం

ప్రస్తుతం మనం ప్రతిరంగంలో ఎలక్ట్రానిక్స్ (Electronics) ఉపయోగాలు చూస్తున్నాము. ఎలక్ట్రానిక్స్ యొక్క అతిశక్తివంతమైన, ఉపయోగకరమైన ఉత్పత్తియే నేడు మనం చూస్తున్న గణనయంత్రములు (కంప్యూటర్లు). కొన్ని మిలియన్ల గణనలను కొద్ది క్షణాలలో చేసి, చాలా ఖచ్చితమైన ఫలితాలనుఅందించగల ఎలక్ట్రానిక్ పరికరాన్ని గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) అంటాము. గణన యంత్రాల నిర్మాణంలో జరుగుతున్న అభివృద్ధి నేటి సాంకేతిక విప్లవం యొక్క ముఖ్య సోపానం.

నేడు అన్నిరంగాలలోను, ముఖ్యంగా దత్తాంశ విశ్లేషణలోనూ, శాస్త్ర పరమైన మరియు సాంకేతిక పరమైన ప్రశ్నలకు ఫలితాలను రాబట్టుటకు గణన యంత్రాలను (కంప్యూటర్లను) ఉపయోగిస్తున్నాము. చాలా మంది, కంప్యూటర్ ఏదైనా చెయ్యగల్గుతుంది అని అనుకుంటారు. కానీ అది సరికాదు. మానవుడు చేయలేని ఏ పనిని గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) చేయలేదు. నేడు మనకు లభ్యమవుతున్న గణన యంత్రములు (కంప్యూటర్లు) అంకగణిత (Arithmetic), తార్కిక (Logical), ఉత్పాదక (Input) మరియు ఉత్పాదిత (Output) పరిక్రియలను చేయగల్గుతాయి.

ఏ గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) ఐనా స్వతంత్రంగా ఆలోచించలేదు మరియు స్వతంత్రంగా నిర్ణయములను తీసుకోలేదు. అందువల్ల ఏదేని ఇచ్చిన ప్రశ్నను సాధించాలి. అంతే సవివరమైన ఉపదేశాల సముదాయమును గణనయంత్రము (కంప్యూటర్)కు అందజేయవలెను. అందువలన ఇచ్చిన ప్రశ్నను విశ్లేషించాలి. జాగ్రత్తగా విశ్లేషించుటవలన మంచి ఫలితాలను పొందవచ్చు. ప్రశ్నలను విశ్లేషించుటకు మనము క్రమ చిత్రాలు, నిర్ణయ పట్టికలను ఉపయోగిస్తాము. గణన యంత్రాల (కంప్యూటర్ల) చరిత్ర ఆవశ్యకత మరియు పనిచేయు విధానము గురించి, క్రమ చిత్రాలు, నిర్ణయ పట్టికల గురించి ఖండికలో 13లో సోదాహరణంగా తెల్సుకుంటాము.

సవివరమైన ఉపదేశముల సముదాయమును అల్గారిథమ్ (Algorithm) అంటాము. తెలుగు, ఇంగ్లీషు లేదా హింది మొదలగు భాషలలో అల్గారిథమ్‌ను వ్రాస్తే, గణన యంత్రము అర్థము చేసుకోలేదు. గణన యంత్రము అర్థముచేసుకొనే భాషలోని వ్రాయాలి. ఈ భాషలను ప్రణాళి రచనా భాషలు (Program Writing Languages) లేదా ఉన్నత భాషలు (High Level Languages) లేదా యంత్ర స్వతంత్ర భాషలు అని అంటాము. ఫోర్ట్రాన్, కోబాల్, పాస్కల్, బేసిక్ మొదలగునవి కొన్ని ముఖ్యమైన భాషలు. ఫోర్ట్రాన్ భాష యొక్క నేటి రూపము ఫోర్ట్రాన్-IV. ఈ ఖండికలో ఫోర్ట్రాన్-IV భాషకు సంబంధించిన వివరాలను తెల్సుకుందాము.

దత్తాంశ విశ్లేషణకు బైనరీ సరణి (ప్రాతిపదిక 2 సరణి)ని ఉపయోగిస్తాము. గణనయంత్రములు (కంప్యూటర్లు) అన్నీ కూడా, సంఖ్యలను జ్ఞప్తి యూనిట్ (Memory Unit) లో బైనరీ సరణి సంఖ్యలుగా ఉంచును. 15వ ఖండిక కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రాతిపదిక సరణుల గురించి, మరియు ఒక ప్రాతిపదిక సరణి నుంచి ఇంకొక ప్రాతిక సరణలోకి ఇచ్చిన సంఖ్యను మార్చుట గురించి తెల్పుకుందాము.

ఖండిక – 13 : కంప్యూటర్ పనిచేయు విధానము

ఖండిక – 14 : ఫ్రోట్రాన్ ప్రణాళి రచనా ఉపక్రమాలు

ఖండిక – 15 : సంఖ్యల మార్పిడి

ఖండిక – 16 : ఉత్పాదక, ఉత్పాదిత వాక్యములు

ఖండిక – 17 : నియంత్రణ వాక్యములు

ఖండిక – 18 : ఉప ప్రణాళికలు, సబ్ రొటీన్‌లు

ఖండిక – 13 : కంప్యూటర్ పనిచేయు విధానము

విషయ సూచిక

13.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరవాత మీరు : (i) కంప్యూటర్ సాధారణ రూపం అనుసరించి, కంప్యూటర్ పనిచేసే తీరును తెలుసుకోగలగాలి, (ii) ఇచ్చిన సమస్యలను విశ్లేషించి, ప్రణాళి వ్రాయడం కొరకు, వాటికి క్రమ చిత్రాలు నిర్ణయ పట్టికలు వ్రాయగలగాలి.

13.2 ఉపోద్ఘాతం

గణన యంత్రం (కంప్యూటర్) ఒక ఎలక్ట్రానిక్ పరికరం. వీటి నిర్మాణంలో జరుగుతున్న అభివృద్ధి నేటి సాంకేతిక విప్లవం యొక్క ముఖ్య సోపానం. ప్రతి రంగంలోను కాలం యొక్క విలువ మనకందరికి తెలుసు. మనమందరము మన ప్రశ్నలకు ఖచ్చితమైన సమాధానాలను సాధ్యమైనంత తొందరగా పొందాలని ఆశిస్తాము. దత్తాంశ విశ్లేషణ రంగంలోఅవసరమైన ఫలితాలను అతి తక్కువ వ్యవధిలో అందించుట ద్వారా కంప్యూటర్లు ఒక విప్లవాన్ని తీసుకొని వచ్చినవి అనుటలో సందేహము లేదు.

13.2.1 గణన యంత్రం – ఆవశ్యకత, ఉపయోగాలు

నేడు అన్ని రంగాలలోను ప్రత్యేకముగా శాస్త్రపరమైన, సాంకేతిక పరమైన ప్రశ్నలకు ఫలితాలను రాబట్టుట కొరకు మనము గణన యంత్రా (కంప్యూటర్) లను ఉపయోగిస్తున్నాము. దత్తాంశము చాలా ఎక్కువ ఐన కొద్ది, గణన యంత్రా (కంప్యూటర్)లను ఉపయోగించకుండా దత్తాంశ విశ్లేషణ అసాధ్యం. గణన

యంత్రా (కంప్యూటర్)లను ఉపయోగించుట వలన తక్కువ వ్యవధిలో ఖచ్చితమైన ఫలితాలను పొందగల్గు చున్నాము.

పాఠశాలలు, కళాశాలలు తెరవాలన్నా, ఆసుపత్రులు ప్రారంభించాలన్నా, రవాణా సౌకర్యాలు కల్పించాలన్నా, దీనికి సంబంధించిన సమాచారం ప్రభుత్వానికి అవసరం. అంటే ఆయా ప్రాంతాలలో విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత ఉన్నది, ఆస్పత్రులలో ఎన్ని పడకలు కావాల్సి వస్తుంది, ఎన్ని బస్సులు కావాల్సి వస్తుంది మొదలగు సమాచారం ప్రభుత్వానికి కావలసి వస్తుంది. ఒక సంస్థ అధ్యక్షుడు, తన సంస్థ ఉత్పత్తులకు సంబంధించిన సమాచారం, అంటే అమ్మకం, లాభం మొదలైన వివరాలు కొన్ని క్షణాలలో తెల్సుకోవాల్సి వస్తుంది. కొన్ని సరుకుల ధరలు ఒక రోజులోఅనేక సార్లు మారుతు ఉండవచ్చు. సరుకులు కొనుగోలు చేసి, తిరిగి అమ్మేడి వ్యాపారస్థుడు తరుచుగా ప్రతి వస్తువు రేటు ఎట్లా మారుతున్నదో తెల్సుకోవలసి వస్తుంది. లాభాలు పొందాలంటే ఈ సమాచారం క్షణాలమీద అతనికి అందవలసి ఉంటుంది. ఇది గణన యంత్రా (కంప్యూటర్)లను ఉపయోగించుట వలననే సాధ్యపడుతుంది. ఇదే విధంగా, కంప్యూటర్ల ఉపయోగాల గురించి అనేక ఉదాహరణలు ఇవ్వవచ్చును.

శాస్త్రపరమైన, సాంకేతికపరమైన లేక పరిశోధనా సంబంధమైన ప్రశ్నలను సాధించుటలో చేయవలసిన గణనలు అపరిమితం. కనుక గణనయంత్రా (కంప్యూటర్)లను ఉపయోగించుట మినహా గత్యంతరం లేదు. ఉపగ్రహం నుండి అందిన సంకేతాల విశ్లేషణ వలన ఉపగ్రహం జాడ తెల్సుకోవచ్చు. సంకేతాల పౌనఃపున్యం ఉపగ్రహం స్థితి తెల్సుకొనుటకు చేయవలసిన గణనలు అపారము. క్షణికకాలంలోపైన పేర్కొన్న విశ్లేషణ, కంప్యూటర్లు ఉపయోగించుటవలననే సాధ్యము.

13.2.2 గణనయంత్రముల చరిత్ర – విస్తరణ

మొదట చేతితో పనిచేయించే గణన యంత్రాలు వాడెడివారు (Facit Machines మొదలగునవి). వీటి స్థానములో తర్వాత చిన్న చిన్న విద్యుత్ గణన యంత్రములు ప్రవేశపెట్టబడినవి. ప్రతి వ్రాయుటలో తప్పులు చేసే అవకాశము ముద్రణ సౌకర్యముగల చిన్న విద్యుత్ గణనయంత్రములు ప్రవేశ పెట్టబడుట వలన తొలగింపబడినది. తొందరగా ఫలితములను పొందుట ముఖ్యోద్దేశ్యము కాబట్టి, తొందరగా ఫలితములను అందించగల యంత్రములు రంగములోకి ప్రవేశించినవి. జ్ఞప్తియూనిట్ కల్గి, ఖచ్చితమైన సమాచారమును తొందరగా అందించగల గణన యంత్రములు (కంప్యూటర్లు) మానవ జీవితములో చాలా మార్పులను తీసుకొని వచ్చినవి.

సమాచారమును మనకు తెలియజేయు విధమును అనుసరించి గణన యంత్రాలు రెండు రకాలుగా విభజించబడినవి. మొదటిది అంకగణన యంత్రములు (Digital Computers) రెండవ రకము అనురూప గణన యంత్రములు (Analog Computers). సమాచారమును సంఖ్యల ద్వారా సూచించే దానిని అంకగణన యంత్రము అంటాము. ఇక మీదట గణన యంత్రము అంటే, అకగణయంత్రముగానే పరిగణిస్తాము. సమాచారమును అవిచ్ఛిన్న అనురూపములచే సూచించే గణన యంత్రమును అనురూప గణన యంత్రము అటాము. స్లయిడ్ రూలు (Slide rule) ఈ విధానము మీదే ఆధారపడి యున్నది.

1950వ సంవత్సరమువరకు గణన యంత్రముల నిర్మాణములో వాక్యూమ్ ట్యూబ్ (Vacuum Tubes) లను ఉపయోగించెడివారు. ఈ గణన యంత్రములను మొదటి తరము గణన యంత్రములు (first General Computers) అంటాము. తర్వాత గణన యంత్రముల తయారీలో వాక్యూమ్ ట్యూబ్‌ల బదులు పరిమాణములో చిన్నది, తక్కువ ఖర్చుగల ట్రాన్సిస్టర్ (Transistor) లను ఉపయోగించెడివారు. ఈ తరహా గణన యంత్రములను రెండవ తరము గణనయంత్రములు అంటాము. తర్వాత మూడవ తరము గణన యంత్రముల నిర్మాణములో ట్రాన్సిస్టర్‌ల బదులు అతి చిన్న పరిమాణము, అతి తక్కువ ధరతో కూడిన సర్క్యూట్లు (Circuits) ఉపయోగించబడినవి. మూడవ తరము గణన యంత్రముల నిర్మాణములో కూడాచాలా అభివృద్ధి జరిగినది. దీనిలో చెప్పుకోదగిన మార్పు మినీ గణనయంత్రము (Mini Computer) లను ప్రవేశ పెట్టుట.

చాలా మంది గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) ఏదైనా చెయ్యగల్గుతుంది అని అనుకుంటారు. కానీ అది సరికాదు. మానవుడు చేయలేని ఏ పనిని గణనయంత్రము చేయలేదు. మనము చేయగల్గిన గణనలను మాత్రమే చాలా తొందరగా చేసి, ఖచ్చితమైన ఫలితములను అందించగలదు. గణనలను మనముచేస్తే ఏదైనా తప్పులు చేయవచ్చు, కానీ గణనయంత్రము (కంప్యూటర్) తప్పులు లేకుండా చేయును.

నేడు మనకు లభ్యమవుతున్న గణనయంత్రము (కంప్యూటర్)లు అంకగణిత, తార్కిక, ఉత్పాదక మరియు ఉత్పాదిత పరిక్రియలను చేయగలవు. అంటే, సంఖ్యలకు సంబంధించిన కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారములు మరియు భాగహారములనుచేయగలదు. రెండు పరిమాణములను పోల్చుట మొదలగు తార్కిక పరిక్రియలను చేయగలదు. సూచనలను, దత్తాంశమును మన దగ్గర నుంచి చదవటమే కాకుండా మున్ముందు గణనలలో ఉపయోగించుట కొరకు భద్రపరచగలదు. ఫలితములను సరియైన రూపములో అందించగలదు. కొన్ని వేల అంకగణిత గణనలను కొద్ది క్షణాలలో చేయుటయే గాక, అత్యంత ఖచ్చితమైన ఫలితములను అందించగలదు.

13.2.3 ప్రణాళిక వ్రాయడానికి ప్లాన్

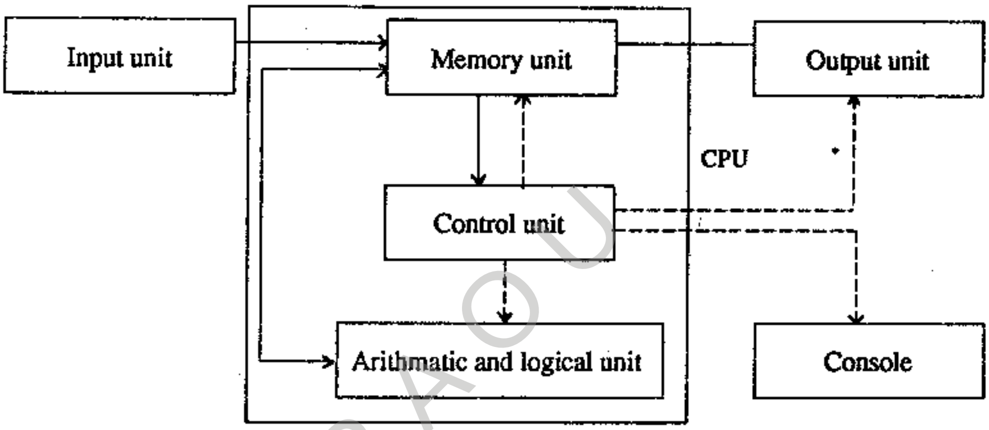
ఏదేని ఇచ్చిన ప్రశ్నను పరిష్కరించాలి అంటే ముందుగా ఆ ప్రశ్నను విశ్లేషించాలి. ఏ గణనయంత్రము ఐనా స్వతంత్రముగా ఆలోచింపలేదు, స్వతంత్రముగా ఏ సమస్యను పరిష్కరించలేదు కావున మనము సవివరమైన ఉపదేశముల సముదాయమును గణన యంత్రమునకు ఇవ్వవలెను. అటువంటి సవివరమైన ఉపదేశముల సమూహమును అల్‌గారిథమ్ అంటాము. తెలుగు, ఇంగ్లీషు లేదా ఏ ఇతర భాషలలో పై ఉపదేశముల సముదాయమును వ్రాస్తే గణన యంత్రము అర్థముచేసుకోలేదు. కనుక అల్‌గారిథమ్‌ను గణన యంత్రము అర్థము చేసుకొనే భాషలోకి మాత్రమే అనువదించాలి.

అల్‌గారిథమ్‌ను గణన యంత్రము అర్థము చేసుకొనే ఏదేని ఉన్నత భాషలో వ్రాసిన, దానిని ప్రణాళి (Program) అంటాము. ఈ ఉన్నత భాషను గణనయంత్ర ప్రణాళిరచనాభాష అని కూడా అంటాము. ఇచ్చిన ప్రశ్నకు గణనయంత్ర ప్రణాళి రచనలో ఉపదేశముల సముదాయమును తయారుచేయుట అంత కష్టము కాదు, కానీ ఇచ్చిన ప్రశ్నను ఒక క్రమ పద్ధతిలో జాగ్రత్తగా విశ్లేషించుట చాలా ముఖ్యమైన పనియేకాకుండా చాలా కష్టము కూడా. మొదట, ఇచ్చిన ప్రశ్న యొక్క భౌతిక నమూనాను గణితశాస్త్ర పరమైన నమూనాగా మార్చుకోవాలి అంటే, ఆ ప్రశ్నకు సంబంధించి గణిత సమీకరణములను వ్రాసుకోవాలి. తర్వాత ఈ సమీకరణములను సాధించుటకు సరియైన సంఖ్యాత్మక పద్ధతులను (Numerical methods) నిర్ణయించుకోవాలి.

13.3 గణనయంత్రము – సాధారణ రూపము

నిర్మాణతను బట్టి గణనయంత్రములు (కంప్యూటర్‌లు) పరిమాణములోనూ మరియు సామర్థ్యములోను తేడా కల్గియున్నప్పటికి, అన్నింటి యొక్క సాధారణ రూపము ఒకటే. సమాచార విశ్లేషణ, ఫలితముల నందించటానికి ప్రతి గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) ఈ క్రింది 5 ముఖ్యమైన యూనిట్లు కల్గి యుండును. అవి (1) ఉత్పాదక యూనిట్ (Input unit), (2) జ్ఞప్తి యూనిట్ (Memory unit), (3) నియంత్రణ యూనిట్ (Control unit), (4) అంకగణిత యూనిట్ (Arithmetic unit), (5) ఉత్పాదిత యూనిట్ (Output unit).

వేర్వేరు గణనయంత్రము (కంప్యూటర్‌లలో), ఉత్పాదక మరియు ఉత్పాదిత యూనిట్‌లు వివిధ రూపాలలో ఉండును. అంతేగాక ఒక గణన యంత్రము (కంప్యూటర), వివిధ రకములైన ఒకే యూనిట్ కల్గి యుండ వచ్చును. ప్రస్తుతము మనము గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) పనిచేయు విధానము మరియు పైన పేర్కొన్న 5 యూనిట్‌ల కార్యకలాపములను గురించి తెల్సుకుందాము. గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) యొక్క సాధారణ రూపము ఈ క్రింది బ్లాక్ చిత్రము (Block Diagram) లో సీయబడినది.



→ ఆదేశాలు మరియు దత్తాంశము

... నియంత్రణ ఆదేశాలు

Fig. 1 : *గణన యంత్రము (కంప్యూటర) – బ్లాక్ చిత్రము*

ఉత్పాదక (Input) యూనిట్ ద్వారా మనము ఆదేశాలు మరియు దత్తాంశమును గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) నకు అందిస్తాము. ఉత్పాదక యూనిట్ నుండి అవి జ్ఞప్తి (Memory) యూనిట్‌కు బదిలీ చేయబడతాయి. జ్ఞప్తి యూనిట్ విలాసము కల్గినటువంటి జ్ఞప్తి ప్రదేశముల సముదాయము. ఆదేశాల సమితిలో ఉపయోగించిన చలరాసి పేరు, జ్ఞప్తి యూనిట్‌లోని ఒక జ్ఞప్తి ప్రదేశము యొక్క విలాసము. ఒక చలరాశి విలువ, జ్ఞప్తి యూనిట్‌లోని చలరాసి పేరు విలాసముగాగల జ్ఞప్తి ప్రదేశములో దాచి ఉంచబడిన విలువ. గణనలలో ఉపయోగించటానికి ఒక చలరాశి విలువను జ్ఞప్తి యూనిట్‌నుంచి తీసుకొన్న ప్పటికీ, భవిష్యత్తులో మళ్ళీ గణనలలో ఉపయోగించుటకు వీలుగా అదే ప్రదేశములో ఉంచబడుతుంది. ఒకసారి ఉపయోగించినంత మాత్రాన దాని విలువ చెరిగిపోదు.

జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో ఒక సంఖ్య ఉంచబడింది అంటే - ఆ సంఖ్య, ఆస్థానంలో అంతక్రితము దాచి ఉంచబడిన పంఖ్యను తొలగించి ఈ సంఖ్య ఉండును. మొత్తం ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం)ను జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో

ఉంచబడిన తర్వాతే, ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం)ను అమలుపర్చుట ప్రారంభించును. ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం)ని అమలు పర్చుటలో ప్రథమంగా.నియంత్రణ (Control) యూనిట్ మొదటి ఆదేశమును తీసుకొనును. నియంత్రణ యూనిట్ మిగతాయూనిట్లను ఉత్తేజపరచి ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం)లోని ఆదేశాలను అమలుపర్చుటలో అజమాయిషీ వహించును. మొదటి ఆదేశాన్ని అమలుపర్చిన తర్వాత రెండవ ఆదేశాన్ని అమలుపర్చును. అదేవిధంగా వరుసగా ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం) లోని అన్ని అదేశాలను అమలుపర్చును. కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారములు మరియు భాగహారములు ఈ యూనిట్ ఆధ్వర్యంలో అంకగణిత యూనిట్‌లో జరుగును. ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం)లో వ్రాసిన వరుస క్రమములోనే ఆదేశాలు అమలుపర్చబడును. సనియమ శాఖా ఆదేశాల (Conditional branch instruction) ద్వారా సాధారణ వరుస క్రమమును మార్చవచ్చును. ఈ విధంగా నియంత్రణ యూనిట్ అన్ని ఆదేశాలను తీసుకొని ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం) ని అమలుపర్చుట పూర్తిచేయును. జ్ఞప్తి యూనిట్‌తో ఉంచబడిన ఫలితములను ఉత్పాదిత (Output) యూనిట్ అందుకొని మనకు అర్థమయ్యే రూపములో ముద్రించును లేదా మనకు కావలసిన విధముగా వివిధములైన ఉత్పాదిత మీడియా (Media) ద్వారా అందించును. జ్ఞప్తి యూనిట్, నియంత్రణ యూనిట్ మరియు అంకగణిత యూనిట్‌లను మూడింటిని కలిపి Central Processing Unit (C.P.U) అంటాం. అంకగణన యంత్రము కన్‌సోల్ (Consol) అనే మరియొక భాగము కల్గియుండును. దీని ద్వారా మనము కంప్యూటర్‌ను పనిచేయించగలము.

13.4 కొన్ని ఉత్పాదక మీడియా

కొన్ని ఉత్పాదక మీడియ మరియు దత్తాంశమును కంప్యూటర్‌కు ఈ మీడియా ద్వారా అందించుటకు ఉపయోగించు పరికరములు :

1. పంచ్‌డ్ కార్డ్ (Punched Card)
2. పంచ్‌డ్ పేపర్ టేప్ (Punched Paper Tape)
3. మెగ్నటిక్ టేప్ (Magnetic Tape)
4. మెగ్నటిక్ డిస్క్‌లు, ఫ్లాపీ డిస్క్‌లు (Magnetic Disks and Floppy Disks)
5. మెగ్నటిక్ ఇంక్ క్యారక్టర్ రీడర్ (Magnetic ink character reader)
6. ఆప్టికల్ క్యారక్టర్ రీడర్ (Optical Character Reader)
7. కన్‌సోల్ టైప్ రైటర్ (Console Typewriter)
8. కేథోడ్ రే ట్యూబ్ (Cathode Ray Tube Terminal (CRT))

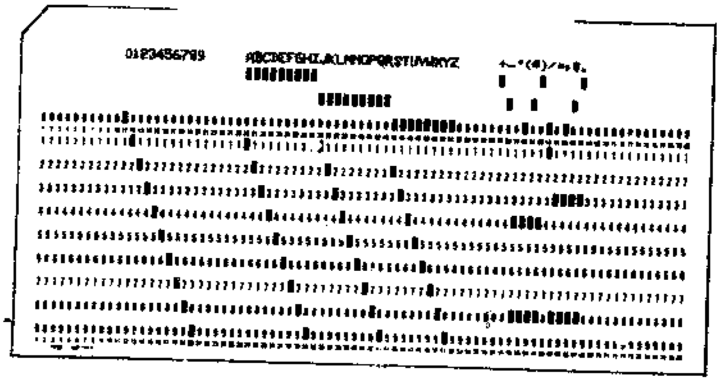
పైన పేర్కొన్న ఉత్పాదక మీడియా గురించి క్లుప్తంగా తెల్సుకుందాం.

పంచ్‌డ్ కార్డ్

ఇదివరలో కంప్యూటర్‌కు సమాచారం అందించడం కొరకు పంచ్‌డ్ కార్డులు వాడేవారు. అయితే, ఇప్పుడు అవి వాడుకలో లేవు. వీటిని కంప్యూటర్‌కు ఉత్పాదక /ఉత్పాదిత మీడియాగా వాడుటలో ఉన్న లోపం ఏమంటే, కంప్యూటర్ గణన జరిగినంత వేగంగా కార్డులనుండి సమాచారం చదవడం, కంప్యూటర్ నుండి సమాచారం కార్డులపై పంచ్ చేయడం వీలుకాదు.

సాధరంగా వాడే కార్డు 18.7 సెం.మీ. x 8.3 సెం.మీ. సైజులో ఉంటుంది. దీన్లో 80 కాలమ్స్ ఉంటాయి. ఈ కార్డుపై సాధారణంగా డాటాను ప్రింట్ చేయడానికి హోలరిత్ కోడ్‌ను వాడతారు. దీనిలో ప్రతీ

కార్యక్టరును ఏకైక సంయోగమైన పంచ్డ్ రంధ్రాలతో సూచిస్తారు. పటం - 2 హోలరిత్ కోడ్‌లో పంచ్ చేసిన కార్డును సూచిస్తుంది.



పటం - 2

పంచ్డ్ పేపర్ టేప్

పంచ్డ్ పేపర్‌టేప్ ఒక అవిచ్ఛిన్న కాగితపు పట్టీ. గుండ్రని రంధ్రములను కోడ్ ప్రకారము పంచ్ చేయడం ద్వారా ప్రతి అక్షరమును టేప్ మీద పొందుపరుస్తాము. ఒక్కొక్క అక్షరమునకు 5 నుంచి 8 వరకు రంధ్రములను పంచ్ చేసే వివిధ రకములైన కోడ్‌లు, వివిధ రకములైన కంప్యూటర్‌లలో ఉపయోగిస్తాము.

ఖర్చు తక్కువే కాకుండా, తేలికగా దగ్గర దగ్గరగా దత్తాంశమును పొందుపరచవచ్చు కాబట్టి, పంచ్డ్ పేపర్ టేప్ దత్తాంశమును ఉత్పాదక యూనిట్‌కు అందించటలో చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

ఒక్క క్షణంలో 100 నుంచి 1000 దాకా అక్షరములను చదవగల పంచ్డ్ పేపర్ రీడరు అనే ఉత్పాదక పరికరముద్వారా ఉత్పాదక యూనిట్ చదివి సమాచారము పొందుపరుస్తుంది.

మేగ్నటిక్ టేప్

కంప్యూటర్లలో ఉపయోగించెడి మేగ్నటిక్ టేప్, మామూలు టేప్‌రికార్డులలో ఉపయోగించే టేప్‌లాంటిది. ఇది లోహభస్మపు అతిచిన్న కణములచే పూతపూయబడిన అతి పల్చని మృదువైన టేపు మరియు రెండువైపుల అయస్కాంత లక్షణము కల్గినటువంటిది. ఒక ధ్రువాభిముఖత '1' కి సూచకముగా ఉండును. మరియొక ధ్రువాభిముఖత '0' కి సూచకముగా ఉండును. ప్రతి అక్షరము '0', '1' ల సమూహాముచే మేగ్నటిక్ టేప్ మీద సూచింపబడుతుంది. ప్రతి ఒక అంగుళమునకు 800–1600 వరకు బైనరీబిట్‌లను ('1' లేక '0') పొందుపరచవచ్చును. దీనిని లేఖా ప్రమాణ సాంద్రత (Recording density) అంటాం. 800 మీటర్ల పొడవుగల మేగ్నటిక్ టేప్ 30 మిలియన్ల అక్షరములను పొందుపరుచును. దీనికి పంచ్డ్ కార్డులను ఉపయోగిస్తే 4,80,000 పంచ్డ్ కార్డులు కావలసివస్తుంది.

మేగ్నటిక్ టేప్ రీళ్ళను మేగ్నటిక్ టేప్ డ్రయివ్ (Magnetic Tape Drive) మీదకు ఎక్కించబడతాయి. ఈ పరికరము దత్తాంశమును టేపు నుంచి చదువుటయేగాక, దానిమీద వ్రాయగల సామర్థ్యముకలది. ఒక సెకను వ్యవధిలో దాదాపు 5,000 - 2,40,000 దాకా అక్షరములను చదువగలదు లేక వ్రాయగలదు. మేగ్నటిక్ టేప్ దత్తాంశమును అయస్కాంత పరంగా పొందుపరుస్తుంది కనుక, అవసరమైతే టేప్‌మీద ఉన్న దత్తాంశమును చెరిపివేసి, ఆ టేపును మళ్ళీ ఉపయోగించవచ్చును.

మేగ్నటిక్ డిస్క్‌లు, ఫ్లాపీ డిస్క్‌లు

మేగ్నటిక్ డిస్క్‌లు, ఫ్లాపీ డిస్క్‌లు (డిస్కెట్లు అనికూడా అంటారు) సమాచారాన్ని నిలువ ఉంచడానికి (storage) ఎంతో ముఖ్యమైనవి. మేగ్నటిక్ డిస్క్‌లలో మిలియన్ల కొద్దీ డాటా స్టోరేజి పొజిషన్స్ ఉంటాయి. ఇవి పెద్ద కంప్యూటర్లలో ఎక్కువగా వాడతారు. ఫ్లాపీ డిస్క్‌లు ఎక్కువగా, మైక్రోకంప్యూటర్లు, మినీ కంప్యూటర్లు వర్డ్ ప్రాసెసర్సు, డాటా ఎంట్రీ సిస్టమ్స్‌లో ఎక్కువగా వాడతారు. మాగ్నటిక్ ఆక్సైడ్ పూతపూసిన, మైలార్ డిస్క్‌నే ఫ్లాపీ డిస్క్ అంటున్నాం. ఇది మన గ్రామఫోన్ రికార్డ్‌లా ఉండి రెండు సైజులలో లభ్యమవుతుంది. వాటి వ్యాసాలు 20.3 cm (8 inch), 13.3 cm ($5^1/4$ inch) సైజులో ఉంటాయి. 13.3 cm వ్యాసం ఉన్న ఫ్లాపీ డిస్క్‌ను మినీ ఫ్లాపీడిస్క్ అంటారు. ఈ ఫ్లాపీల రక్షణ కొరకు ఒక కవర్‌వంటిదానిలో ఉండి, డిస్క్‌ను కంప్యూటర్ చదివి, వ్రాయడం కొరకు కవర్‌కు ఒక రంధ్రము ఉంటుంది. మాగ్నటిక్ పూతపూసిన ఈ డిస్క్ ఉపరితలంపై డిస్క్ తిరుగుతున్నప్పుడు సమాచారం స్టోర్ చేయబడుతుంది. ఈ విధంగా సమాచారం తేలికగా స్టోర్ చేయవచ్చు, తేలికగా ఉపయోగించవచ్చు, మాగ్నటిక్ టేప్ వలెనే దీనిని కూడా తిరిగి ఉపయోగించ వచ్చు. డిస్కెట్‌పై ఉన్న సమాచారాన్ని ఎన్ని సార్లు కావాలంటే అన్నిసార్లు కంప్యూటర్ చదివి వాడుకోవచ్చు. డిస్కెట్‌పై ఒక ప్రదేశంలో సమాచారాన్ని స్టోర్‌చేసినప్పుడు, అంతకు ముందు ఆ ప్రదేశంలో స్టోర్ అయివున్న సమాచారం తొలగి పోతుంది.ఈ ఫ్లాపీ డిస్క్ చవుకైనదేకాక, ఉపయోగించడానికి ఎంతో తేలికైనది కాబట్టి బహుళ ప్రచారంలో ఉంది.

మేగ్నటిక్ ఇంక్ క్యారక్టర్ రీడర్

(అయస్కాంతసిరా లిపిని చదవగల పరికరము). ఇది అధికవేగ ఉత్పాదక పరికరము. మూల ప్రణాళి నుంచి నేరుగా దత్తాంశాన్ని ఈ పరికరము తీసుకుంటుంది. అయస్కాంత ప్రభావము వలన దాచబడిన అక్షరాలను ఈ పరికరముయొక్క ముఖ్యమైన భాగాల క్రిందికి తీసుకురాగానే అవి విద్యుత్ సంకేతాలను యిస్తాయి. ఈ సంకేతాలను ప్రత్యేకముగా చేయబడిన విద్యుత్ సర్క్యూట్స్‌లో విశ్లేషణము చేయబడి ఆ అక్షరముల యొక్క అర్థాన్ని నిర్ధారణ చేస్తాయి. అటువంటి అక్షరాలను జ్ఞప్తి యూనిట్‌లోకి సమూహాలుగా పంపబడతాయి. బ్యాంకింగ్ పరిశ్రమలో చెక్కులను, డిపాజిట్లను క్రమము చేయుటకు ఈ పరికరమును విస్తారంగా వాడుతారు. దీని వేగము సుమారుగా ముద్రితమైన ఒక పంక్తిగల కాగితాలను లేదా చెక్కుసైజులో కల కార్డులను నిమిషానికి 750–1600 వరకు చదవగలిగేటట్లు ఉంటుంది.

ఆప్టికల్ క్యారక్టర్ రీడర్

సంఖ్య మరియు అక్షరములను టైప్ లేదా క్యాష్ రిజిష్టర్లు, పంక్తి ముద్రణలతో ముద్రింపబడిన కాగితాలను చదవటానికి ఈ పరికరము రూపొందించబడినది. ఇది క్యారక్టర్లను చదివి విద్యుత్ సంకేతాలుగా మార్చి క్యారక్టర్ల అర్థాన్ని నిర్ధారిస్తాయి. దీని చదవగల వేగము సెకనుకి 100–500 క్యారక్టర్లు.

కన్‌సోల్ టైప్‌రైటర్

గణన యంత్రం (కంప్యూటర్) నడిపించే ఆపరేటరుకు, గణనయంత్రం (కంప్యూటరుకు) సంబంధమును కల్పించేది ఈ పరికరము. ఇది ఎలక్ట్రానిక్ టైపురైటరు లాంటిది. దీనిలో స్విచ్లు, ప్రత్యేక కీలు, లైట్ల శ్రేణులు కూడా ఉంటాయి. ఆపరేటరు నియంత్రణ యూనిట్‌కు ఆదేశాలను పంపటానికి ఇది

ఉపయోగపడుతుంది. గణన యంత్రం (కంప్యూటర్‌)లో నిల్వచేసిన ప్రణాళి (ప్రోగాం) లోని తప్పుల్ని దిద్దటానికి, క్రొత్త ఆదేశాలను యివ్వటానికి ఉపయోగిస్తుంది. దీనివేగము తక్కువ. ఇది సెకనుకు 10-20 క్యారక్టర్లను పంపిస్తుంది.

క్యాథోడ్ రే ట్యూబ్

టెర్మినల్ టెలివిజన్‌లో బొమ్మలను చూపటానికి వీలైన అమరికలు, పరిక్రియలకు అనుగుణంగా ఉండే అమరికలు పరిక్రియలుగల క్యాథోడ్ రే ట్యూబ్ సహాయంతో ఉత్పాదక యూనిట్ ఉంటుంది. ఏదైనా దత్తాంశాన్ని తొందరగా జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో చేర్చటానికిగానీ తీసివేయటానికిగానీ ఈ యూనిట్‌లో విద్యుత్ పాయింటర్లు లేదా లైట్ పెన్నులు ఉంటాయి.

ఈ యూనిట్‌ని ఉత్పాదక మీడియాతో సంబంధము లేకుండా గణనయంత్రం (కంప్యూటర్), క్యారక్టర్లను అర్థము చేసుకొనేటట్లు, దాచుకొనేటట్లు సంకేతాల శ్రేణులను యిస్తుంది. ఇది చాలా ఉపయోగకరమైన పరికరము.

13.5 కొన్నిరకాల ఉత్పాదిత మీడియా

ఉత్పాదిత యూనిట్ (Output unit) జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో దాచబడిన ఫలితాలను తీసుకొని మనము అర్థముచేసుకొనే సంకేతాలలోకి మార్చి ఒకటి లేక అంతకంటే ఎక్కువగా కల ఉత్పాదిత పరికరాల ద్వారా మనకు ఫలితాలను యిస్తుంది. మనకు కావాల్సిన రూపాలలో ఈ ఫలితాలను ముద్రిస్తుంది. కొన్ని ముఖ్యమైన ఉత్పాదిత మీడియా,

1. లైన్ ప్రింటర్ (Line printer)
2. గ్రాఫ్ ప్లాటర్ (Graph plotter)
3. విజువల్ డిస్ప్లేయూనిట్ (Visual display unit)
4. కార్డుపంచ్ మరియు పేపర్ టేప్ పంచ్ (Card punch and paper tape punch)
5. కన్‌సోల్ టైప్‌రైటర్ మరియు టెలి టైప్ రైటర్ (Console type writer and teletypewriter)
6. మేగ్నటిక్ టేప్ డ్రైవ్, మేగ్నటిక్ డిస్క్ డ్రైవ్ మరియు మేగ్నటిక్ డ్రమ్ము (Magnetic tape drive, magnetic disc drive and magnetic drum)

పై వాటి గురించి క్లుప్తంగా తెలుసుకుందాము.

లైన్ ప్రింటర్

ఇది చాలా విస్తార ఉపయోగములో ఉన్న ఉత్పాదిత పరికరము. ప్రణాళి (ప్రోగ్రాం) ను మరియు దాని ఫలితాలను ముద్రించిన కాపీలను ఇస్తుంది. ఇవి చదవటానికి చాలా సౌలభ్యంగా ఉటాయి. అవసరమొచ్చినప్పుడు తిరిగి చూడటానికి వీలుగా ఉంటాయి. నిముషానికి సుమారుగా 300-1400 పంక్తులను ముద్రిస్తుంది. ప్రతి పంక్తి 96 లేదా 120 లేదా 144 లేదా 160 క్యారక్టర్లను ముద్రించటానికి వీలుకల్గే స్థానములను కల్గి

యుంటుంది. ఒక పంక్తిని ఉత్పాదితములో ఒక రికార్డు అని పిలుస్తాము. ఆ పంక్తిలో వుంచగల్గె క్యారక్టర్ల సంఖ్యను దాని పొడవు అంటాము. ఇటీవల తయారుచేయబడిన లైన్ ప్రింటర్లు నిమిషానికి 6000 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పంక్తుల్ని ముద్రించగలవు. ఈయంత్రము వేగంగా ముద్రిస్తున్నప్పటికీ, గణనయంత్రము (కంప్యూటర్) ఫలితాల్ని ఉత్పాదితముచేసే వేగమునకు పోలికలేదు. అందుచేత ఈ ఉత్పాదిత ఫలితాల్ని మొదట మేగ్నటిక టేప్ మీద గానీ, మేగ్నటిక్ డిస్క్ మీదగానీ ముందుగా రికార్డుచేసి తరువాత లైన్ ప్రింటర్ ద్వారా ముద్రిస్తారు.

గ్రాఫ్ ప్లాటర్

ఫలితాలను పటముద్వారా లేదా గ్రాఫ్ ద్వారా తెలియజేయు సందర్భాలలో దీనిని ఉపయోగిస్తాం. పట్టికలతో వచ్చే ఉత్పాదితాలకంటే గ్రాఫ్ల రూపంలో ఉన్న ఉత్పాదితాలు ఎక్కువ అర్థవంతమైనవి. సాధారణంగా ఇటువంటి పరికరము గ్రాఫ్ కాగితముపై నిమిషానికి 600-18,000 ల స్టెప్‌ల వేగంతో ఒక పెన్ను సహాయముతో గీస్తుంది. సరియైన అక్షములు, సంకేతాలు, అక్షరములను ఉపయోగించి కావలసిన రీతులలో ఈ పటాల్ని గీయవచ్చును. అనుగుణమైన అక్షరాల గుర్తుల సైజులను, అనుగుణ కొలత యూనిట్లను తీసుకొనుటచే కావాల్సిన పటాలను పొందవచ్చును.

విజువల్ డిస్ప్లే యూనిట్

క్యాథోడ్ రే ట్యూబ్ పై ఉత్పాదిత సమాచారాన్ని చూపటానికి ఈ యూనిట్ ఉపయోగిస్తుంది. ఉదాహరణకి దత్తాంశమునుగానీ, పటాలనుగానీ దర్శింపచేయటానికి మేనేజరు, ఇంజనీర్, లేదా శాస్త్రజ్ఞుడు రూపొందించిన సమాచారమును దర్శింపచేయటానికి ఉపయోగిస్తాము. ఇది ఫలితాలు ఉత్పాదితమవగానే వెను వెంటనే దృశ్యములో చూపిస్తుంది. ఇది సెకనుకు 250-10,000ల క్యారక్టర్లను చూపగలదు. దీనిని ఎక్కువగా బ్యాంకులు, విమానాశ్రయాలలో, ఆసుపత్రులలో ఉపయోగిస్తారు.

కార్డు పంచ్ మరియు పేపర్ టేప పంచ్

దత్తాంశమునుగానీ, ఉత్పాదిత ఫలితాలనుగానీ రికార్డు చేసి ఉంచాలంటే కార్డు పంచ్ లేదా పేపర్ టేప్ పంచ్ రూపములో ఉంచవచ్చు. ఖాళీ కార్డు మీద ఈ యూనిట్‌కి వచ్చే ఆదేశాల ప్రకారము యాంత్రికంగా రంధ్రాలను గ్రూపులుగా చేస్తుంది. ఈ పరిక్రియ అవగానే సక్రమంగా రంధ్రముచేయబడినదీ లేనిదీ తెల్సుకోటానికి ఈ కార్డు పంచ్ కార్డు మీద చేయబడిన దత్తాంశాన్ని తిరిగి చదువుతుంది. ఈ రంధ్రాలను యాంత్రికంగా చేస్తుంది కనుక, ఈ యూనిట్ నెమ్మదిగా పనిచేస్తుంది. అనగా నిమిషానికి 100 - 500 కార్డులను పంచ్ చేయును. పేపరు టేప్ పంచ్ కూడా కార్డుపంచ్ లాగానే పనిచేయును. కాని ఒకేసారి ఒకే క్యారక్టరును మాత్రమే పంచ్ చేయును. కనుక దీని వేగము సెనుకు 200 - 500 మాత్రమే ఉండును.

మేగ్నటిక్ టేప్ డ్రైవ్

దీని యొక్క ప్రాథమిక పరిక్రియ, మేగ్నటిక్ టేపులోని రీడ్-రైట్ ముఖ్యాంశాలను కదల్చటం. దీని మూలంగా చదవటము లేదా వ్రాయటము వీలవుతుంది. మేగ్నటిక్ టేప్ మీద దాచబడిన దత్తాంశమును అనుక్రమంగా అంగీకరిస్తుంది. దీని అంగీకార సమయము ఎక్కువ. అనగా మేగ్నటిక్ టేప్‌లో చివరిభాగంలో దత్తాంశము ఉండి టేపు మొదలులో ప్రారంభిస్తే మొత్తము టేపు అయ్యి మన దత్తాంశము గల భాగమువచ్చే

వరకు సమయము పడుతుంది. దీని యొక్క ముఖ్యమైన లక్షణములు (1) నెమ్మదిగా అంగీకరించుట, (2) తక్కువ ధర, (3) దాచగల కెపాసిటీల మధ్యమము అనగా ఒక రీలు టేప్‌లో 20 - 200 మిలియన్ల క్యారక్టర్లు ఉంచవచ్చు.

మేగ్నటిక్ డిస్క్ డ్రైవ్

తిరుగుతూ నిలువుగా స్తంభ రూపములో ఉన్న షాఫ్ట్ (Shaft) లో మేగ్నటిక్ డిస్క్ సముదాయమును ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచబడి ఈ మేగ్నటిక్ డిస్క్ డ్రైవ్‌లో ఉంటాయి. ధ్వనులను గ్రహించి తిరిగి ఉచ్చరించు యంత్ర రికార్డువలె మేగ్నటిక్ డిస్క్ ఉంటుంది. దీని రెండు ఉపరితలములపై మేగ్నటిక్ పదార్థము రికార్డు చేయగల్గేది పూయబడి ఉండును. రెండు విభిన్న డిస్క్‌ల మధ్య తగినంత స్థలము అంగీకార సమయములో తిరగటానికి వీలైన భుజాలపై తిరగటానికి వీలుగా ఉంటుంది. దీనిలో రీడ్ మరియు రైట్ ముఖ్యాంశ స్థానాలు ఉంటాయి. ఫోనోగ్రాఫ్‌లో సంకేతాలు సర్పిలాకారంలో ఉంటాయి. కాని మేగ్నటిక్ డిస్క్ డ్రయివ్‌లో, సంకేతాలు. రెండు ఉపరితలాలపైన స్పష్టంగా ఉండే వృత్తాకార త్రోవలలో బైనరీ రూపాలలో రికార్డయి ఉంటాయి. అయస్కాంతీకరణ చేయగానే రీడ్ లేదా రైట్ పరిక్రియలు జరుగుతాయి. డిస్క్‌లు తీసివేయటానికి లేదా క్రొత్తదానిని మార్చటానికి గానీ వీలైనట్లు డిస్క్ డ్రైవ్‌లు ఉంటాయి. యాదృచ్ఛికంగా దత్తాంశాన్ని అంగీకరించటానికి వీలైనట్లు డ్రైవ్‌లో ఉంటుంది. అనగా ఏదైనా ప్రత్యేక డిస్క్‌పై ప్రత్యేక త్రోవ (Track) ను గుర్తించాలి అంటే వెనువెంటనే చేయగలదు. కానీ ట్రాక్‌పై గల సమాచారాన్ని తొలగించాలన్నా, మార్చాలన్నా అనుక్రమంగా మాత్రమే చేయును. 14 అంగుళాల, 6 డిస్క్‌లుగల పేక్‌లో, 4 మిలియన్ల క్యారక్టర్లను దాచగల సామర్థ్యం, దత్తాంశాన్ని సెకనుకు 1,56,000 క్యారక్టర్లను బదిలీ చేయగల సామర్థ్యం ఉంటాయి. ప్రతి డిస్క్‌లోను 10 రికార్డుచేయగల ఉపరితలాలు ఉటాయి. ఒక్కొక్క ఉపరితలంలోను 200-500 ట్రాక్‌లు ఉంటాయి. దీని ముఖ్య లక్షణాలు (1) త్వరితంగా అంగీకారముచేయుట, (2) తక్కువ ధర, (3) దాచగల సామర్థ్యాన్ని ఎక్కువగా కల్గియుండును.

మేగ్నటిక్ డ్రమ్

ఇది స్థూపాకారములో ఉండును. కొన్ని అంగుళాల నుంచి కొన్ని అడుగుల వ్యాసం కల్గి యుండేవిగా ఉంటాయి. బాహ్య ఉపరితలము అయస్కాంతీకరణము చేయబడగల్గేటట్లు ఉంటుంది. సమాంతర వృత్తాకార త్రోవలలో అతి సూక్ష్మంగా ఉండే అయస్కాంత బిందువుయుగ్మ రూపంలో (Binary Form) దత్తాంశాన్ని ఈ ఉపరితలంపై దాస్తాయి. స్థిరవేగంలో ఈ డ్రమ్ము తిరుగుతుంది. (నిమిషానికి 800-12,000) భ్రమణాలు చేయగలదు. రీడ్-రైట్ అనే ముఖ్యాంశాలు ప్రతి త్రోవలోను ఉపరితలానికి దగ్గరగా ఉంటాయి, మరియు తలపముపైగల అయస్కాంతాన్ని స్పృశించటానికి వీలుగా ఉంటాయి. ఈ ముఖ్యాంశాల ఆదేశానుసారము దత్తాంశాన్ని దాయటానికి, తొలగించటానికి వీలుంటుంది. 800 త్రోవలను కల్గియున్న డ్రమ్ము 4 మిలియన్ల క్యారక్టర్లను దాచగలదు. సెకనుకు 1.5 మిలియన్ల క్యారక్టర్ల కంటే ఎక్కువగా బదిలీ చేయగలదు. అంగీకరించగల సమయము 8.6 మిల్లీ-సెకండ్లు. దీని యొక్క ముఖ్యమైన గుణాలు (1) త్వరగా అంగీకరిస్తుంది, (2) అధిక ధర మరియు (3) దాచగల సామర్థ్యము మధ్యమంగా ఉంటుంది. (డ్రమ్ము ఒకటికి 4-200 మిలియన్‌ల క్యారక్టర్లను దాచగలదు).

కన్‌సోల్ టైప్‌రైటర్ల గురించి తెల్సుకున్నాము. ఆదునిక గణన యంత్రాలను ఈ క్రింది విధంగా వర్గీకరించవచ్చును.

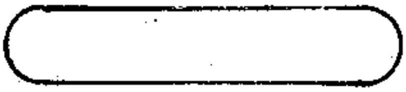
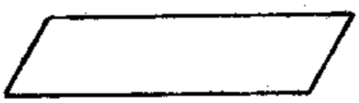
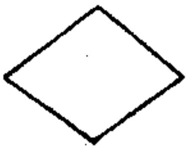
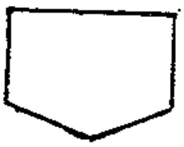
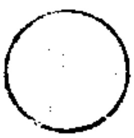
1. ప్రత్యేక గణన యంత్రాలు
2. సాధారణ గణన యంత్రాలు

మొదటి రకమునకు చెందినవి కేవలము ప్రత్యేక రకానికిచెందిన సమస్యలను సాధించటానికి మాత్రమే ఉపయోగిస్తాము. ఉదాహరణకి జీతాల జాబితా సమాచారాన్ని లేదా ప్రయాణికుల సీట్లను రిజర్వుచేయటానికి మొదలగు సమస్యలకు ఉపయోగించేది ప్రత్యేక గణనయంత్రం. సాధారణ గణనయంత్రం అనేక రకములైన సమస్యలను సాధించును.

13.6 క్రమచిత్రాలు (Flow charts)

ఇప్పుడు క్రమచిత్రాల (Flow charts) నిర్మాణము గురించి తెల్సుకుందాము. ఒక ప్రశ్నను పరిష్కరించుటకు గణనయంత్రము చేయవలసిన పనులను వరుసగా ఒకపటము లేక రేఖాచిత్రము ద్వారా తెలియపర్చిన, ఆ పటమును క్రమచిత్రము అంటాము. అంటే అల్‌గారిథమ్‌ను పటములో చూపుతాము. అంటే ప్రశ్నను పరిష్కరించుటకు ఏయే గణనలు చేయాలి, ఏయే నిర్ణయాలు తీసుకోవాలి మొదలగు విషయాములన్నిటిని క్రమచిత్రాలలో వ్రాస్తాము. కనుక ప్రణాళి రచనకు ఈ క్రమ చిత్రాలు చాలా ఉపయోగ పడుతాయి. అనేక పరిక్రియలకు, ప్రమాణములైన క్రమ చిత్రాల గుర్తులను ఉపయోగిస్తాము. ఈ క్రమ చిత్రాల గుర్తులు మార్గమును నిర్దేశించే రేఖల ద్వారా కలపబడుతవి.

ప్రమాణములైన ముఖ్యమైన క్రమచిత్రాల గుర్తులు మరియు వాటి వివరణ ఈ క్రింద నీయబడినది.

వరుస సంఖ్య	క్రమచిత్రాల గుర్తులు	వివరణ
1.		క్రమచిత్రము యొక్క ప్రారంభమును లేక చివరను, అంటే **START** లేక **STOP** కు ఉపయోగించే గుర్తు
2.		ఉత్పాదక, ఉత్పాదిత పరిక్రియలు సూచించే గుర్తు.
3.		అంకగణిత పరిక్రియలు మొదలగు వాటికి సూచించే గుర్తు.
4.		నిర్ణయ స్థలము. దీని నుంచి రెండు లేక ఎక్కువ మార్గాలు నిర్ణయమునననుసరించి తీసుకొనే గుర్తు.
5.		ఒక పేజీ నుంచి, ఇంకొక పేజీకి క్రమ చిత్రము మార్గమును సూచించును.
6.		ఒక క్రమ చిత్రము నుంచి, వేరొక క్రమ చిత్రమునకు ఒకే పేజీలోమార్గము సూచించు గుర్తు.

క్రమచిత్రాలలో P=Q లేక P←Q అనగా P విలువ Q అగును. అంటే Q విలువ P చిరునామాగల జ్ఞప్తి స్థలములో ఉంచును. పాత P విలువ పోయి P యొక్క కొత్త విలువ Q అగును. ప్రస్తుతము మనము క్రమ చిత్రాలను ఎట్లా గీయాలో కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా తెల్పుకుందాము.

ఉదా. *1 :* ఇచ్చిన మూడు అంకెలలో పెద్ద అంకెను తెల్పుకొనుటకు క్రమచిత్రమును గీయుము.

సాధన

మొదట ఇచ్చిన మూడు అంకెలను A,B మరియు C అను చిరునామా గల జ్ఞప్తి స్థలములలో భద్రపరచుము. అప్పుడు A మరియు Bలను పోల్చుము. A గనుక పెద్దదైతే, అప్పుడు A మరియు C లను పోల్చుము. ఇప్పుడు కూడా A పెద్దదైతే, ఇచ్చిన మూడు అంకెలలో A పెద్దది. లేకపోతేఅంటే A గనుక C కంటె పెద్దది కాకపోతే అప్పుడు మూడు అంకెలలోకెల్లా C పెద్దది. అట్లాగాక మొదట్లోనే A, B కటే పెద్దది కాని పక్షములో, అప్పుడు B మరియు C లను పోల్చుము. ఈ రెండింటిలో ఏది పెద్దదైతే, అది ఇచ్చిన మూడు అంకెలలో కెల్లా పెద్దది. ఇప్పుడు పైన పేర్కొన్న విధానమును క్రమచిత్రముద్వారా తేలికగా అర్థమయ్యే టట్లు తెలియబరుద్దాము.

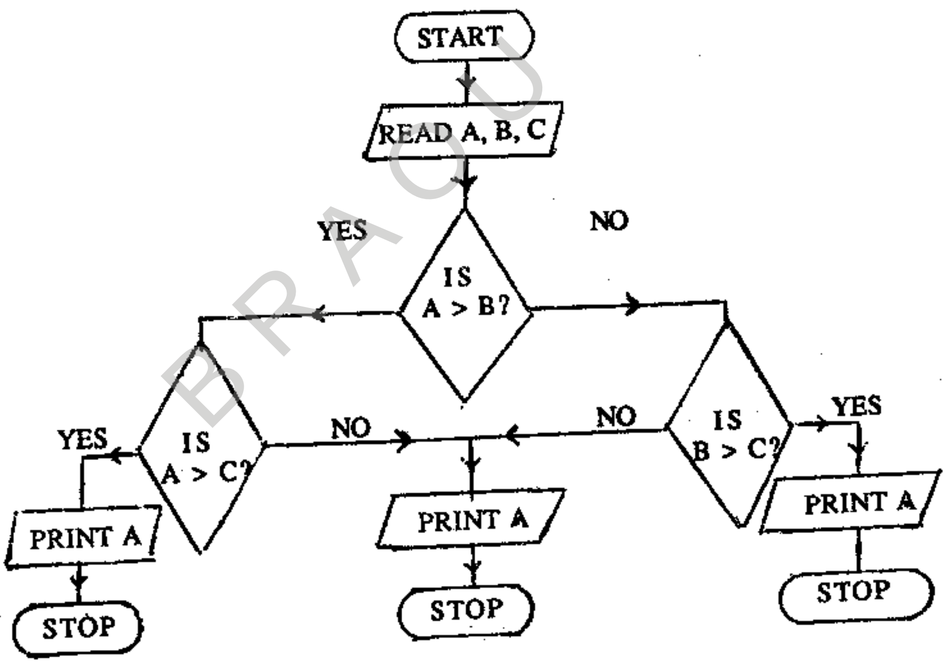


Fig.2 : ఇచ్చిన 3 అంకెలలో పెద్ద అంకెను తెల్పుకొనే క్రమచిత్రము

మూడు అంకెలుకంటే ఎక్కువ అంకెలు ఇచ్చి పెద్ద అంకెను కనుక్కోవాల్సివస్తే, పైన పేర్కొన్న పద్ధతిని అనుసరిస్తే క్రమచిత్రము చాలా పెద్దది అవుతుంది. అప్పుడు వేరే పద్ధతిని అనుసరిస్తాము.

ఉదా. *2 :* ఇచ్చిన N అంకెలలో పెద్ద అంకెను కనుగొనుటకు క్రమ చిత్రమును గీయుము.

సాధన

ఇచ్చట ఈ క్రింది పద్ధతిని ఉపయోగించుదాము. ఇచ్చిన అంకెలలో మొదటి అంకెను పెద్దది అనుకొని దానిని BIG అనే చిరునామా కల జ్ఞప్తి ప్రదేశములో ఉంచుదాము. తర్వాత రెండవ అంకెను తీసుకొని మొదటి అంకెతో పోల్చుము. ఈ రెండింటిలో పెద్ద అంకెను BIG అనే జ్ఞప్తి ప్రదేశములో ఉంచుము. ఇదే విధముగా మిగతా అంకెలన్నింటిని పోల్చుము. చివరికి BIG అనే జ్ఞప్తి ప్రదేశములోఉన్న అంకె, ఇచ్చిన N అంకెలలో పెద్దది అగును.

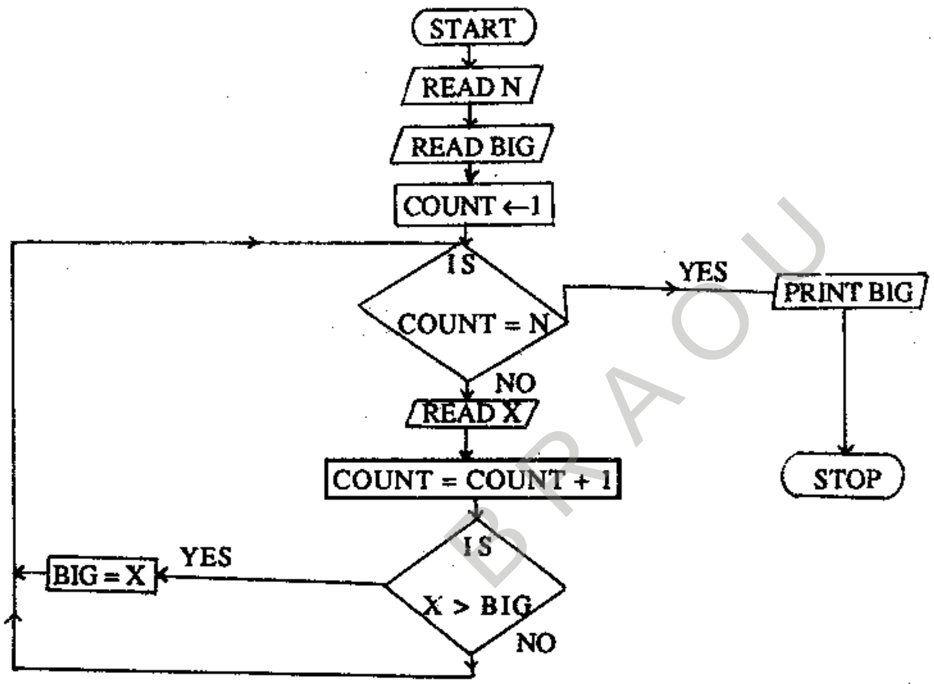


Fig. 3 : ఇచ్చిన N అంకెలలో పెద్ద అంకెను కనుగొను క్రమచిత్రము

పై క్రమచిత్రములో COUNT←COUNT + 1 యొక్క అర్థము COUNT యొక్క విలువ పూర్వపు విలువ + 1 అని అర్థము ఈ విధముగా ఒక పరిక్రియల సముదాయమును అనేక పర్యాయములు నెరవేర్చుటకు క్రమ చిత్రములో పైన పేర్కొన్న పద్ధతి గమనించదగినది.

ఉదా. 3 : రెండు సదిశలు A మరియు B ల అదిశాలబ్ధము SUM = $\sum_{i=1}^{10} a_i b_i$ సూత్రమునుపయోగించి కనుగొనుటకు క్రమ చిత్రమును గీయుము.

సాధన

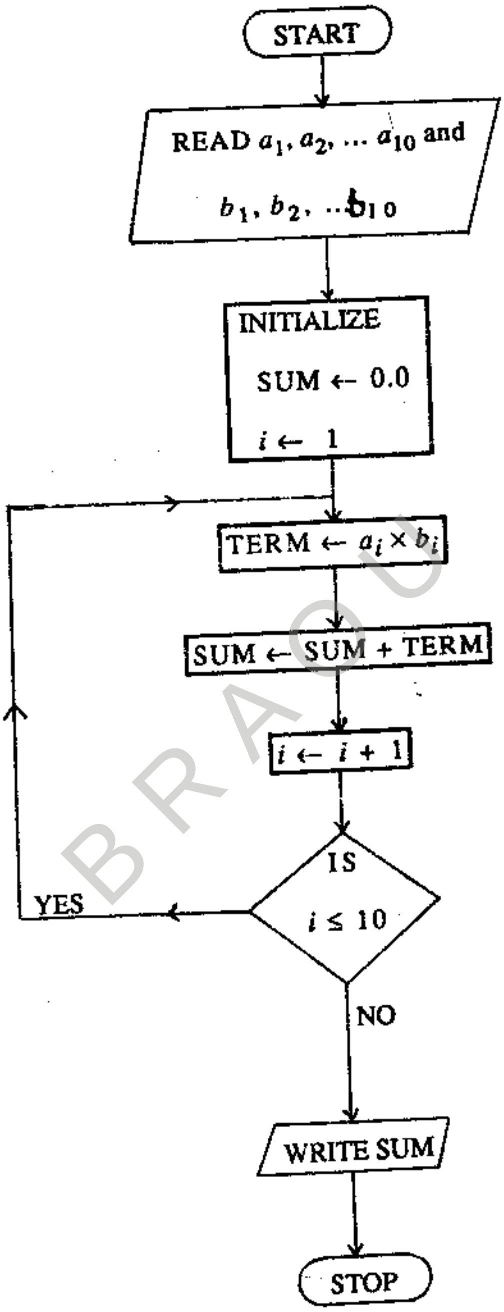


Fig. 4 : అదిశా లబ్ధము కనుగొను క్రమచిత్రము

ఉదా. 4 : N ఇచ్చిన, N! గణన చేయుటకు క్రమచిత్రము గీయుము.

సాధన

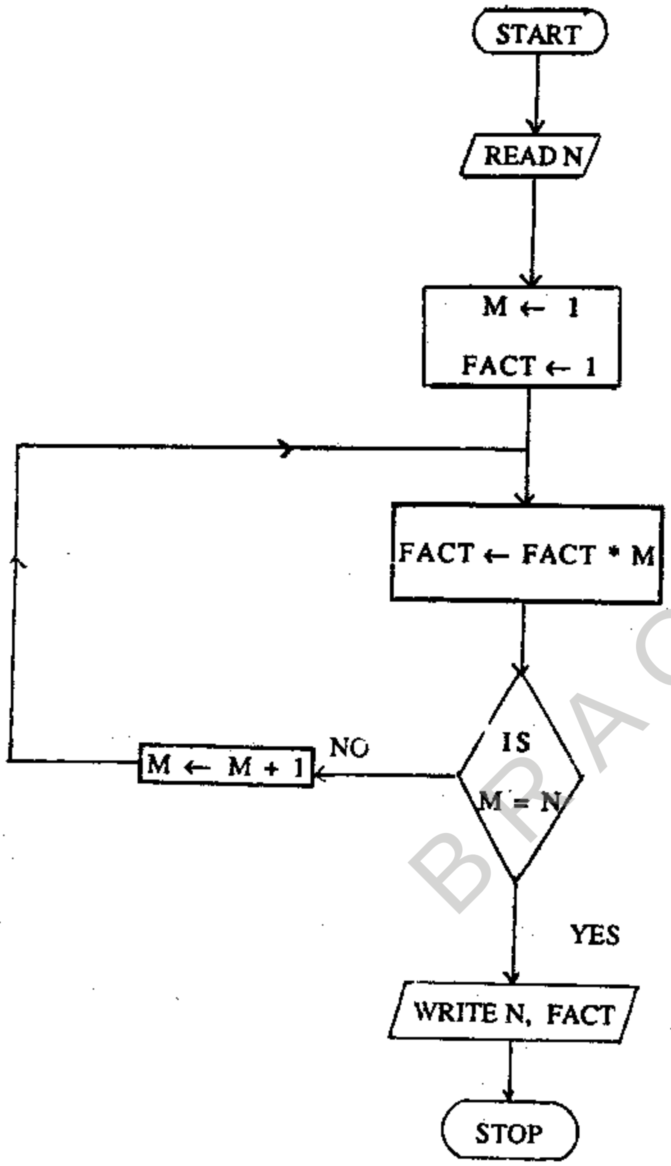


Fig. 5 : N ! గణన చేయుటకు క్రమ చిత్రము

ఉదా. 5 : P (a, b, c) మరియు Q (x, y, z) అను రెండు బిందువులు ఇచ్చిన P, Q ల మధ్య దూరము PQ మరియు PQయొక్క డిక్-కొసైన్‌లు (Direction Cosines) కనుగొనుటకు క్రమ చిత్రమును గీయుము.

సాధన

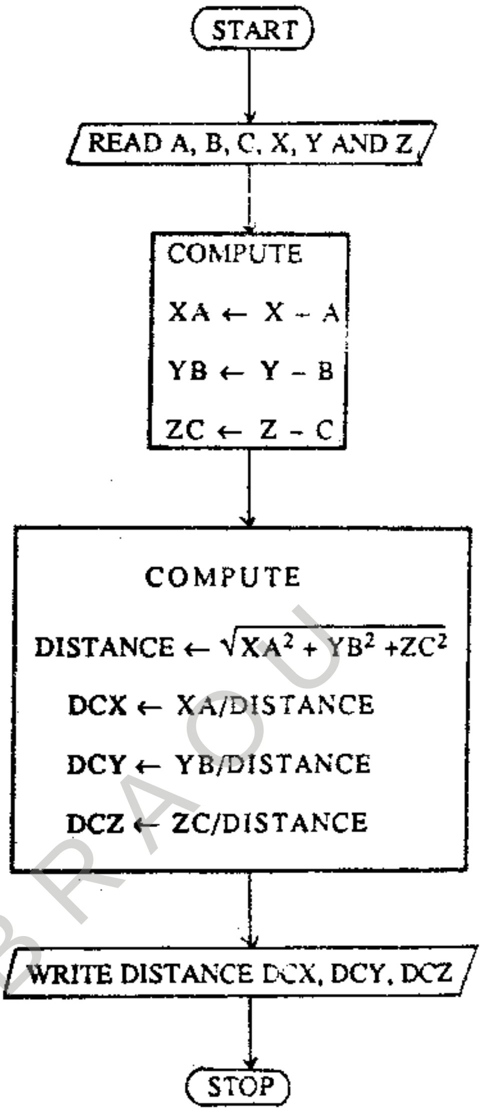


Fig. 6 : PQ మరియు డిక్ – కొసైన్‌లు కనుగొను క్రమ చిత్రము

ఉదా. 6 : $ax^2 + bx + c = 0$ అను వర్గ సమీకరణమును సాధించుటకు క్రమచిత్రము గీయుము.

సాధన

$a = 0$ అయితే, $bx + c = 0$ అను ఏకఘాత సమీకరణము వచ్చును. దానికి ఒకటే మూలము ఉండును. $a \neq 0$ అయినట్లయితే, $D = b^2 - 4ac$, విలవననుసరించి మూలములు ఉండును. $D \geq 0$ అయితే, x_1 వాస్తవ

భాగముగా, x_2 కల్పిత భాగముగా గల రెండు సంయుగ్మ కల్పిత మూలములు ఉండును. పైన పేర్కొన్న అన్నిటిని క్రమ చిత్రము (పటం - 7లో ఇవ్వబడినవి).

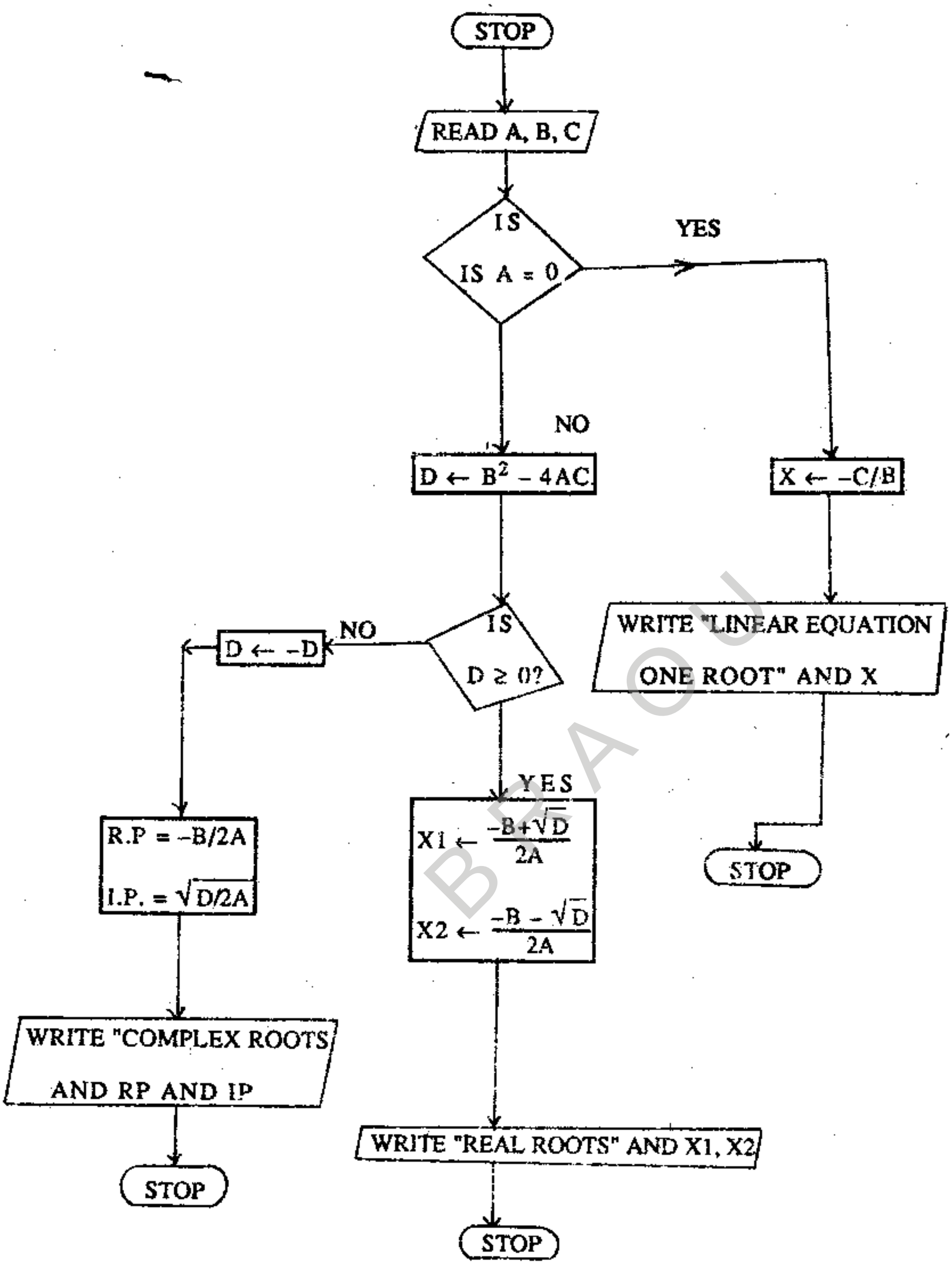


Fig. 7: $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణము సాధించు క్రమచిత్రము

ఉదా. 7 : మొదటి 100 సహజ సంఖ్యల మొత్తము కనుగొనుటకు క్రమ చిత్రము గీయుము.

సాధన

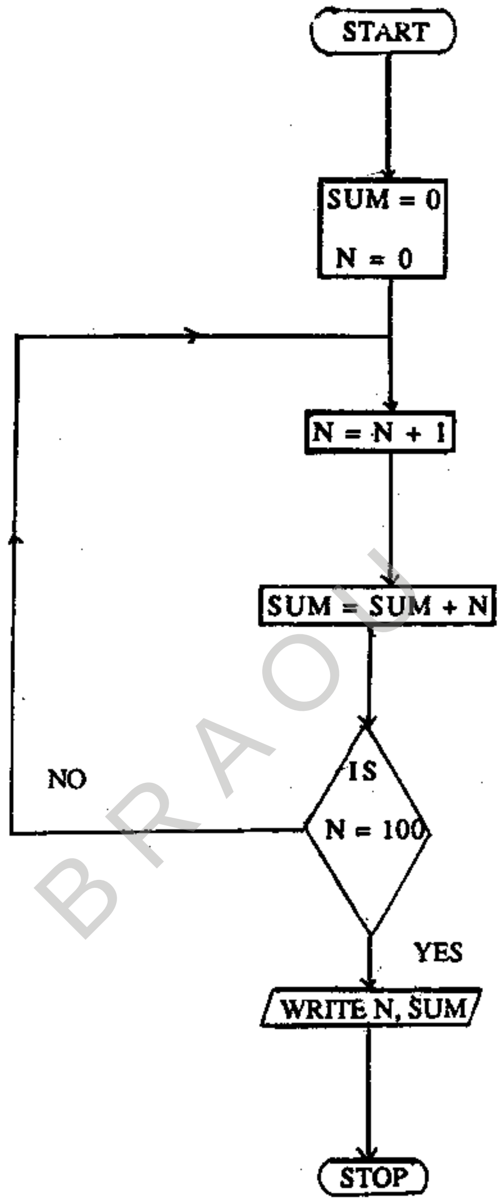


Fig. 8 : మొదటి 100 సహజ సంఖ్యల మొత్తం కనుగొను క్రమచిత్రము

ఉదా. *8* : ఈ క్రిందనీయబడిన శ్రేణిలో N పదముల మొత్తము కనుగొనుటకు క్రమచిత్రము గీయుము.

$S = 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots$

సాధన

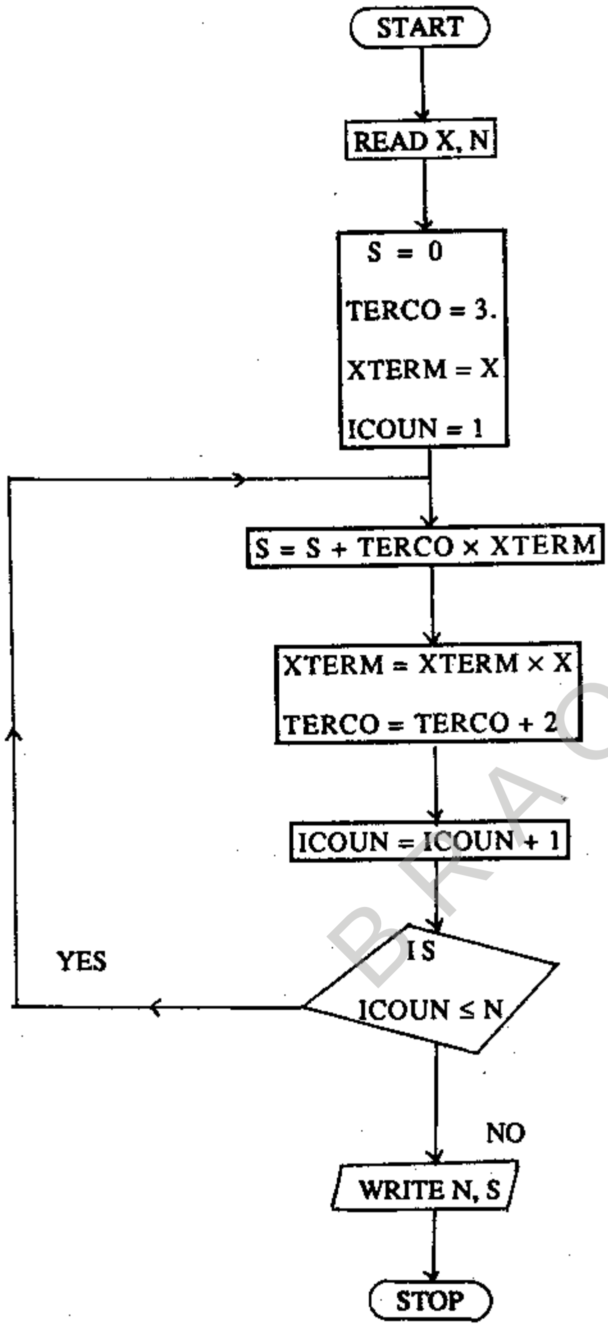


Fig.9 : శ్రేణి మొత్తము కనుగొను క్రమ చిత్రము

కనుక ప్రశ్ననుసాధించుటలో మనము ఉపయోగించే తార్కికము క్రమచిత్రముల ద్వారా తేలికగా అవగతమగును. ఖచ్చితమైన క్రమచిత్రాలను గీయుట, గణన యంత్ర ప్రణాళి రచనలో ముఖ్య భాగము.

13.7 నిర్ణయ పట్టికలు

సాధించవలసిన ప్రశ్న కనుక తార్కికము ఎక్కువగా కల్గి ఉంటే క్రమ చిత్రాలకు బదులు పట్టికలు ఉపయోగించి ప్రశ్నలను విశ్లేషించుతాము. ఈ పట్టికలను నిర్ణయ పట్టికలు అంటాము. దత్తాంశ విశ్లేషణ లో ఈ పట్టికలు చాలా ఉపయోగపడును. నిర్ణయపట్టికను నాల్గు భాగములుగా విభజింపవచ్చును. (1) నియమములన్ని పొందుపరచు భాగము, (2) నియమముల ప్రవేశ మార్గము, (3) చర్యలన్నింటిని పొందుపరచు భాగము, (4) చర్యల ప్రవేశమార్గము.

నియమములన్ని పొందుపరచు భాగము	నియమముల ప్రవేశ మార్గము
చర్యలన్నింటిని పొందుపరచు భాగము	చర్యల ప్రవేశ మార్గము

Fig. 10 : నిర్ణయ పట్టిక భాగాలు

నియమములన్ని పొందుపరచు భాగములో, ప్రశ్నలో ఉత్పన్నమయ్యే నియమములన్నింటిని పొందుపరుస్తాము. ప్రశ్నలో ఉత్పన్నమయ్యే చర్యలన్నింటిని, చర్యలన్నింటిని పొందుపరచు భాగములో వ్రాస్తాము. నియమముల ప్రవేశమార్గములో ఒక్కొక్క నియమము వ్రాస్తాము. దానికిఎదురుగా ఆ నియమములకు అనుగుణంగా జరిగే చర్యను, చర్యల ప్రవేశ మార్గములో వ్రాస్తాము. నిర్ణయ పట్టికల లాభాలు తెలుసుకొనుటకు వస్తువుల నిల్వలు, అమ్మకాలకు సంబంధించిన ఒక చిన్న లెక్కను తీసుకొని నిర్ణయ పట్టిక తయారుచేద్దాము.

ఇక్కడ వస్తువుల నిల్వలు, అమ్మకములు తెలిపే పట్టిక తయారుచేయుటకు నియమములు (1) ఇవ్వటము, (2) వస్తువులు పుచ్చుకోవటము. తదనుగుణ చర్యలు (1) నిల్వ నుంచి తీసివేయుట, (2) నిల్వలకు కలుపుట. వివరాలు క్రింది పట్టికలో నీయబడినవి.

వస్తువులు ఇవ్వటము	Y	N
వస్తువులు తీసుకొనుట	N	Y
నిల్వలకు వస్తువులు కలుపుట	—	X
నిల్వల నుంచి వస్తువులను తీసివేయుట	X	—

పటం - 11 నిర్ణయ పట్టిక

Y అనగా అవును అని, N అనగా కాదు అని అర్థము. చర్యకుఎదురుగా 'X' అని ఉంటే ఆ చర్య చేయు అని అర్థము, '—' ఉంటే వద్దు అని అర్థము.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాము.

ఉదా. *1 :* అప్పు అవధి సంతృప్తి కరముగా ఉన్న ఎడల, ఆర్డర్ (Order) ను ఒప్పుకొనుము. అప్పు అవధి సంతృప్తికరము లేక, చెల్లించే పద్ధతి మంచిగా ఉన్న ఎడల ఆర్డర్‌ను అంగీకరించుము. అప్పు అవది సరిగ్గా లేక, క్రమంగా చెల్లించక పోయినను, కానీ ప్రత్యేకంగా మొత్తం చెల్లించినను ఆర్డర్‌ను అంగీకరించుము. అట్లా కాక పోతే ఆర్డర్‌ను అంగీకరించవద్దు. కొనుగోలుదారుకు అప్పు ఇవ్వవచ్చునో, లేదో తెల్పు నిర్ణయ పట్టికను తయారు చేయుము.

	1	2	3	4
అప్పు అవధి సంతృప్తికరము	Y	N	N	N
చెల్లించే పద్ధతి మంచిది	—	Y	N	N
ప్రత్యేకంగా మొత్తం చెల్లించినా	—	—	Y	N
ఆర్డర్ అంగీకరించుము	X	X	X	—
ఆర్డర్ అంగీకరించవద్దు	—	—	—	X

Fig. 12 : నిర్ణయ పట్టిక

ఉదా. *2 :* ఒక పరీక్షాఫలితములను ప్రకటించుటకు నియమములు ఈ క్రింది విధంగా నీయబడినవి. ఒక విద్యార్థికి ప్రధాన సబ్జెక్ట్ (Main Subject) లో 50% లేక అంతకు ఎక్కువ వచ్చి యానిసిలరీ సబ్జెక్ట్ (Ancillary Subject) లో 40% లేక అంతకు ఎక్కువ వచ్చిన అతను ఉత్తీర్ణుడగును. ప్రధాన సబ్జెక్ట్‌లో 50% కంటే తక్కువ వచ్చిన ఎడల, అతను ఉత్తీర్ణుడగుటకుయాన్సిలరీ సబ్జెక్ట్‌లో 50% కంటే ఎక్కువ రావలెను. ప్రధాన సబ్జెక్ట్‌లో ఉత్తీర్ణతకు 40% లేక అంతకంటే ఎక్కువ రావలెను. ప్రధాన సబ్జెక్టలో 60% లేక అంతకంటే ఎక్కువ వచ్చి, యాన్సిలరీ సబ్జెక్ట్‌లో 40% కంటే తక్కువ వచ్చిన ఎడల, యానసిలరీ సబ్జెక్ట్ మాత్రము మళ్లీ వ్రాయుటకు అనుమతి లభించును. క్లాసులో కొంతమందికి ప్రత్యేక సదుపాయము ఇవ్వబడినది. వాళ్ళకు ప్రధాన సబ్జెక్ట్‌లో 40% యాన్సిలరీలో 40% వచ్చిన ఎడల ఉత్తీర్ణులగుదురు. యానసిలరీలో 40% కంటే తక్కువ వచ్చిన ఎడల అది ఒక్కటి మళ్లీ వ్రాయుటకు అనుమతి లభించును. పై నియమములన్నింటిని పొందుపరుస్తు నిర్ణయపట్టికను తయారుచేయుము.

సాధన

ప్రధాన సబ్జెక్ట్ మార్కులు	≥50	≥40	≥60	≥40	≥40	ఇతరములు
యాన్సిలరీ సబ్జెక్ట్ మార్కులు	≥40	≥50	<40	≥40	<40	
ప్రత్యేక సదుపాయము	No	No	No	Y	Y	—
ఉత్తీర్ణత	X	X	—	X	—	—
యాన్సిలరీ మళ్ళీ వ్రాయుట	—	—	X	—	X	—
తప్పుట	—	—	—	—	—	X

Fig. 13 : నిర్ణయ పట్టిక

13.8 సారాంశము

కొన్ని మిలియన్ల గణనములను కొద్ది క్షణాలలో చేసి చాలా ఖచ్చితమైన ఫలితాలను అందించగల ఎలక్ట్రానిక్ పరికరమును గణన యంత్రము (కంప్యూటర్) అంటాము. ప్రతీ కంప్యూటర్‌కు ఉత్పాదక యూనిట్ (Input unit), జ్ఞప్తి యూనిట్ (memory unit), అంకగణిత తార్కిక యూనిట్ (Arithmatic logical unit), నియంత్రణ యూనిట్ (control unit), ఉత్పాదిత యూనిట్ (output unit) ఉంటాయి. ఉత్పాదకయూనిట్ ద్వారా సమాచారాన్ని కంప్యూటర్‌కు అందిస్తాము. ఆ సమాచారం జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో స్టోర్ అయి ఎగ్జిక్యూషన్ మొదలవుతుంది. మనం ఇచ్చిన సమాచారాన్ని కంట్రోల్ యూనిట్ కంప్యూటర్ భాషలోకి - డీకోడ్ చేసి అంకగణిత - తార్కిక యూనిట్‌లో అంకగణిత పరిక్రియలను అమలు పరుస్తుంది. మనం ఇచ్చిన సూచనలన్నీ మనం వ్రాసిన క్రమంలో అమలు చేస్తుంది.

సమాచార నిరూపణను బట్టి గణన యంత్రములు రెండు విధాలుగా విభజించవచ్చు. మొదటిది అంకగణన యంత్రము (Digital Computer), రెండొవది అనురూప గణన యంత్రము (Analog computer). ఏదైనా ఇచ్చిన సమస్యనుపరిష్కరించడానికి వ్రాసే సవివరమైన ఉపదేశముల సముదాయాన్ని ఆల్గారిథమ్ అంటాము. ఈ ఆల్గరిథమ్‌ను కంప్యూటర్ భాషలోకి అనువదిస్తే ప్రోగ్రామ్ వస్తుంది. ఈ విధంగా అనువదించే భాషను ప్రోగ్రామింగ్ భాష అంటాము. క్రమ చిత్రాలు ప్రోగ్రామ్ రాయడానికి తోడ్పడతాయి. ఇచ్చిన సమస్యను సాధించడానికి గల సవివరమైన ఉపదేశములను రేఖా చిత్రంగా వ్రాస్తే, దానిని క్రమచిత్రం అంటాము. నిర్ణయపట్టికలను కూడా సమస్యలను సాధించడానికి వాడతాము.

13.9 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. *ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానం వ్రాయండి.*

1. ఉదాహరణలిస్తూ సమస్యలను సాధించటానికి గణనయంత్రాల (కంప్యూటర్ల) ప్రాముఖ్యత గూర్చి విశదీకరించుము.
2. గణన యంత్రం (కంప్యూటర్) యొక్క ఐదు ముఖ్య యూనిట్లు ఏమిటి? గణన యంత్రం (కంప్యూటర్) యొక్క నిర్మాణతను బ్లాకు చిత్రము ద్వారా విశదీకరింపుము.
3. ఉత్పాదక మీడియములో ఏవైనా మూడు యూనిట్స్ గురించి తెల్పండి.
4. క్రమ చిత్రాలు, నిర్ణయపట్టికల ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము.
5. R = 10, 20, ..., 200 లకు, S ను కనుగొనుటకు (క్రింద నీయబడిన సూత్రమును ఉపయోగించి) క్రమ చిత్రమును గీయుము.

$$S = \begin{cases} 17000 - 0.48\,R^2 & R < 100 \text{ అయినప్పుడు} \\ \dfrac{18000}{\left(1 + R^2/18000\right)} & R \geq 100 \text{ అయినప్పుడు} \end{cases}$$

6. ఒక జీవిత బీమ సంస్థ ప్రీమియమ్ (Premium) కనుగొనుటకు ఈ క్రింది నియమములను పాటించును.

1. ఒక వ్యక్తి 35 సంవత్సరముల లోపు వయసుకల్గిన పురుషుడైన, పట్టణములో నివసించుచుండిన, అతని ఆరోగ్యము చాలా బాగా ఉన్న ఎడల, ప్రీమియము వెయ్యి రూపాయలకు రెండు రూపాయలు మరియు పట్టా రెండు లక్షల వరకు ఇస్తారు.

2. పైన పేర్కొన్న లక్షణాలన్నీ కల్గిన ఆడవాళ్ళకు ప్రీమియము వెయ్యి రూపాయలకు రూ. 1.50 పై.లు పట్టా 1.5 లక్షల దాకా ఇస్తారు.

3. ఒక వ్యక్తి 35 సంవత్సరములలోపు ఉండి, పల్లెటూరులో నివసించుచున్న ఎడల, అతని ఆరోగ్యము బాగా లేకపోయిన, ప్రీమియము వెయ్యి రూపాయలకు మూడు రూపాయలు మరియు పట్టా 10 వేలు దాటకుండా ఇస్తారు.

4. మిగతా అన్ని విషయాలలోను పట్టా ఇవ్వరు.

పైన పేర్కొన్నవన్నీ చూపుతూ నిర్ణయపట్టికను తయారు చేయుము.

II. క్లుప్తంగా సమాధానాలివ్వండి.

1. గణనయంత్రం (కంప్యూటర్) అనగా నేమి? అంకగణిత గణన యంత్రం, అనురూప గణనయంత్రాల భేదము ఏమి?

2. పంచ్‌కార్డ్ గూర్చి క్లుప్తంగా వ్రాయండి.

3. ప్రత్యేక గణనయంత్రాలకు సాధారణ గణన యంత్రాలకు గల భేదమును వివరించండి.

4. క్రమచిత్రాలలో వాడు ముఖ్యమైన గుర్తులను తెల్పుతూ వాటి అర్థములను తెల్పుము.

5. ఇచ్చిన N సంఖ్యలు $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ లకు ఎస్సెండింగ్ శ్రేణి (ascending sequence) లో వ్రాయుటకు క్రమ చిత్రమును గీయుము.

6. ఇచ్చిన సంఖ్యలనుంచి ఋణాత్మక సంఖ్యలను లెక్కించుటకు క్రమచిత్రమును తయారుచేయుము.

ఖండిక – 14 : ఫోర్ట్రాన్ ప్రణాళి రచనా ఉపక్రమాలు

విషయసూచిక

14.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు : (i) ఫోర్ట్రాన్‌లో వాడే వివిధ అక్షరములు, పరిక్రియలను తెలుసుకొని వీటి నుపయోగించి ఫోర్ట్రాన్ సమాసాలు, వాక్యాలు వ్రాయగలగాలి. (ii) వాస్తవ చలరాశి, పూర్ణాంక చలరాశి, వాస్తవ స్థిరలరాశి, పూర్ణాంక స్థిరరాశులను తెలుసుకొని, ప్రోగ్రామ్ వ్రాసేటప్పుడు వీటిని సరైన విధంగా వ్రాయగలగాలి.

14.2 ఉపోద్ఘాతం

14.2.1 యంత్రభాషా ఉపదేశాలు

గణన యంత్రము క్రమ చిత్రమును నేరుగా గ్రహించలేదు. అది విపులీకరించబడిన యంత్రభాషా ఉపదేశములను మాత్రమే గ్రహించి అమలుపర్చగలదు. యంత్రభాష ఉపదేశాల అనుక్రమము. గణనయంత్రములను తయారుచేసిన తొలిరోజులలో యంత్రభాషలోనే ప్రణాళిని వ్రాసెడివారు. వేరు వేరు గణన యంత్రములు వేరు వేరు యంత్ర భాషలను కల్గియుండెడివి. ఉదాహరణకు 21 00500 09400 తీసుకొందాము. ఇది ఒక గణనయంత్రమునకు సంబంధించి ఒక యంత్ర భాషా ఉపదేశము. ఇందులో 21 కూడికకు చిహ్నము. పై ఉపదేశము యొక్క అర్థము 500 చిరునామాగల జ్ఞప్తి స్థలములో ఉంచబడిన సంఖ్యను 9400 చిరునామా గల జ్ఞప్తి స్థలములో ఉంచబడిన సంఖ్యకుకలిపి, వచ్చిన సంఖ్యను 9400 చిరునామా గల జ్ఞప్తి స్థలములో భద్రపరచుము అని. అన్ని జ్ఞప్తి స్థలముల చిరునామాలు, అన్నింటి చిహ్నములు మనకు తెలిసిన ఎడల ఉపదేశముల శ్రేణిని యంత్రభాషలో వ్రాయవచ్చును.

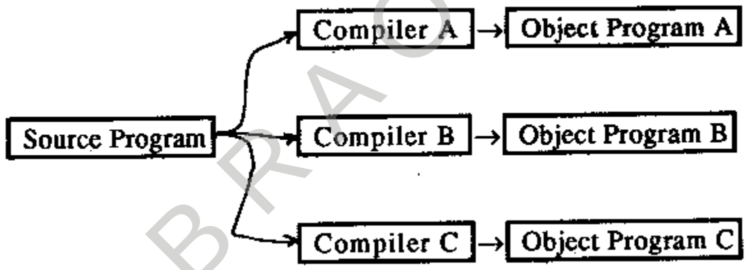
యంత్రభాషా ఉపదేశములను వ్రాయుటలో రెండు కష్టాలు కలవు. (1) ఒక గణన యంత్రములో చాలా జ్ఞప్తి స్థలములు, మరియు అనేక ఉపదేశాల సంకేతాలు ఉండును. వీటిన్నింటిని మనము

గుర్తుంచుకోవాల్సి వస్తుంది. (2) ఉపదేశాల సంకేతాలు వేరువేరు గణన యంత్రములకు వేరుగా ఉండును. ఒక గణన యంత్రము కొరకు వ్రాసిన యంత్రభాషా ఉపదేశాలు మరియొక గణన యంత్రమునకు పనికిరావు. దానికి మళ్ళీ వేరే యంత్రభాషా ఉపదేశాలు వ్రాయవలసి వస్తుంది. కనుక ఇది చాలా కష్టతరము. ప్రశ్నలను పరిష్కరించుటకు వ్రాయబడిన యంత్రభాషా ఉపదేశాల శ్రేణిని యంత్రభాషా ప్రణాళి అంటాము.

14.2.2 ఉన్నత భాషలు లేక ప్రణాళి రచనా భాషలు

ఈ రోజుల్లో ప్రణాళి రచన యంత్రభాషలో చెయ్యవలసిన అవసరము లేదు. ఏదేని ఒక ఉన్నత భాషలో ప్రణాళిని తయారుచేయవచ్చు. ఉన్నత భాషలో ఉపదేశాలు, చిహ్నాలు సంఖ్యలు కాకుండా, అంకగణితములోని సూత్రములవలె ఉండును. జ్ఞప్తి ప్రదేశాల చిరునామాలకు సంఖ్యలకు బదులు, సంబంధిత పేర్లనే వాడవచ్చును. కనుక ఈ భాషలను నేర్చుకొనుట మరియు ఉపయోగించుట చాలా సులభము. నేడు ఎక్కువగా ఉపయోగించే భాషలు ఫోర్ట్రాన్, కోబాల్, పాస్కల్, బేసిక్ మొదలగునవి.

ప్రతి ఉన్నత భాషకు ఒక నిర్దిష్ట గణనయంత్ర ప్రణాళి ఉండును. ఇది ఆ భాషలో వ్రాయబడిన ఆదేశాలను యంత్రభాషలోకి అనువదించును. దీనిని సంకలిని (Compiler) అంటాము. ఉన్నత భాషలలో వ్రాయబడిన ప్రణాళిని మూల ప్రణాళి (soruce program) అనియు, యంత్రభాషలో వ్రాయబడిన ప్రణాళిని ఉద్దేశ్య ప్రణాళి (object program) అంటాము. సంకలినిని నిష్ణాతులైన ప్రణాళి రచయితలు తయారుచేస్తారు. ఒక ఉన్నత భాషలో వ్రాసిన ప్రణాళిని అనేక గణనయంత్రములలో వాడవచ్చును కనుక, ఈ బాషలను యంత్ర స్వతంత్ర భాషలు అని కూడా అంటాము. వివిధ రకములైన ఉన్నత భాషలలో వ్రాయబడిన ప్రణాళిలను ఆయా సంకలినిలను (Compilers) ఉపయోగించి యంత్రభాషలోకి అనువదింపచేస్తాము. వివరముగా పటములో నీయబడినది.



పటం – 1

ప్రతి భాషకు కొన్ని నియమ నిబంధనలు ఉండును. అట్లాగే ప్రతి ఉన్నత భాషకు నియమ నిబంధనలు ఉండును. వీటిని ఆ భాషయొక్క వాక్యరచనా నియమములు అంటాము. ప్రణాళిలోని ప్రతి ఉపదేశమును, సంకలిని పరిశీలించి, వాక్యరచనా నియమములను ఉల్లంఘించని ఎడల, ప్రణాళి జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో భద్రపరచబడును. వాక్యరచనా నియమములను ఉల్లంఘించిన ఎడల, ఆ ఉల్లంఘనలను తెలియ పరచి, ప్రణాళిని అమలుపర్చదు.

తార్కిక సంబంధమైన తప్పులను సంకలిని గుర్తించలేదు. మన మనస్సులో ఉద్దేశ్యము దానికి తెలియదు. ఉదాహరణకు కొన్ని గణనలలో ఒకని వయస్సు 15 సంవత్సరములకు బదులు −15 అని సమాచారము అందించిన ఎడల, సంకలిని ఆ తప్పును గుర్తించలేదు. అది −15గా తీసుకొని గణన చేసి ఫలితమును అందించును. కానీ ఆ ఫలితములు తప్పులతో కూడుకొనినవి. కనుక ప్రణాళి తయారుచేయుటలో జాగ్రత్త వహించవలయును.

14.2.3 ఫోర్ట్రాన్ భాష

అత్యంత ఉపయోగమైన ఫోర్ట్రాన్ ఉన్నత భాషకు సంబంధిత విషయాలను గురించి తెల్సుకుందాము. ఈ భాష 1957 లో IBM చే విస్తరించబడినది. ఆంగ్లభాష మరియు గణితశాస్త్ర సంబంధిత పదముల కలయిక వలన ఏర్పడిన ఈ భాష శాస్త్రపరమైన, సాంకేతిక పరమైన ప్రశ్నలను పరిష్కరించుటకు ఎక్కువగా ఉపయోగపడును. ఫోర్ట్రాన్‌భాషను ఉపయోగించి, ప్రశ్నలను గణనయంత్రముతో పరిష్కరించుటను గురించి తెల్సుకుందాము. ఫోర్ట్రాన్ అర్థము సూత్ర అనువాదము. ఫోర్ట్రాన్ - II మరియు ఫోర్ట్రాన్ – IV, ఫోర్ట్రాన్ భాష యొక్క రూపాంతరాలు. మనము ఫోర్ట్రాన్ – IV గురించి తెలుసుకుందాము. ముమ్ముందు తరుచుగా, E.C.I.L వారిచే తయారుచేయబడిన TDC – 12, TDC – 316 గణనయంత్రములను ఉదహరిస్తు ఉంటాము.

ఏదేని భాషను నేర్చుకోవాలంటే, ముందు ఆ భాషలోని అక్షరములను నేర్చుకుంటాము. తర్వాత అక్షర సముదాయముతో మాటలను, మాటల ద్వారా వాక్యములను తయారుచేయుట నేర్చుకుంటాము. అదే విధముగా ఉన్నత భాషను కూడా నేర్చుకుంటాము.

ఇప్పుడు మనము ఫోర్ట్రాన్ - IV భాషయొక్క నియమ నిబంధనల గురించి తెల్సుకుందాము. ముమ్ముందు ఫోర్ట్రాన్ అంటే ఫోర్ట్రాన్ - IV అని అర్థము.

14.3 ఫోర్ట్రాన్ భాష యొక్క అక్షరములు

ఫోర్ట్రాన్ భాషలో ఉపయోగించెడి అక్షరములు ఈ క్రింద నీయబడినవి. వీటిని ఫోర్ట్రాన్ అక్షర సముదాయము అంటాము.

ఆంగ్ల భాషలోని పెద్ద అక్షరములు : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

దశాంశ అంకెలు : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ప్రత్యేక అక్షరములు :

సమానము (Equal to)	=
కూడిక (Plus)	+
తీసివేత (Minus)	–
గుణకారము (Asterisk Symbol)	*
భాగహారము (Slash Symbol)	/
ఎడమ బ్రాకెట్టు (Left Parenthesis)	(
కుడి బ్రాకెట్టు (Right Parenthesis)	)
కామా (Comma)	,
దశాంశ నిరూపకము (Decimal point)	.

కరన్సీ గుర్తు (Currency symbol) $

ఖాళీ గుర్తు (Blank) ɓ

పైన పేర్కొన్న అక్షర సముదాయము, మరియు వాక్య నిర్మాణ నియమ నిబంధనలు కలిసి ఫోర్ట్రాన్ - IV భాష అగును.

స్థిరరాశులు, చలరాశులు, సమాసములు, వాక్యముల నిర్మాణ సంబంధమయిన నియమనిబంధనలను గురించి నేర్చుకుందాము.

14.3.1 అంకగణిత పరిక్రియలు

ఫోర్ట్రాన్ అయిదు అంకగణిత పరిక్రియలను అనుమతించును. అవి కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారము మరియు ఘాతకీకరించుట (Exponentiation). మిగతా పరిక్రియలన్నింటిని పైన పేర్కొన్న అయిదు పరిక్రియల సముదాయముగా వ్రాయవలెను. పైన పేర్కొన్న పరిక్రియలకు క్రింద నీయబడిన గుర్తులను వాడతాము.

పరిక్రియ	గుర్తు
కూడిక	+
తీసివేత	–
గుణకారము	*
భాగహారము	/
ఘాతికీకరణ	**

ఫోర్ట్రాన్ భాషలో పైన పేర్కొన్న పరిక్రియల అర్థము పరిశీలించుటకు ఈ క్రింది పట్టీని చూడుము.

ఉదాహరణ	అర్థము
1. A = B	A యొక్క విలువ స్థానములో B యొక్క విలువ ఉండును.
2. A = B + C	B, C ల విలువలను కూడి A విలువ బదులుగా ఉంచును.
3. R = P ** Q	P^Q విలువ కనుగొని R స్థానములో ఈ విలువను ఉంచును.

14.4 ఫోర్ట్రాన్ స్థిరరాశులు

బీజగణితంలో రెండు రకాల పరిమాణాలను గురించి తెల్సుకున్నాము. అవి : (1) స్థిరరాశులు. (2) చలరాసులు. ఒక పరిమాణం, నిర్ణయింపబడిన ఒకే సంఖ్యా విలువ కల్గియుండిన, దానిని స్థిరరాసి అంటాము. పరిమాణం యొక్క సంఖ్యావిలువ తెలియకపోయినా, లేక సంఖ్యావిలువ మారుతూ ఉన్నా, దానిని చలరాసి అంటాము. ఉదాహరణకు A = 5 + 2B లో 5, 2 లు స్థిరరాసులు, A మరియు B చలరాసులు.

ఫోర్ట్రాన్ శాస్త్రపరమైన భాష కావున, ఇందులో స్థిరరాసులను, చలరాసులను, ఉపయోగించవచ్చు. ఫోర్ట్రాన్ భాషలోకూడా వీటి అర్థము బీజగణితంలో మాదిరిగానే. ఒక పరిమాణంను సంఖ్యావిలువతో సూచించిన దానిని స్థిరరాసి అనియు, పేరుతో సూచించిన దానిని చలరాసి అనియు అంటాము. ప్రణాళి రచనాభాష, ఫోర్ట్రాన్ భాష యొక్క ముఖ్య అంశాలు, ఫోర్ట్రాన్ స్థిరరాసులు, చలరాసులు, సమాసాలు మరియు వాక్యాల గురించి తెల్సుకుందాము.

ఫోర్ట్రాన్ భాషలో రెండు రకాల స్థిరరాసులను ఉపయోగిస్తాము. అవి : (1) పూర్ణాంక స్థిరరాసి లేక స్థిర బిందు స్థిరరాసి, (2) వాస్తవ స్థిరరాసి లేక అస్థిరబిందు స్థిరరాసి.

14.4.1 పూర్ణాంక స్థిరరాసి

భిన్నాంకము లేని సంఖ్యను పూర్ణాంక స్థిరరాసి అంటాము. క్రిందనీయబడిన నియమముల ననుసరించి ఫోర్ట్రాన్ భాషలో పూర్ణాంక స్థిరరాసులను వ్రాస్తాము. భాషా నియమాలను మనము ఖచ్చితంగా పాటించాలి, లేకపోతే గణనయంత్రం ప్రణాళిని ఆమోదించదు.

నియమాలు :

i) పూర్ణాంక స్థిరరాసి, దశాంశ నిరూపకం, కామా, ఘాతకీకరణ గుర్తులు కల్గియుండరాదు.

ii) '+' లేక '—' గుర్తులు కల్గియుండవచ్చును.

iii) స్థిరరాసి ముందర '+' గాని '—' గాని లేని ఎడల దానిని ధనాత్మకముగా తీసుకుంటాము.

పూర్ణాంక స్థిరరాసి అత్యున్నత, అతి తక్కువ విలువలు మనం ఉపయోగించే గణనయంత్రం మీద ఆధారపడి ఉంటాయి. TDC - 312 గణన యంత్రములో పూర్ణాంక స్థిరరాసులు +2407, –2407 ల మధ్య ఉంటాయి. TDC - 316 గణన యంత్రములో +32768, –32768 ల మధ్య మరియు IBM – 360 లో $(2^{31}-1)-(21^{31}-1)$ ల మధ్య ఉంటాయి.

ఉదాహరణలు

1.	560	—	పూర్ణాంక స్థిరరాసి
2.	–10	—	పూర్ణాంక స్థిరరాసి
3.	2,352	—	కామా ఉన్నది కావున పూర్ణాంక స్థిరరాసి కాదు
4.	11.	—	దశాంశ నిరూపకము ఉన్నందున పూర్ణాంక స్థిరరాసి కాదు.
5.	100	—	పూర్ణాంక స్థిరరాసి.

14.4.2 వాస్తవ స్థిరరాసి

దశాంశ నిరూపకము కల్గిన సంఖ్యను ఫోర్ట్రాన్ వాస్తవ స్థిరరాసి అంటాము. దశాంశ నిరూపకము, మొదట గానీ, చివరగానీ, లేక రెండు అంకెల మధ్యగానీ ఉండవచ్చును. ముందర '+' గానీ '—' గానీ లేకపోయినా దానిని ధనాత్మకంగా తీసుకుంటాము. వాస్తవ స్థిరరాసిలో ఎన్ని అంకెలు ఉండవచ్చు అనేది మనము ఉపయోగించే గణనయంత్రము మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. మధ్యలో ప్రత్యేక అక్షరాలు వాడరాదు.

ఉదాహరణలు

1. 123.456 — వాస్తవ స్థిరరాసి.
2. 0. — వాస్తవ స్థిరరాసి.
3. 1540 — దశాంశ నిరూపకము లేదుకావున వాస్తవ స్థిరరాసి కాదు.
4. 4,522.7 — కామా ఉన్నది కాబట్టి వాస్తవ స్థిరరాసి కాదు.
5. –17.56 — వాస్తవ స్థిరరాసి.

వాస్తవ స్థిరరాసులను ఘాతకీకరణ రూపంలో కూడా వ్రాయవచ్చును. ఈ రూపములో మొదట దశాంశ నిరూపకము కల్గిన కొన్ని అంకెల సమూహము మాంటిసా (Mantissa) ఉండి తర్వాత 'E' అనే అక్షరం ఉండి తర్వాత దశాంశ నిరూపకములేని కొన్ని అంకెల సమూహము ఘాతము (Exponent) ఉంటుంది. మాంటిసా, ఘాతము రెంటికి విడివిడిగా '+' లేక '—' గుర్తులు కల్గియుండును. ఉదాహరణకి 10.321 E – 19 లో 10.321 ను మాంటిసా అని, –19 ను ఘాతము అని అంటాము. ఈ సంఖ్య యొక్క విలువ 10.321×10^{-19}.

మాంటిసా, ఘాతము మేరలు (Ranges) మనము ఉపయోగించే గణనయంత్రం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. TDC - 312 లో ఘాతము మేర ± 610, మరియు మాంటిసా మేర 7 అంకెలు, TDC - 316 లో ఘాతము మేర ± 38, మాంటిసా 7 అంకెలు వరకు కల్గియుండవచ్చును.

ఉదాహరణలు

1. .36 E – 17 — వాస్తవ స్థిరరాసి.
2. 34.786 E 25 — వాస్తవ స్థిరరాసి.
3. 16.0 E 5 — ఘాతములో దశాంశ నిరూకము ఉండుటవలన వాస్తవ స్థిరరాసి కాదు.
4. –1.492 E + 03 — వాస్తవ స్థిరరాసి.
5. 175.67 E 00 — వాస్తవ స్థిరరాసి.

14.5 ఫోర్ట్రాన్ చలరాసులు

14.5.1 పూర్ణాంక చలరాసులు

ఒక పరిమాణము, ప్రణాళిని అమలుపర్చునపుడు, వివిధ విలువలను తీసుకొంటే దానిని పూర్ణాంక చలరాసి అంటాము. ప్రతి చలరాసికి ఒక పేరు ఇస్తాము. ఆ పేరుతో జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో కొన్ని జ్ఞప్తి స్థలములు కేటాయింపబడి, అక్కడ ఆ చలరాసి యొక్క విలువ నిలువ చేయబడుతుంది. ఒక చలరాసికి కేటాయింపబడిన జ్ఞప్తి స్థలములలో ఆ చలరాసి యొక్క సంఖ్యా విలువ నిలువ చేయబడినపుడు, ఆ చలరాసి నిర్వచింపబడినది అంటాము. గణనలో మొదటిసారిగా ఉపయోగించే ముందుగా ఆ చలరాసి నిర్వచింపబడవలెను.

జ్ఞప్తి స్థలమునుండి చలరాసి విలువ ఒకసారి గణనలో ఉపయోగించిన తర్వాత కూడా ఆ విలువ ఆ స్థలములో ఉంచబడుతుంది. కొత్త విలువను ఆ స్థలములో ఉంచబడినపుడు, పూర్వపు విలువ చెరిపివేయ

బడుతుంది. స్థిరరాసులు సంపూర్ణ స్థిరరాసులు, వాస్తవ స్థిరరాసులు అని రెండు విధములని మనకు తెలును. అదే విధంగా చలరాసులు రెండు రకాలు. మొదటిది సంపూర్ణ చలరాసి, రెండవది వాస్తవ చలరాసి. పూర్ణాంక చలరాసి పేరుకు కేటాయింపబడిన జ్ఞప్తి స్థలములలో పూర్ణాంక విలువలు, వాస్తవ చలరాసి పేరుకు కేటాయింపబడినా జ్ఞప్తి స్థలములలో వాస్తవ సంఖ్యలు ఉంచబడతాయి.

పూర్ణాంక చలరాసుల నియమాలు

1. ఒకటి నుంచి అయిదు అక్షరాల లేదా అంకముల కలయిక వలన ఏర్పడిన దానిని పూర్ణాంక చలరాసి అంటాము.
2. పేరులోని మొదటి అక్షరము I, J, K, L, M మరియు N లలో ఒకటి అయి ఉండవలెను.
3. పేరులో ప్రత్యేక అక్షరములు వాడరాదు.

కొన్ని గణనయంత్రాలు ఒకటినుంచి ఆరు అక్షరాలు లేదా అంకముల కలయికను గూడా అనుమతించును.

ఉదాహరణలు

1. JOHN — పూర్ణాంక చలరాసి పేరు.
2. K12 — పూర్ణాంక చలరాసి పేరు.
3. COUNT — I, J, K, L, M మరియు N లలో ఒకటి మొదటి అక్షరము కాదు కావున, ఇది పూర్ణాంక చలరాసి పేరు కాదు.
4. IA * B — ప్రత్యేక అక్షరం '*' ఉండుటవలన, ఇది పూర్ణాంక చలరాసి కాదు.
5. KOUNT — పూర్ణాంక చలరాసి పేరు.

14.5.2 వాస్తవ చలరాసులు

వాస్తవ చలరాసులను అస్థిర బిందు చలరాసులు అని కూడా అంటాము. వాస్తవ చలరాసి పేరుగల జ్ఞప్తి స్థలములో వాస్తవ స్థిరరాసి ఉంచబడుతుంది.

వాస్తవ చలరాసుల నియమాలు

1. ఒకటి నుంచి అయిదు అక్షరాల లేదా అంకముల కలయిక వలన ఏర్పడిన దానిని వాస్తవ చలరాసి అంటాము. (కొన్ని గణనయంత్రాలు ఆరు అక్షరాల వరకు అంగీకరించును.)
2. పేరులో మొదటి అక్షరం I, J, K, L, M, N లు కాకుండా ఇతరములయి ఉండవలెను.
3. ప్రత్యేక అక్షరాలు వాడరాదు.

ఉదాహరణలు

1. BETA — వాస్తవ చలరాసి పేరు.
2. TAX — వాస్తవ చలరాసి పేరు.
3. AB.DE — దశాంశ నిరూపకము ఉండుటవలన ఇది వాస్తవ చలరాసి పేరు కాదు.

4. D 156 — వాస్తవ చలరాసి పేరు.

5. IMAT — 'I' మొదటి అక్షరం అగుటవలన ఇది వాస్తవ చలరాసి పేరు కాదు. ఇది పూర్ణాంక చలరాసి పేరు.

'LIFE' అనునది పూర్ణాంక చలరాశి పేరు. దీనిని వాస్తవ చలరాసిగా తీసుకోవాలంటే ముందర I, J, K, L, M మరియు N లు కాకుండా, ఒక అక్షరము అంటే 'ALIFE' గానో 'PLIFE' గానో తీసుకోవచ్చును. అట్లాగ వాస్తవ చలరాసి 'BETA' ను పూర్ణాంక చలరాసి పేరుగా తీసుకోవాలంటే ముందర I, J, K, L, M మరియు N లలో ఒక దానిని ముందరచేర్చవలెను. అంటే 'IBETA' గానో 'MBETA' గానో తీసుకోవచ్చును.

14.5.3 పూర్ణాంకచలరాసుల, వాస్తవ చలరాసుల రూపము తెలియజేయు వాక్యములు

పూర్ణాంక చలరాసి పేరు మొదటి అక్షరం I, J, K, L, M మరియు N లలో ఒకటి అయి ఉండాలి. మరియు వాస్తవ చలరాసి పేరులో మొదటి అక్షరము I, J, K, L, M మరియు N లు కాక ఇతరములు అవ్వవలెను అనునది FORTRAN II భాషలోని నియమము. FORTRAN IV భాషలో మనము ఒక చలరాసిని పూర్ణాంక చలరాసిగానో లేక వాస్తవ చలరాసిగానో ప్రకటించి ఉపయోగించవచ్చును. ఇందుకోసమై వాడెడి వాక్యమును చలరాసుల రూపము తెలియజేయు వాక్యాలు అంటాము. అవి ఈ క్రింది రూపములో ఉంటాయి.

INTEGER చలరాసుల జాబితా, చలరాసుల పేర్ల మధ్య కామా ఉండవలెను. చివర ',' ఉండరాదు.

REAL చలరాసుల జాబితా, చలరాసుల పేర్ల మధ్య కామా ఉండవలెను. చివర ',' ఉండరాదు.

ఉదాహరణకి

INTEGER LIFE, X, GAMA, ALPHA

REAL I, SUM, LENG, KOUNT

రూపము తెలియజేయు వాక్యములు ఆ చలరాసుల (ఈ వాక్యము జాబితాలో నీయబడిన) విలువలు ఏ రూపములో ఉంటాయి అను విషయమును సంకలినికి తెలియపర్చును. ఒక ప్రణాళిలో ఈ రూపము తెలియజేయు వాక్యములు ఎన్నయినా ఉండవచ్చును. ప్రణాళిలో చలరాసిని మొదటగా ఏ వాక్యములో వాడుతామో ఆ వాక్యముకంటే ముందరగా ఆ చలరాసికి సంబంధించిన రూపము తెలియజేయు వాక్యము ఉండవలెను. సాధారణంగా ప్రణాళిలో మొదటి వాక్యములుగా వీటిని వ్రాస్తాము.

14.6 ఫోర్ట్రాన్ సమాచాలు

ఫోర్ట్రాన్, కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారము, ఘాతీకీకరణ అను అయిదు అంకగణిత పరిక్రియలను అనుమతిస్తుంది అని మనకు తెలుసు. ఈ అంకగణిత పరిక్రియలకు రెండు బాహుళకములు (Modes) కలవు. మొదటిది పూర్ణాంక బాహుళకము రెండవది వాస్తవ బాహుళకము. పూర్ణాంక బాహుళకములో అంకగణిత పరిక్రియలు పూర్ణాంక స్థిర సంఖ్యలు మరియు/లేదా పూర్ణాంక చలరాసుల మధ్య జరుగును. వీటి ఫలితము పూర్ణాంక స్థిరరాసి. అంటే 7/4 యొక్క ఫలితము 1 అంతేకాని 1.75 కాదు. అట్లాగే 1/2 యొక్క ఫలితము 0 అంతేకానీ 0.5 కాదు. వాస్తవ బాహుళకములో అంకగణిత పరిక్రియలు వాస్తవ స్థిర సంఖ్యలు మరియు/లేదా వాస్తవ చలరాసుల మధ్య జరుగును. వీటి ఫలితము వాస్తవ చలరాసి ఫలితములలో భిన్నాంకములు కూడా ఉండును. అంటే 1/2 యొక్క ఫలితము .5 అంతేకానీ 0 కాదు.

అంకగణిత పరిక్రియల చిహ్నములతో కలపబడిన చలరాసుల మరియు స్థిరరాసుల శ్రేణిని ఫోర్ట్రాన్ అంకగణిత సమాసము అంటాము. ఇది ఒక పరిమాణమును తెలియజేయును. కనుక '+' లేదా '—' గుర్తు ఉన్నా లేకపోయినా పూర్ణాంక లేదా వాస్తవ చలరాసి లేదా పూర్ణాంక లేదా వాస్తవ అస్థిరరాసి సమాసము అవుతుంది. ఉదాహరణకు —I, –15, 17.4, A + 1.5, I * J – 5, KON * 5—I * K మొదలగునవి అంగీకరింపబడు సమాసములు. సమాసములోని అన్ని చలరాసులు, స్థిరరాసులు ఒకే బాహుళకములో ఉండవలెను. (సమాన గణనము కొరకు) కనుక సమాసములు రెండు రకాలు (1) పూర్ణాంక సమాసములు (2) వాస్తవ సమాసములు.

సమాసముల తయారులోను గణనములోనూ ఈ క్రింది విషయములు గుర్తుంచుకోవాలి.

1) రెండు పరిక్రియల చిహ్నములు వరుసగా రాకూడదు.

ఉదాహరణలు

i) A * – B ఇది సమానం కాదు, '*' మరియు '—' వరుసగా ఒకేసారి వస్తున్నవి కాబట్టి

ii) I * * 6 ఇది సమానము, '* *' ఒకే పరిక్రియ కావున.

2) '+' గానీ '—' గానీ చిహ్నము తర్వాత చలరాసి కానీ స్థిరరాసి కానీ తప్పక ఉండవలెను. మిగతా పరిక్రియలకు ముందూ, వెనుకా కూడా చలరాసి కానీ, స్థిరరాసి కానీ ఉండవలెను.

ఉదాహరణలు

i) B + 7.4 –	—	సమాసము కాదు, ఎందుకంటే '—' తర్వాత చలరాసి కాని స్థిరరాసి కాని లేదు కాబట్టి.
ii) –I * J + K/L	—	సమాసము అగును.
iii) –C + 17.7 +	—	సమాసము కాదు, ఎందుకంటే '+' తర్వాత ఏదీ లేదు కాబట్టి.

3) సమాసమును వివిధ భాగాలుగా విడదీయుటకు బ్రాకెట్లను ఉపయోగించవచ్చును. ప్రతి ఎడమ బ్రాకెట్‌ను, కుడి బ్రాకెట్ కూడా ఉండవలెను.

ఉదాహరణలు

i) $\frac{A}{5C}$ ని A/(5. * C) గా వ్రాయాలి. A/5. * C గా వ్రాస్తే అది $\frac{AC}{5}$ అవుతుంది.

ii) IA/–5 తప్పు IA/(–5) కరక్టు.

iii) $\left(\frac{C}{D}\right)^{(A-B)}$ ని (C/D) * * (A – B) గా ఫోర్ట్రాన్ భాషలో వ్రాస్తాము.

4) సమాన గణనలో ఒకటి తర్వాత ఒకటి అంకగణిత పరిక్రియలను పరిగణలోకి తీసుకుంటాము. అంకగణిత పరిక్రియల పరిగణనకు ఈ క్రింది వరుసక్రమము గణనయంత్రం తీసుకుంటుంది. బ్రాకెట్లు లేనప్పుడు వరుసక్రమము ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

i) ఘాతికీకరణాలు మొదట.

ii) తర్వాత గుణకారములు, భాగాహారములు.

iii) చివరగా కూడికలు, తీసివేతలు.

పైన పేర్కొన్న వరుసక్రమమును పరిక్రియల వరుసక్రమము అంటాము.

ఉదా 1 : A * * B/C+D

ఇచ్చట మొదట ఘాతీకీకరణ (A * * B), ఆ ఫలితమును తర్వాత C చే భాగహారించును. అప్పుడు D ని ఆ ఫలితమునకు కలుపును.

కనుక ఫలితము $= \frac{a^b}{c} + d$

ఉదా 2 : ఈ క్రిందనీయబడిన ఫోర్ట్రాన్ సమాసమునకు సమానమైన గణిత సమాసమును వ్రాయుము.

A * * B/C+D * * E * F – H/P*R+Q.

సాధన : వరుసక్రమము ననుసరించి ఘాతీకీకరణ మొదట.

$\therefore A^B, D^E$ గణన చేయును.

తర్వాత గుణకారములు, భాగహారములు.

కనుక $\frac{A^B}{C}, D^E F, \frac{H}{P} R$ లను గణన చేయును.

చివరగా కూడికలు, తీసివేతలు గణనచేయును. కనుక గణిత సమాసము

$$= \frac{A^B}{C} + D^E F - \frac{H}{P} R + Q$$

ఉదా 3 : A/B/C అంటే a/bc మరియు P/Q*R అంటే $\frac{p}{q}r$ కానీ $\frac{p}{qr}$ కాదు.

5) వరుసక్రమము మార్చవలసి వచ్చినపుడు, బ్రాకెట్లను ఉపయోగిస్తాము. సమాసములో బ్రాకెట్లు ఉంటే, మొదటగా బ్రాకెట్లను విడదీయును. బ్రాకెట్ల లోపల ఉన్న సమాసము గణన చేయుటకు మామూలు వరుసక్రమమునే ఉపయోగిస్తాము. ఒక సమాసములో అనేక బ్రాకెట్లు ఉంటే, మొదట లోపలి చిన్న బ్రాకెట్లు, తర్వాత పెద్దవి, అట్లా అన్ని బ్రాకెట్లు విడదీయును.

ఉదా 1 : A * B – C/(5. * D – 6.2)

సాధన :

మొదట (5. * D – 6.2) విలువ కనుగొనుము. దానిని e_1 అనుకొనుము. తర్వాత A * B విలువ కనుగొనుము దాని విలువ e_2 అనుకొనుము. తర్వాత c/e_1 విలువ కనుగొనును. దానిని e_3 అనుకొనుము. చివరగా $e_2 - e_3$ విలువ కనుగొనుము.

ఉదా 2 : (P * Q/R) + (X * (X * (A * X + B) + C) + D) + W ని గణన చేయుము.

సాధన :

మొదటగా మొదటి బ్రాకెట్లు అంటే (P*Q/R) విలువ కనుగొనును. దానిని e_1 అనుకొనుము. తర్వాత లోపలి బ్రాకెట్లు (A * X + B) గణన చేయును. దాని విలువ e_2 అనుకొనుము.

తర్వాత ($X * e_2 + C$) విలువ గణన చేయును. దానిని e_3 అనుకొనుము. తర్వాత ($X * e_3 + D$), దాని విలువ e_4 అనుకొనుము.

చివరగా $e_1 + e_4 + W$ గణనచేయును.

6) ఒక సమాసములోని చలరాసులు, స్థిరరాసులు అన్నీ పూర్ణాంక చలరాసులు పూర్ణాంక స్థిరరాసులు ఐన ఆ సమాసమును పూర్ణాంక అంకగణిత సమాసము అంటాము. అట్లాకాక అన్ని పరిమాణాలు వాస్తవ చలరాసులు లేక వాస్తవ స్థిరరాసులు అయిన, ఆ సమాసమును వాస్తవ అంకగణిత సమాసము అంటాము. కొన్ని పూర్ణాంక రాసులు, కొన్ని వాస్తవ రాసులు అయిన ఆ సమాసమును పూర్ణాంక, వాస్తవ రాసుల కలయిక సమాసము అంటాము ఆ సమాసంలోని పదముల బహుళకము ఆ పదములలోని చలరాసులలోని చలరాసుల, స్థిరరాసుల బహుళకము మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక పదములోనివన్ని పూర్ణాంక చలరాసులు, పూర్ణాంక స్థిరరాసులు అయితే, ఆ పదమును పూర్ణాంక బహుళకములో గణనంచేయును. పదములోనివి కొన్ని పూర్ణాంక రాసులు, కొన్ని వాస్తవ రాసులు అయినప్పుడు, పూర్ణాంక రాసులను వాస్తవ రాసులుగా మార్చి గణనలను వాస్తవ బహుళకములో చేయును. ఫోర్ట్రాన్ – IV సంకలనులు పూర్ణాంక, వాస్తవ రాసుల కలయిక సమాసము లను కూడా అంగీకరించును.

ఉదా 1 : I/J+A/ (I + J) – K * * J

సాధన :

ఇచట i) I, J ని పూర్ణాంక బహుళకములో భాగహరించును.

ii) తర్వాత (I + J) ని పూర్ణాంక బహుళకమకులో గణనచేయును.

iii) (I + J) = *e* అయిన, *e* ను వాస్తవ బహుళకములోకి మార్చి A/(I + J) ను వాస్తవ బహుళకములో గణన చేయును.

iv) (K * J) ని పూర్ణాంక బహుళకములో గణనచేయును.

v) చివరగా ఫలితము వాస్తవ బాహుళకములో అందించును.

7) వాస్తవ లేక పూర్ణాంక సమాసమును, వాస్తవ లేక పూర్ణాంక సమాసముచే ఘాతీకీకరించ వచ్చును. ఋణ సంఖ్యను వాస్తవ సంఖ్యచే ఘాతీకీకరించరాదు. 'R' మరియు 'J' లు పూర్ణాంక సమాసాలు అయినప్పుడు

i) I * * J ను పూర్ణాంక బహుళకములో I ను I చే J సార్లు గుణించుట ద్వారా గణన చేయును.

ii) R * * S ను $10^{(S \log_{10} R)}$ సూత్రమును ఉపయోగించి బహుళకములో గణనచేయును.

iii) I * * S ను, I ను వాస్తవ బహుళకములోకి మార్చి, వాస్తవ బహుళకములో గణనచేయును.

iv) R * * I ను వాస్తవ బహుళకములో R ను R చేత I సార్లు గుణించుట ద్వారా గణనచేయును.

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదా 1 : $\frac{a-b}{a+b}$కు సమానమైన ఫోర్ట్రాన్ సమాసమును కనుగొనుము.

సాధన :

సాధారణంగా A – B/A + B అని వ్రాస్తాము. కానీ ఇది సరికాదు.

ఎందుకనగా దీని అర్థము $a - \frac{b}{a} + b$. మనకు కావలసినది ఇదికాదు. A – B/(A + B) కూడా సరికాదు. ఎందుకంటే దీని అర్థము $a - \frac{b}{(a+b)}$ సరియైన ఫోర్ట్రాన సమాసము (A – B)/(A + B).

కనుక ఫోర్ట్రాన్ సమాసములు కనుగొనునపుడు చాలా జాగ్రత్తగా అనువదించవలెను.

ఉదా 2 : ఈ క్రింది బహుపదికి సమానమైన ఫ్రోర్ట్రాన్ సమాసమును వ్రాయుము.

$$6x^4 + 5.2x^3 + 17.5x^2 + 12x + 5$$

సాధన :

సమానమైన ఫోర్ట్రాన్ సమాసము

6. * X * * 4 + 5.2 * X * * 3 + 17.5 * X * * 2 + 12. * X + 5.

గణనయంత్రం ప్రతి పరిక్రియకు కొంత సమయమును తీసుకొనును. కనుక పరిక్రియలను తగ్గించుట ద్వారా తక్కువ కాలములో ఫలితములను పొందవచ్చును. పైన పేర్కొన్న ఫోర్ట్రాన్ సమాస గణనకు 4 కూడికలు, 9 గుణకారములు అవసరము. బ్రాకెట్లను ఉపయోగించుటవలన అంకగణిత పరిక్రియల సంఖ్యను తగ్గించవచ్చును. కనుక ఈ క్రింది విధముగా సమానమైన ఫోర్ట్రాన్ సమాసము కనుగొందాము.

$$\begin{aligned} 6x^4 + 5.2x^3 + 17.5x^2 + 12x + 5 &= 5 + 12x + 17.5x^2 + 5.2x^3 + 6x^4 \\ &= 5 + x\left(12 + 17.5x + 5.2x^2 + 6x^3\right) \\ &= 5 + x\left(12 + x\left(17.5 + 5.2x + 6x^2\right)\right) \\ &= 5 + x\,(12 + x\,(17.5 + x\,(5.2 + 6x))) \end{aligned}$$

∴ సరియైన ఫోర్ట్రాన్ సమాసము = 5. + X * (12. + X * (17.5 + X * (5.2 + 6. * X)))

(దీనికి 4 కూడికలు, 4 గుణకారములు మాత్రమే అవసరము)

14.7 అంకగణిత వాక్యాలు

ఫోర్ట్రాన్‌లో '=' చిహ్నము అర్థము సమానము అనికాదు. పాత విలువను కొత్త విలువతో స్థానభ్రంశము చేయవలెను అని అర్థము. ఉదాహరణకు K = K + 5 అపగా K విలువ K యొక్క పాతవిలువ +5 అని అర్థము.

ఫోర్ట్రాన్ అంకగణిత వాక్యము సాధారణ రూపము

చలరాసి పేరు = సమాసము i.e., V = e

ఉదాహరణలు

i) I = 10 – (J/10) * 100 + K * * 2 — సరియైన అంకగణిత వాక్యము.

ii) S = (A + B + C) * 0.5 — సరియైన అంకగణిత వాక్యము.

iii) N = N + 5 — సరియైన అంకగణిత వాక్యము.

iv) W = X/0.0 — సరియైన అంకగణిత వాక్యముకాదు, ఎందుకనగా '0' చే భాగహారము అనుమతించబడదు.

v) S = (–15) * * 6.5 — సరియైన అంకగణిత వాక్యము కాదు, ఎందుకనగా ఋణ సంఖ్యను వాస్తవ సంఖ్యచే ఘాతీకీకరించరాదు.

అంకగణిత వాక్యముల (V = *e*) గణనయందు ఈ క్రింది విషయములను గుర్తుంచుకొనవలెను.

1. V మరియు *e* ఒకే బహుళకమునకు చెందిన, *e* యొక్క సంఖ్యా విలువ ఏ మార్పు లేకుండా V కు ఆపాదించబడును.

2. V వాస్తవ బహుళకము, *e* పూర్ణాంక బహుళకమునకు చెందిన ఎడల, *e* యొక్క సంఖ్యావిలువ వాస్తవ బహుళకములోకి మార్చబడి ఆ విలువ V కు ఆపాదించబడుతుంది. ఉదాహరణకు Z = 17/7 యందు 17/7 ను పూర్ణాంక బహుళకములో గణనచేయగా 2 వచ్చును. 2 ను వాస్తవ బహుళకములో మార్చగా 2.0 అగును. ఈ విలువను Z కు ఆపాదించును.

3. V పూర్ణాంక బహుళకము, *e* వాస్తవ బహుళకమునకు చెందిన ఎడల, *e* యొక్క సంఖ్యావిలువలోని భిన్నాంకమును వదిలివేసి, పూర్ణాంక విలువను మాత్రమే V కు ఆపాదించును. ఉదాహరణకు J = 18.6/3. యందు 18.6/3 ను వాస్తవ బహుళకములో గణనచేయగా 6.2 వచ్చును. దీనిని పూర్ణాంక బహుళకములోకి మార్చి (అంటే 6ను) J కు ఆపాదించును.

ఉదాహరణ

J = 2, K = 5 అయిన, ఈ క్రింది అంకగణిత వాక్యము ద్వారా I విలువను కనుగొనుము.

I = J * 2/3 + K/4 + 6 – J * * 3/8

సాధన :

I = 2 * 2/3 + 5/4 + 6 –2 * * 3/8

= 4/3 + 5/4 + 6 –8/8

= 1 + 1 + 6 – 1

= 7

(అంకగణిత పరిక్రియల వరుసక్రమము ననుసరించి)

14.8 ప్రత్యేక ప్రమేయాలు

అంకగణిత పరిక్రియలతోపాటు మనము సాధారణంగా వర్గమూలము, సైన్, కొసైన్, ఘాతికా ప్రమేయము మొదలగు సామాన్య ప్రమేయములను కూడా ఉపయోగిస్తూ ఉంటాము. ఫోర్ట్రాన్ భాషకూడా ఇటువంటి సామాన్య ప్రమేయములను అంకగణిత వాక్యములలో ఉపయోగించుట అనుమతించును. అంగీకరించు సామాన్య ప్రమేయముల జాబితా మనము ఉపయోగించే గణణయంత్రం మీద ఆధారపడి

ఉంటుంది. వాటిని వ్రాసే విధానము ప్రమేయము పేరు (సమాసము యొక్క చలరాసి పేరు). ఉదాహరణకు వాస్తవ పరిమాణము Z యొక్క వర్గమూలము గణన కొరకు, SQRT (Z) అని వ్రాస్తాము.

కొన్ని ముఖ్యమైన సామాన్య ప్రమేయములు మరియు ఫోర్ట్రాన్ భాషలో వాటి రూపములు ఈ క్రింద నీయబడినవి.

ప్రమేయము	రకము	ఫోర్ట్రాన్ రూపము
$\sin x$	వాస్తవము	SIN (X)
$\cos x$ (x రేడియన్లలో)	వాస్తవము	COS (X)
e^x	వాస్తవము	EXP (X)
$\lvert x\rvert$	వాస్తవము	ABS (X)
$\lvert k\rvert$	పూర్ణాంకము	IABS (K)
$\log_e x$	వాస్తవము	ALOG (X)
$\log_{10} x$	వాస్తవము	ALOG10 (X)
Arc tan x	వాస్తవము	ATAN (X)
$\sqrt{x}$	వాస్తవము	SQRT (X)

14.9 సారాంశము

ఒక సమస్యను పరిష్కరించడానికి వ్రాసిన యంత్రభాషా ఉపదేశముల శ్రేణిని యంత్రభాషా ప్రణాళి (machine language program) లేదా (object program) అంటాము. యంత్రభాషలో ప్రోగ్రామ్ వ్రాయడం చాలా కష్టమైనపని. అందుకని ప్రోగ్రామ్‌లు వ్రాయడానికి తేలికైన భాషలను రూపొందించారు. వీటిని ప్రోగ్రామింగ్ భాషలని లేదా హై లెవల్ భాషలు లేదా మెషీన్‌మీద ఆధారపడని భాషలని అంటాము. ఈ ప్రతీ ప్రోగ్రామింగ్ భాషకు అనుగుణంగా కంప్యూటర్‌లో ఈ భాషను, యంత్రభాషలోకి మార్చడానికి ఒక కంపైలర్ ఉంటుంది. కంపైలర్ అంటే ఈ అనువాదం కొరకు వ్రాసిన ఒక సవివరమైన ప్రోగ్రాం అన్నమాట. ఈ కంపైలర్ మనం వ్రాసిన ప్రోగ్రాం భాషను యంత్రభాషలోకి అనువదించడం ద్వారా మనిషికి, కంప్యూటర్ మధ్య ఒక వారధిగా పనిచేస్తుంది. ఇంగ్లీషు, గణితం కలయికవల్ల ఏర్పడిన ఫోర్ట్రాన్ భాష, అన్ని ఇంగ్లీషు అక్షరాలు (capitals), సాధారణ కూడిక +, తీసివేత – లను వాడుకొంటుంది. ఇంకా గుణకారం కొరకు * ను, భాగహారానికి / (slash) ను వాడుకొంటుంది. Fortran అనేది FORmula TRANslation నుండి వచ్చినది. ఈ భాషను IBM వారు అభివృద్ధిచేసారు. ఒక ఫోర్ట్రాన్ సమాసాన్ని వ్రాయడానికి, వాస్తవ, పూర్ణాంక చలరాసి, స్థిరరాసులను గురించి అవగాహన ఉండాలి. ఒకటి నుంచి అయిదు అక్షరాల లేక అంకముల కలయిక వలన ఏర్పడిన దానిని పూర్ణాంక చలరాసి అంటాము. ఈ పూర్ణాంక చలరాసి పేరులోని మొదటి అక్షరాలు I, J, K, L, M మరియు N లలో ఒకటి అయి ఉండాలి. పేరులో ప్రత్యేక అక్షరాలు ఉండకూడదు. I, J, K, L, M, N లు కాకుండా మిగిలిన ఇంగ్లీషు అక్షరాలలో ఏదో ఒకటి మొదటి అక్షరంగా కల ఒకటి నుంచి అయిదు అక్షరాల

లేక అంకముల కలయికవలన ఏర్పడిన దానిని వాస్తవ చలరాశి అంటాము. పేరులో ప్రత్యేక అక్షరాలుండరాదు. అంకగణిత పరిక్రియల చిహ్నంతో కలపబడిన చలరాసుల మరియు స్థిరరాసుల శ్రేణిని ఫోర్ట్రాన్ అంకగణిత సమాసము అంటాము. ఒక ఫోర్ట్రాన్ వాక్యపు సాధారణ రూపం variable = expression.

14.10 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. ఈ క్రింది వాటికి వివరముగా సమాధానములిమ్ము.

1. "యంత్ర భాషా ఉపదేశాలు" గురించి వివరించుము. ఉపదేశాలను యంత్రభాషలో వ్రాయుటలోగల కష్టములను తెల్పుము.

2. ఫోర్ట్రాన్ భాషలో ఉపయోగించే అక్షర సముదాయమును తెల్పుము.

3. a) ఈ క్రిందనీయబడినవి పూర్ణాంక స్థిరరాసులో, వాస్తవ స్థిరరాసులో చెప్పండి.

1. 560 2. –1690 3. 1680 4. 10 753

5. .008 6. –13.5 E – 15 7. 0.0 E – 10.

b) రకము తెలియజేయు వాక్యము తీసుకోకుండా, ఈ క్రిందివి, కారణములు వివరించుచు వాస్తవ చలరాసి పేరా లేక పూర్ణాంక చలరాసి పేరా తెల్పండి.

1. SUM 2. AT* B 3. 5.AB 4. INJ

5. X + Y 6. APOU 7. NGRI 8. BETA

4. ఫోర్ట్రాన్ అంకగణిత సమాసమును నిర్వచించి, దాని గణనలో గుర్తుంచుకోవలసిన ముఖ్యమైన విషయాలను వ్రాయండి.

5. ఈ క్రిందనీయబడిన గణిత సమాసములకు సమానములైన ఫోర్ట్రాన్ సమాసములను వ్రాయుము.

i) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$

ii) $ab + \frac{c}{d} + \frac{ef}{gh} + \frac{d^3}{x^2 + y^2}$

iii) $\sqrt{S\,(S-a)\,(S-b)\,(S-c)}$

iv) $\frac{(\alpha + \beta^2 + \alpha\beta)^2}{\sqrt{\alpha + \beta + 1}}$

II. క్లుప్తంగా సమాధానమివ్వండి.

1. (a) సంకలిని. (b) ఉన్నత భాషలు గురించి వివరింపుము.

2. ఫోర్ట్రాన్ భాషలో ఉపయోగించెడి అంకగణిత పరిక్రియలు మరియు వాటి గుర్తులు గురించి తెల్పుము.

3. ఫోర్ట్రాన్ వాస్తవ చలరాసి, పూర్ణాంక చలరాసిని నిర్వచించి ఒక్కొక్కదానికి రెండేసి ఉదాహరణలిమ్ము.

4. ఈ క్రింది ఫోర్ట్రాన్ అంకగణిత వాక్యములలోని తప్పులను గుర్తించుము.

i) Z = X * Y – 17,210.0

ii) X * 5 = 5. * Z – 12.74Y

iii) 15 = I + J/5 + 7 * J

iv) VEC = 5 (T3 – T2 + T1)/7

v) VEL = 12.74 E – (5 * I) – T

5. ఈ క్రింది ఫోర్ట్రాన్ సమాసములకు సమానమైన గణిత సమాసములను వ్రాయుము.

i) –B + SQRT (B * B – 4.0 * A * C)

ii) U + V/(R + S) * * 7

iii) A + B/(A – B)

iv) ALOG (COS (X) + 5. * SIN (X))

v) ATAN (X + Y) + ALOG (SQRT (X))

6. ఫోర్ట్రాన్ అంకగణిత వాక్యములను వ్రాయండి.

i) $\theta = \tan^{-1}\left(2xy/\left(x^2 + y^2\right)\right)$

ii) $r = \frac{16pr}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4r}\right)$

iii) $x = R \cos\theta \cos\phi$

iv) $\lambda = 9.118 \bigg/ \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{M^2}\right)$

v) $V = \tan x + \log_e (\cos x = \sin y)$

7. ఈ క్రింది వాటిలో P విలువ ఎంత?

i) P = 5/7 + 6 + 1.5

ii) P = 10/3 * (4/6) + 7 – 2 * 5

iii) P = (1.0/5.0) + 50 + 5.0

8. ఈ క్రింది వాక్యములలో I విలువ కనుగొనుము.

i) I = B/2. + B * 4./A – B + A * * 3; A = 1.5, B = 3

ii) I = (I + J)/K – L; I = J = 2, K = L= 4

iii) I = J * 2/3 + K/4 + 6 – J * * 3/8; J = 2, K = 5

సమాధానములు

I. 3. (a) 1, 2 – పూర్ణాంక స్థిరరాసులు, మిగిలావి వాస్తవ స్థిరరాసులు.

4. (b) 4, 7 – పూర్ణాంక చలరాసులు, మొదటి అక్షరము I మరియు N కాబట్టి.

1, 6, 8 – వాస్తవ చలరాసులు, మొదటి అక్షరము I, J, K, L, M, N లు కాదు కాబట్టి.

2, 3, 5 – చలరాసులు కాదు, ప్రత్యేక అక్షరములు ఉండబట్టి.

5. i) X/A + Y/B + Z/C

ii) A * B + C/D + E * F/(G * H) + D * * 3/ (X * X + Y * Y)

iii) SQRT (S * (S – A) * (S – B) * (S – C))

iv) (ALFA + BETA * BETA + ALFA * BETA) * * 5/SQRT (ALFTA + BETA + 1)

II. 4. i) కామా ఉండరాదు. (ii) ఎడమవైపు చలరాసి పేరు ఉండాలి, సమాసము కాదు మరియు –12.74*Y ఉండాలి. (iii) ఎడమవైపు 15 ఉండరాదు. (iv) 5* (T3 – 72 + T1)/7 అని ఉండాలి. (v) E తర్వాత చలరాసి కానీ, స్థిరరాసికానీ ఉండాలి. సమాసము ఉండరాదు.

5. i) $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$

ii) $U + \dfrac{V}{(R + S)^7}$

iii) $A + \dfrac{B}{A - B}$

iv) $\log (\cos x + 5 \sin x)$

v) $\tan^{-1} (x + y) + \log \left(\sqrt{x}\right)$

6. i) THETA = ATAN (2. * X * Y/(X * X + Y * Y))

ii) R = 16. * P * R /(PI * D * * 3) * (1 + D/4. * R)

iii) X = R * COS (THETA) * COS (PHI)

iv) LAMDA = 9.118/(1/N * * 2 – 1/M * * 2)

v) V = SIN (X)/COS (X) + ALOG (COS (X) + SIN (Y))

7. i) 7.5 ii) –3 iii) 55.2

8. i) 9 ii) –3 iii) 7

15.6 ప్రాతిపదిక 16 లేక హెక్సాడెసిమల్ సరణి

సంఖ్యలను ప్రాతిపదిక 10 కంటే ఎక్కువగా ఉన్న సరణిలోకూడా వ్రాయవచ్చును. ఈ సరణిలో 9కంటే పెద్ద అంకముల కొరకు చిహ్నములను తీసుకొనుట ఒక ప్రశ్న. దత్తాంశ విశ్లేషణలో ప్రాతిపదిక 16 లేక హెక్సాడెసిమల్ సరణి చాలా ఉపయోగపడుతుంది. ఇందులో 16 చిహ్నములు లేక అంకములు కావాలి. వాటిని 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E మరియు F గా తీసుకుంటాము. ఇచ్చట A, B, C, D, E, F లు వరుసగా 10, 11, 12, 13, 14 మరియు 15 లను సూచించును. కనుక హెక్సాడెసిమల్ లో సంఖ్యలు ABC_{16}, $95CD_{16}$, $E5D_{16}$ మొదలగు రూపాలలో ఉండును. ఒక సరణి నుంచి దశాంశ సరణిలోనికి, దశాంశ సరణి నుంచి వేరొక సరణిలోకి మార్చుటకు మనము ఇంత వరకు ఉపయోగించిన నియమములనే ఇచ్చట కూడా వాడుతాము. కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదా. *11* : $4B3F5.A9_{16}$ కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్య కనుగొనండి.

సాధన

ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రాతిపదిక 16 పటము మీద ఉంచగా

4	B	3	F	5	A	9
65536	4096	256	6	1	.0625	.00390625

పటం - 12

$$
\begin{aligned}
\therefore\ 4 \times 65536 &= 262144 \\
B \times 4026 &= 45056 \\
3 \times 256 &= 768 \\
F \times 16 &= 240 \\
5 \times 1 &= 5 \\
A \times .0625 &= .625 \\
9 \times .00390625 &= .03515625 \\
&\quad \overline{308213.66015625}
\end{aligned}
$$

$$4B3F5.A9_{16} = 308213.66015625$$

ఉదా. *12* : 2754.984 కు హెక్సాడెసిమల్ సరణిలో సమాన సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

పూర్ణాంకభాగము : 2754ను వరుసగా 16 చే భాగహరించగా

		శేషములు
	0	10 = A
16	10	12 = C
16	172	2
16	2754	

$\therefore 2754 = AC2_{16}$

ఉదా. *9* : 35044.34_6 కు సమానమైన దశాంశ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

సంఖ్యలోని అంకములను ప్రాతిపదిక 6 పటము మీద ఉంచగా

3	5	0	4	4 .	3	4
1296	216	36	6	1	.1667	.0278
6^4	6^3	6^2	6^1	6^0	6^{-1}	6^{-1}

పటం - 11 ప్రాతిపదిక 6 పటము

$$
\begin{array}{lrcr}
\therefore & 3 \times 1296 & = & 3888 \\
 & 5 \times 216 & = & 1080 \\
 & 0 \times 36 & = & 0 \\
 & 4 \times 6 & = & 24 \\
 & 4 \times 1 & = & 4 \\
 & 3 \times .1667 & = & 0.5001 \\
 & 4 \times .0278 & = & \underline{0.1112} \\
 & & & \underline{4996.6113}
\end{array}
$$

$$35044.34_6 = 4996.6113$$

ఉదా. *10:* 790.674 కు సమానమయిన ప్రాతిపదిక 6 సరణి సంఖ్య కనుక్కోండి.

సాధన

పూర్ణాంకభాగము : 790ను 6 చే వరుసగా భాగహరించగా

	0	3
6	3	3
6	21	5
6	131	4
6	790	

$\therefore 790 = 3354_6$

భిన్నాంకము : .74 ను 6 చే వరుసగా గుణించగా

.	674 × 6
4.	044 × 6
0.	264 × 6
1.	584 × 6
3.	504

$\therefore .674 = .4013_6$

$790.674 = 3354.4013_6$

భిన్నాంకము : .78ను 8 చే వరుసగా గుణించగా

.	78 × 8
6.	24 × 8
1.	92 × 8
7.	36 × 8
2.	88

$\therefore .78 = .6172_8$

$916.78 = 1624.6172_8.$

ఉదా. *8* : 634.64025 ను ఆక్టల్ శ్రేణి సమాన సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

పూర్ణాంకము

8	634	
8	79	2
8	9	7
8	1	1
	0	1

$\therefore 634 = 1172_8$

భిన్నాంకము

.	640625 × 8
5.	125000 × 8
1.	000000

$\therefore\ 0.640625 = 0.51_8$

i.e., $634.640625_{10} = 1172.51_8$.

15.5 ప్రాతిపదిక 6 సరణి

సంఖ్యలను ప్రాతిపదిక 6 సరణిలో కూడా వ్రాయవచ్చును. ఇందులో సంఖ్యలను వ్రాయుటకు 6 అంకములు 0, 1, 2, 3, 4, 5 లనుఉపయోగిస్తాము. ప్రాతిపదిక 8 సరణి సంఖ్యను దశాంశ సరణిలోకి, దశాంశ సరణి సంఖ్యను ప్రాతిపదిక 8 సరణిలోకి మార్చుటకు మనము ఉపయోగించిన పద్ధతినే ఇచట కూడా ఉపయోగిస్తాము.

శేషములు

	0	4
8	4	0
8	32	2
8	258	

$\therefore 258_{10} = 402_8$

ఉదా. *3* **:** 2000కు సమానమైన ప్రాతిపదిక 8 సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

2000ను 8చే వరుసగా భాగహరించగా

శేషములు

	0	3
8	3	7
8	31	2
8	250	0
8	2000	

$\therefore 2000 = 3720_8$

ఇంతవరకు మనము పూర్ణాంక సంఖ్యల గురించి మాత్రమే చర్చించినాము. పూర్ణాంక భాగము, భిన్నాంకము కల్గిన సంఖ్యల గురించి తెల్సుకుందాము. ఒక్క భిన్నాంకము మాత్రమే కల్గిన సంఖ్యల గురించి ముందుగా తెల్సుకుందాము. ఉదాహరణకి $.462_8$ యొక్క దశాంశ సరణి సమాన సంఖ్యను కనుగొనుట పరిశీలిద్దాము. దశాంశ నిరూపకము ప్రక్కన ఉన్న మొదటి అంకము స్థాన విలువ 8^{-1} లేదా .125 రెండవ అంకము యొక్క స్థానము విలువ 8^{-2}, మూడవ దానిది 8^{-3} అదే విధముగా మిగతా అంకముల విలువ. కనుక ప్రాతిపదికను కుడివైపుగా పొడిగించాలి. కనుక

			. 4	6	2
64	8	1	.125	.015625	.001953125
8^2	8^1	8^0	8^{-1}	8^{-2}	8^{-3}

పటం - 9

కనుక ఇచ్చిన సంఖ్యకు దశాంశ సరణి సమానము.

$4 \times .125 = .5$

$6 \times .015625 = .093750$

$2 \times .001953125 = .003906250$

$\overline{.597656250}$

$\therefore .462_8 = 0.597656250$

ఉదా. 1 : 1046_8 ను దశాంశ సరణిలోకి మార్చండి.

సాధన

ఇచ్చిన సంఖ్య 1046_8 ను ప్రాతిపదిక 8 పటము మీద ఉంచగా

1	0	4	6
512	64	8	1

పటం – 7

$$1 \times 512 = 512$$
$$0 \times 64 = 0$$
$$4 \times 8 = 32$$
$$6 \times 1 = 6$$
$$\overline{550}$$

$$\therefore 1046_8 = 550$$

ఉదా. 2 : 456_8 కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

456 ను ప్రాతిపదిక పటము మీద ఉంచగా

4	5	6
64	8	1

పటం – 8

$$\therefore 4 \times 64 = 256$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$6 \times 1 = 6$$
$$\overline{302}$$

$$\therefore 456_8 = 302$$

ఇప్పుడు దశాంశ సరణి సంఖ్యను ప్రాతిపదిక 8 సరణిలోకి మార్చుట గురించి తెల్సుకుందాము. ఇచ్చిన సంఖ్యను వరుసగా 8చే భాగహారించుకుపోగా వచ్చు శేషములను పై నుంచి క్రింది వరుసగా తీసుకొనిన, ప్రాతిపదిక 8 సంఖ్య వచ్చును. ఉదాహరణకు 258 యొక్క ప్రాతిపదిక 8 సంఖ్య కావాల్సి వచ్చినప్పుడు, 258 ను 8చే వరుసగా భాగహరించుము.

కనుక ప్రాతిపదిక b అయినా, పటము ఈ క్రింది విధముగా ఉండును.

b^4	b^3	b^2	b^1	b^0

పటం - 4

15.4 అక్టల్ సరణి లేదా ప్రాతిపదిక 8 సరణి

ఒకచోట మనుష్యులందరికి ప్రతి చేతికి 4 వేళ్ళు మాత్రమే ఉన్నాయి అనుకుందాము. అప్పుడు వాళ్ళు దశాంశ సరణి కంటే, 8 అంకములు అంటే 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 మరియు 7 కల ప్రాతిపదిక 8 సరణినే ఎక్కువగా వాడుతారు. ప్రాతిపదిక 8 సరణి స్థానవిలువలను తెలియజేయు పటము.

4096	512	64	8	1

పటం - 5

కుడిచివరగా ఉన్నది తప్ప, పటములోని ప్రతిస్థానము దానికి కుడివైపు ఉన్న స్థాన విలువ కంటే 8 రెట్లు అధికము.

ప్రాతిపదిక 8 సరణిలో 564 సంఖ్యను చూడండి. ఈ సంఖ్య యొక్క అంకములను ప్రాతిపదిక 8 పటము యొక్క కుడి చివరి స్థానముల మీద ఉంచగా

5	6	4
64	8	1

పటం - 6

ప్రాతిపదిక 8లో 564 అనగా $5 \times 64 = 320$

$6 \times 8 = 48$

$4 \times 1 = 61$

$\overline{372}$

వివిధ ప్రాతిపదిక సరణులలోసంఖ్యలను గురించి మాట్లాడుతున్నప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్య ఏ ప్రాతిపదిక సరణిలోనో స్పష్టముగా తెలియపర్చాలి. దీని కొరకు మనము ప్రాతిపదికను సంఖ్యకు కుడి చివరగా పాదికగా వ్రాస్తాము. కనుక 564_8 అంటే ఈ సంఖ్య 564, ప్రాతిపదిక 8 సరణిలో ఇవ్వబడినది అని అర్థము. కనుక $564_8 = 372_{10}$. సాధారణంగా మనము దశాంశ సరణిలో సంఖ్యలను గురించి మాట్లాడేటప్పుడు, పాదిక వ్రాయము. ఇక్కడి నుంచి, సంఖ్యకు పాదికలేని ఎడల అది దశాంశ సరణిలో సంఖ్యగా తీసుకుంటాము. (ఉదా: 512, 956 మొదలగునవి).

$\therefore 564_8 = 372.$

పటాన్ని పరిశీలించిన ప్రతిస్థానపు విలువదానికి కుడివైపు ఉన్న స్థానపు విలువ కంటే10 రెట్లు ఎక్కువ. 1561ను తీసుకొనుము. ఈ సంఖ్యను పటము మీద ఉంచగా

1	5	6	1
10^3	10^2	10^1	10^0

పటం - 2

$\therefore$ 1561 అనగా $1 \times 1000 = 1000$

$5 \times 100 = 500$

$6 \times 10 = 60$

$1 \times 1 = 1$

మొత్తము $\overline{1561}$

సాధారణంగా మనము సంఖ్యలను దశాంశ సరణిలో (ప్రాతిపదిక 10 సరణి) తీసుకుంటు ఉంటాము. దశాంశ సరణిలో సంఖ్యలను వ్రాయుటకు 10 అంకములను వాడుతాము. అవి 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 మరియు 9. ఎంత పెద్ద విలువలైనా, ఎంత చిన్న విలువలైనా దశాంశ సరణిలో వ్రాయవచ్చును. మనకు చేతులకు 10 వేళ్ళు ఉండటమువలన కావచ్చు, మనము దశాంశ సరణిని ఉపయోగిస్తున్నాము.

ఫలానా వస్తువులు ఇన్ని ఉన్నవి అని చెప్పుటకు దశాంశ సరణి ఒకటే కాదు. అనేక సరణులలో చెప్పవచ్చును. రెండు అంకములుగల బైనరీ సరణిలో చెప్పవచ్చును, 3 అంకములుగల ప్రాతిపదిక 3 సరణిలో చెప్పవచ్చును లేదా ఇతరములైన అనేక సరణులలో చెప్పవచ్చును. ఈ ఖండికలో కొన్ని ముఖ్యమైన ప్రాతిపదిక సరణులను గురించి ఇచ్చిన సంఖ్యకు సమానమైన సంఖ్యను ఇతర ప్రాతిపదిక సరణులలో కనుగొనుట గురించి తెల్సుకుందాము.

15.3 ప్రాతిపదిక పటాలు

ఒక సంఖ్యను ఏదేని ప్రాతిపదిక సరణి నుంచి దశాంశ సరణిలోకి మార్చవలెనన్నా, దశాంశ విలువలను సూచించు ఆ ప్రాతిపదిక పటమును నిర్మించవలెను. కుడి చివరగా ఉన్నభాగము 1 ని సూచించును. తర్వాత కుడి నుండి రెండ భాగము ఏ ప్రాతిపదిక నుంచి సంఖ్యను మారుస్తున్నామో ఆ ప్రాతిపదికను తెలియ జేయును. ఉదాహరణకు ప్రాతిపదిక 3 తీసుకుంటే ఈ భాగములలో 3 ఉండును. మిగతా భాగములలో ఉన్నవి క్రిందటి భాగములో ఉన్నదానికంటే 3 రెట్లు ఉండును.

81	27	9	3	1

పటం - 3

ఖండిక – 15 : సంఖ్యల మార్పిడి

విషయ సూచిక

15.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరవాత మీరు ఒక బేస్ సరణిలో ఇచ్చిన సంఖ్యను ఇంకొక బేస్ సరణి సంఖ్యలోకి మార్చగలగాలి.

15.2 ఉపోద్ఘాతం

ప్రతిరోజు మనము సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాము. సంఖ్య 395ను పరిశీలిద్దాము. దీని అర్థమేమిటి? ఈ సంఖ్య ఫలానావస్తువులు ఇన్ని ఉన్నవి అని చెప్పును. ఆ వస్తువులు పుస్తకాలు కావచ్చు, కార్లు కావచ్చు, రూపాయలు కావచ్చు మరేదైనా కావచ్చు. ఈ సంఖ్య మూడు వందల తొంబది ఐదు వస్తువులు ఉన్నవి అని చెప్పును. (మూడు వందలు + తొమ్మిది పదులు + ఐదు ఒకట్లు). అంటే $3 \times 100 + 9 \times 10 + 5 = 395$ or $3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 395$. కనుక ఏదైనా సంఖ్య, స్థానము ననుసరించి విలువలు గల అంకముల కలయిక.

అంకముల స్థాన విలువలను తెలుపు పటము పరిశీలిద్దాము.

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

పటం – 1. ప్రాతిపదిక 10 పటము

భిన్నాంక భాగము : .984 ను వరుసగా 16 చే గుణకారము చేయగా

.	984 × 16
15. (F)	744 × 16
11. (B)	904 × 16
14. (E)	464

$\therefore .984 = FBE_{16}$

$\therefore 2754.984 = AC2.FBE_{16}$

15.7 ఒక ప్రాతిపదిక నుంచి వేరొక ప్రాతిపదిలోకి ఇచ్చిన సంఖ్యను మార్చుట

ఇంతవరకు మనము ఒక ప్రాతిపదిక నుంచి దశాంశ సరణిలోకి, దశాంశ సరణి నుంచి వేరొక ప్రాతిపదిక సరణిలోకి మార్చుట మాత్రము నేర్చుకున్నాము. ఇప్పుడు ఒక ప్రాతిపదికలోఇచ్చిన ఒక సంఖ్యకు సమానమైన వేరొక ప్రాతిపదిక సంఖ్యను కనుగొనుట తెల్సుకుందాము. మొదట ఇచ్చిన సంఖ్యను దశాంశ సరణిలోకి మార్చి, అప్పుడు దశాంశ సరణిలోని ఆ సంఖ్యనుమనకు కావలసిన ప్రాతిపదిక సరణిలోకి మారుస్తాము. ఈ క్రింది పటము పరిశీలింపుము.

ఒక ప్రాతిపదికలో ఇచ్చిన సంఖ్య → దశాంశ సరణి సంఖ్య → వేరొక ప్రాతిపదికలో సమాన సంఖ్య

పటం – 13

కొన్ని ఉదాహరణకు పరిశీలిద్దాము.

ఉదా. 13 : 546_7 కు సమానమైన ప్రాతిపదిక 5 సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

మొదట 546_7 కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుక్కుందాము. ప్రాతిపదిక 7 పటము నుపయోగించగా

5	4	6
49	7	1

పటం – 14

$$\begin{aligned} \therefore\ 5 \times 49 &= 245 \\ 4 \times 7 &= 28 \\ 6 \times 1 &= 6 \\ &\overline{279} \end{aligned}$$

$\therefore 546_7 = 279$

ఇప్పుడు 279 ను వరుసగా 5చే భాగించగా

		శేషములు
	0	2
5	2	1
5	11	0
5	55	4
5	279	

$\therefore 279 = 2104_5$

$\therefore 546_7 = 2104_5$

ఉదా. *14 :* AB6.C5$_{16}$ కు సమానమైన ప్రాతిపదిక 8 సరణి సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

మొదట దశాంశ సరణి సమాన సంఖ్యను ప్రాతిపదిక 16 పటము ఉపయోగించి కనుక్కుందాము.

A	B	6	.	C	5
256	16	1		.0625	.00390625

పటం - 15

$$
\begin{aligned}
A \times 256 &= 2560 \\
B \times 16 &= 176 \\
6 \times 1 &= 6 \\
C \times .0625 &= .7500 \\
5 \times .00390625 &= .01953125 \\
\hline
&\ \ 2742.76953125
\end{aligned}
$$

$\therefore AB6.C5_{16} = 2742.76953125$

ఇప్పుడు 2742.7695 (సవరించగా) కు ప్రాతిపదిక 8 సరణిలో సమాన సంఖ్యను కనుక్కొందాము.

పూర్ణాంక భాగము

		శేషములు
	0	5
8	5	2
8	42	6
8	342	6
8	2742	

$\therefore 2742 = 5266_8$

భిన్నాంక భాగము

.	7695 × 8
6.	1560 × 8
1.	2480 × 8
1.	9840

$\therefore .7695 = .611_8$

కనుక $AB6.C5_{16} = 5266.611_8$

15.8 బైనరీ సరణి (ప్రాతిపదిక 2 సరణి)

ఇంతవరకు మనము ఆక్టల్, హెక్సాడెసిమల్ సరణుల గురించి తెల్సుకున్నాము. దత్తాంశ విశ్లేషణకు బైనరీ సరణి ఉపయోగపడును. అంతర్గతంగా గణన యంత్రములు సంఖ్యలను బైనరీ సరణిలో ఉంచును. బైనరీ సరణిలో 0 మరియు 1 అంకములు ఉండును. ఇంతవరకు మనకు తెల్సిన నియమములనే ఉపయోగించి బైనరీ సరణి నుంచి దశాంశ సరణికి, దశాంశ సరణి నుంచి బైనరీ సరణికి మార్చవచ్చును. కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

ఉదా. 15 : 483కు సమానమైన బైనరీ సరణి సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

483 ను 2 చే వరుసగా భాగహరింపగా

	0	1
2	1	1
2	3	1
2	7	1
2	15	0
2	30	0
2	60	0
2	120	1
2	241	1
2	483	

$\therefore 483 = 111100011_2$

ఉదా. *16* : 101.1011_2 కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

ప్రాతిపదిక 2 పటమును ఉపయోగించగా

1	0	1 .	1	0	1	1
4	2	1	5	.25	.125	.00625

పటం - 16

పూర్ణాంక భాగము

$1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 5$

భిన్నాంక భాగము

$1 \times 5 + 0 \times .25 + 1 \times .125 + 1 \times .0625 = 5.6875$

$101.1011_2 = 5.6875.$

ఉదా. *17* : .83 కు సమానమైన బైనరీ సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

.83 ను 2 చే వరుసగా గుణించగా

.	83 × 2
1.	66 × 2
1.	32 × 2
0.	64 × 2
1.	28 × 2
0.	56

$\therefore .83 = .11010_2$

.83, .11010 కు కరక్టుగా సమానము కాదు. దాదాపు సమానము. ఇంకా మంచి ఫలితము కావాలంటే, ఇంకా కొన్ని గుణకారణము చేయాలి. ఎక్కువ1లు, 0లో ఉన్న సంఖ్యను ప్రాతిపదిక 2 పటము నుపయోగించి దశాంశ సరణి సమానసంఖ్యనుసరాసరి కనుగొనుట కొంత కష్టము. అందువలన ప్రాతిపదిక 8ను గానీ, ప్రాతిపదిక 16ను గానీ ఉపయోగించి దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుక్కుంటాము.

ఉదాహరణకు 1010100101.1110101_2 ను దశాంశ సరణిలోకి మార్చాలి అనుకుందాము. అప్పుడు సంఖ్యలు ఎక్కువ 1లు, 0లు ఉన్నవి కాబట్టి ప్రాతిపదిక 8ను ఉపయోగిద్దాము. దశాంశ బిందువునుంచి

కుడివైపు, ఎడమవైపుగల అంకములను మూడు, మూడు అంకముల సమూహాలుగా విడగొట్టుము. అప్పుడు ప్రాతిపదిక 2 నుంచి ప్రాతిపదిక 8 మార్పిడి పటమునుపయోగించి, ప్రాతిపదిక 8 సంఖ్యను కనుగొని, అప్పుడు ప్రాతిపదిక 8 పటము నుపయోగించి దశాంశ సరణి సమాన సంఖ్యను కనుగొనుము.

ప్రాతిపదిక 8 అంకములు	బైనరీ సమానము
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

పటం – 17 : ప్రాతిపదిక 2 నుంచి ప్రాతిపదిక 8 మార్పిడి పటము

$$\underset{1}{\underline{001}}\ \underset{2}{\underline{010}}\ \underset{4}{\underline{100}}\ \underset{5}{\underline{101}}\ .\ \underset{7}{\underline{111}}\ \underset{2}{\underline{010}}\ \underset{4}{\underline{100}}$$

$\therefore 1010100101.1110101_2 = 1245.724_8$

ఇప్పుడు ప్రాతిపదిక 8 పటము నుపయోగించి దశాంశ సరణి సమానసంఖ్యను కనుగొందాము.

1	2	4	5 .	7	2	4
512	64	8	1	.125	.015625	.001953125

పటం – 18

పూర్ణాంకభాగము

$1 \times 512 + 2 \times 64 + 4 \times 8 + 5 \times 1 = 677$

భిన్నాంక భాగము

$7 \times .125 + 2 \times .015625 + 4 \times .001953125 = .9140625$

$\therefore 11100100101.1110101_2 = 677.9140625$

ఉదా. 18 : 11100100101.0011011_2 కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

ప్రాతిపదిక 16 ద్వారా దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుగొందాము. ప్రాతిపదిక 2 నుంచి ప్రాతిపదిక 16కు మార్పిడి పటము.

ప్రాతిపదిక 2	ప్రాతిపదిక 16
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

పటం – 19

ప్రాతిపదిక 2 నుంచి ప్రాతిపదిక 16 మార్చెడి పటము ఇచ్చిన సంఖ్యను దశాంశ బిందువు నుంచి కుడివైపు, ఎడమవైపు నాల్గు నాలుగు, అంకముల సమూహాలుగా విడగొట్టుము. తర్వాత పటం – 19, ద్వారా ప్రాతిపదిక 16 సమాన సంఖ్యను కనుగొనుము.

$$\therefore \underset{7}{\underline{0111}}\ \underset{2}{\underline{0010}}\ \underset{5}{\underline{0101}}\ .\ \underset{3}{\underline{0011}}\ \underset{6}{\underline{0110}}$$

హెక్సాడెసిమల్ సమాన సంఖ్య $= 725.36_{16}$

ఇప్పుడు ప్రాతిపదిక 16 పటము నుపయోగించి దశాంశ సరణి సమాన సంఖ్యను కనుక్కుందాము.

7	2	5 .	3	6
256	16	1	.0.0625	.00390625

పటం – 20

పూర్ణాంక భాగము

$$7 \times 256 + 2 \times 16 + 5 + 1 = 1829$$

భిన్నాంక భాగము

$$3 \times .0625 + 6 \times .0039625 = .21093750$$

$$\therefore 11100100101.0011011_2 = 1829.21093750$$

ఉదా. *19* : 0.064 కు సమానమైన బైనరీ సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

ఇచట కూడా మనము ప్రాతిపదిక 8 ద్వారానో లేక ప్రాతిపదిక 16 ద్వారాగానీ ఇచ్చిన సంఖ్యకు సమానమైన సంఖ్యను బైనరీ సరణిలో కనుగొనవచ్చును. ప్రాతిపదిక 16 ద్వారా కనుగొందాము.

	064 × 16
1.	024 × 16
0.	384 × 16
6.	144 × 16
2.	304

$\therefore .064 = .1062_{16}$

ఇప్పుడు ప్రాతిపదిక 2 నుంచి ప్రాతిపదిక 16 కు మార్పిడి పటము (పటము 19)నుపయోగించగా

$.064 = .1062_{16} = .0001000001100010_2$

ఉదా. *20* : 474.326 కు సమానమైన బైనరీ సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సాధన

ప్రాతిపదిక 8 ద్వారా కనుక్కొందాము.

పూర్ణాంక భాగము

		శేషములు
	0	7
8	7	3
8	59	2
8	474	

$\therefore 474 = 732_8$

$= 111011010_2$

భిన్నాంక భాగము

	326 × 8
2.	608 × 8
4.	864 × 8
6.	912 × 8
7.	296

$\therefore .326 = .2467_8$

$= .010100110111_2$

$\therefore 474.326 = 732.2467_8 = 111011010.010100110111_2$

15.9 సారాంశము

బేస్ 10గా గల సంఖ్యలు మనకు సుపరిచితం. అయితే ఏ బేస్ సంఖ్య అయిన ఆ సంఖ్యలో ఉండే అంకెల యొక్క స్థానాన్ని బట్టి సంఖ్య విలువ ఉంటుంది. ఈ సంఖ్యల బేస్‌లను గురించి చర్చించేటప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్య ఏ బేస్‌కు చెందినదనేది వివరంగా తెలియాలి. దాని కొరకు ప్రతీ సంఖ్యకు దాని బేస్‌ను సబ్ స్క్రిప్ట్‌గా వ్రాస్తాము. ఈ ఖండికలో ఇచ్చిన ఒక బేస్ సంఖ్యను ఇంకొక బేస్ సంఖ్యగా మార్పు చేయడానికి గల పద్ధతి నేర్చుకున్నాము.

15.10 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. *ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు విపులంగా వ్రాయండి.*

1) a) ఈ క్రింది ప్రాతిపదిక సరణులలో ఏఏ అంకములను ఉపయోగిస్తామో తెల్పండి.

(i) బైనరీ సరణి (ii) ఆక్టల్ సరణి (iii) హెక్సాడెసిమల్ సరణి.

b) .833 కు సమానమైన ఆక్టల్ మరియు హెక్సాడెసిమల్ సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

2. దశాంశ సరణి సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

(i) 256_6 (ii) 742_8 (iii) 120_3 (iv) 444_5

3. ఈ క్రింది వానికి సమాన దశాంశ సరణి సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

(i) $C4D_{16}$ (ii) ABC_{16} (iii) $7AE_{16}$

II. క్లుప్తంగా సమాధానాలివ్వండి

1. (a) 3074 ను ప్రాతిక 8 సరణిలోకి మార్చండి.

(b) 960 ను ప్రాతిపదిక 16 సరణిలోకి మార్చండి.

2. ఈ క్రింది దశాంశ సరణి సంఖ్యలను బైనరీ సరణిలోకి మార్చండి.

(i) 15.8 (ii) 6.02 (iii) .833

3. ఈ క్రింది వానికి దశాంశ సరణి సమాన సంఖ్యలను కనుక్కోండి.

(i) 0.1001 (ii) 10101.001 (iii) 01001.00101

4. $3B.A6_{16}$ కు సమానమైన బైనరీ సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

సమాధానాలు

I 1. (a) (i) 0,1 (ii) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (iii) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

(b) $.652_8$ మరియు $D53_{16}$

2. (i) 106 (ii) 482 (iii) 15 (iv) 124

3. (i) 3149 (ii) 2748 (iii) 1966

II. 1. (a) 6002_8 (b) $3C0_{16}$

2. (i) 1111.110011_2 (ii) 110.000001 (ii) .1101

3. (i) .2812 (ii) 21.1250 (iii) 9.152

4. 0011101110100110

ఖండిక – 16 : ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యాలు

విషయసూచిక

16.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు పూర్తి ఫార్మాట్ నిర్దేశకాలతో ప్రణాళిని వ్రాయగలగాలి.

16.2 ఉపోద్ఘాతం

ప్రణాళి రచయిత యొక్క ముఖ్యోద్దేశ్యము తను వ్రాసే ప్రణాళి ఒక్క సమస్యను మాత్రమే పరిష్కరించేదిగా కాక, దత్తాంశమును మార్చిన అటువంటి సారూప్య సమస్యలను కూడా సాధించేదిలాగా ఉండాలి. అందువల్ల సమస్యకు సంబంధించిన దత్తాంశము, విధానము విడివిడిగా ఉండవలెను. కంప్యూటర్‌కు దత్తాంశకమును ఉత్పాదక వాక్యము ద్వారా అందించవచ్చును. ఉత్పాదక వాక్యము ద్వారా దత్తాంశమును ఉత్పాదక పరికరము ద్వారా జ్ఞప్తి యూనిట్‌లోకి పంపబడును. ఈ వాక్యము ఏ ఉత్పాదక పరికరము వాడుతున్నదీ, చలరాసుల సంఖ్య మరియు వాటి వరుస క్రమమును కూడా తెలియచేయును. ప్రతి ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యము వెంబడి FORMAT వాక్యము వచ్చును. ఇది రూపమును అనగా చలరాసుల రూపమును అనగా చలరాసుల రూపము, కొలతలు మరియు వాటి నిర్దిష్ట ప్రదేశాల గురించి తెల్పును.

ప్రణాళిలో మరొక ముఖ్యమైన భాగము జ్ఞప్తి యూనిట్ నుంచి ఫలితాలను పొందుట. దీనికొరకు మనము ఉత్పాదిత వాక్యమును ఉపయోగిస్తాము. దీనితోపాటు FORMAT వాక్యమును కూడా ఉపయోగిస్తాము.

ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యములను రెండు భాగాలుగా విభజించవచ్చును. అవి (1) ఎక్సిక్యూటబుల్ భాగము (2) డిక్లరేటివ్ భాగము. ఎక్సిక్యూటబుల్ భాగము కొన్ని చలరాసుల విలువలను జ్ఞప్తి యూనిట్‌లోనికి పంపుటకు లేదా జ్ఞప్తి యూనిట్ నుంచి కొన్ని చలరాసుల విలువలను పొందటానికి కంప్యూటర్‌కు

ఆదేశాలనిచ్చును. డిక్లరేటివ్ భాగము దత్తాంశము యొక్క రూపురేఖలు లేదా ఫలితాలను ఏ రూపములో అందించాలో మొదలగువాటికి సంబంధించిన సమాచారమును కంప్యూటర్‌కు అందజేస్తుంది. ఈ డిక్లరేటివ్ భాగాన్ని FORMAT వాక్యము అంటాం. కొన్ని సంకలనులు FORMAT రహిత ఉత్పాదక - ఉత్పాదిత వాక్యములను అనుమతిస్తాయి. వీటిని FORMAT రహిత ఉత్పాదక - ఉత్పాదిత వాక్యములు అంటాం. FORMAT నిర్దేశకము లేనపుడు ఉత్పాదక దత్తాంశమును నిర్ణీత రూపములోనే అందజేయగలము. అట్లాగే నిర్ణీత రూపములోనే ఫలితములను పొందగలము.

మనము ప్రస్తుతము ఒకరకము ఉత్పాదక మీడియా 'పంచ్‌డ్ కార్డు' ద్వారా సమాచారమును అందజేయుటకు సంబంధించిన వివరాలను తెల్సుకుందాం. ఈ పరిక్రియను చేయుటకు READ వాక్యము ఉపయోగిస్తాం. అదే విధముగా ఫలితములను ముద్రించుటకు WRITE వాక్యమును వాడుతాము.

ప్రతి READ మరియు WRITE వాక్యములు ఈ క్రింది వాటిని నిర్దేశించును. 1) ఉపయోగించెడి ఉత్పాదక/ఉత్పాదిత పరికరము యొక్క యూనిట్ సంఖ్య 2) దీని వెంబడి వచ్చె FORMAT వాక్యము యొక్క వాక్యపు సంఖ్య 3) చలరాసుల జాబితా (వేటికైతే విలువలను మనము అందిస్తామో లేక వేటి విలువలు మనము రాబట్టాలో వాటి జాబితా).

మనము ఏదైనా ఒక ఉత్పాదక/ఉత్పాదిత పరికరమును వాడవచ్చును. మనము ఉపయోగించెడి గణన యంత్రమునకు సంబంధించిన సమాచారమును అందించే పుస్తకము నుండి ఉత్పాదక/ఉత్పాదిత పరికముల కోడ్ సంఖ్యను తెల్సుకోవచ్చు. ఈ కోడ్ సంఖ్యలు ఒక గణనయంత్రమునకు ఇంకొక గణనయంత్రమునకు తేడా ఉండును. ఇకముందు నుంచి మనము అన్ని ఉదాహరణలలోనూ, కార్డు రీడర్ పరికరము సంఖ్య 5 లైను ప్రింటర్ పరికరము యూనిట్ సంఖ్య 9 (ఒక గణనయంత్రంలో) అనుకొనుము. మొదట FORMAT రహిత ఉత్పాదక-ఉత్పాదిత వాక్యముల గురించి తెల్సుకుందాం.

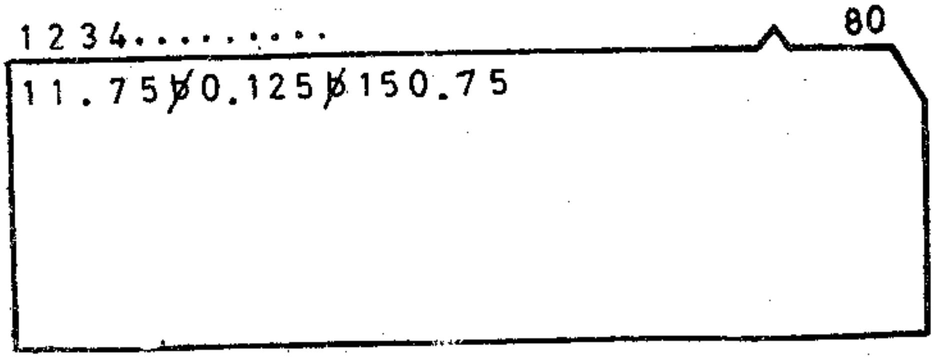
16.3 FORMAT రహిత ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యాలు

ఇందులో ఉత్పాదక వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము *READ* జాబితా. జాబితాలో చలరాసుల పేర్లు కామాతో వేరుచేయబడి యుండును. దీని అర్థము, ఇది గణన యంత్రమును జాబితాలో పేర్లు ఉన్న చలరాసుల విలువలను ఉత్పాదక పరికరముద్వారా గ్రహించమని ఆదేశించును. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది వాక్యమును చూడండి.

READ, X, Y, Z

పై వాక్యము వలన గణనయంత్రము X, Y మరియు Z యొక్క విలువలను దత్తాంశ కార్డు (Data Card) నుంచి చదివి జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో X, Y మరియు Z అడ్రస్‌గల జ్ఞప్తి ప్రదేశాలలో భద్రపరచును. దత్తాంశ కార్డు అనగా దత్తాంశము పంచ్ చేయబడిన కార్డు చలరాసుల విలువలు చలరాసులు జాబితాలో ఉన్న వరుసక్రమములోనే దత్తాంశ కార్డు మీద మొదటి నిలువు వరుస నుంచి 80 వ నిలువు వరుస వరకు పంచ్ చేయబడుతాయి. ఫోర్ట్రాన్ వాక్యములు 7 వ నిలువు వరుసనుంచి పంచ్ చేయబడును. ఫోర్ట్రాన్ వాక్యముల వాక్యపు సంఖ్యను 1 నుంచి 5 నిలువు వరుసల మధ్యన పంచ్ చేస్తాం. ఒక కార్డుమీద రాకపోతే, రెండవ కార్డుమీద పంచ్ చేయవచ్చును. కానీ ఒక సంఖ్యను రెండు కార్డులలో విడదీయరాదు. ఒక సంఖ్య పూర్తిగా ఒక కార్డుమీదే ఉండాలి.

ఉదాహరణకి, READ, A, B, C అను వాక్యములో A, B, C ల విలువలు 11.75, 0.125, 150.75 అనుకుందాము. అప్పుడు వాటిని దత్తాంశ కార్డుమీద ఈ క్రింది విధంగా పంచ్ చేస్తాము. b ఖాళీ నిలువు వరుసని సూచించును.



పటం – 1 : *A*, *B*, *C* విలువలుగల దత్తాంశ కార్డు

ఒక READ వాక్యము ఉన్నదంటే, దానికి అనుబంధంగా ఒక దత్తాంశ కార్డు ఉండాలి. కనుక రెండు వేర్వేరు READ వాక్యముల జాబితాలోని చలరాసుల విలువలు రెండు వేర్వేరు దత్తాంశ కార్డుల మీద పంచ్ చేయాలి. ఒకే దత్తాంశ కార్డుమీద రెండు జాబితాలలో చలరాసులు విలువలను పంచ్ చేయరాదు.

ఉత్పాదిత వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము WRITE, జాబితా.

జాబితాలో చలరాసుల పేర్లు కామాలతో ఉండును. ఈ వాక్యము గణనయంత్రమును జాబితాలో ఉన్న చలరాసుల విలువలను ముద్రించమని అడుగును.

ఉదాహరణకు జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో దాచివుంచబడిన I, J మరియు K ల విలువలు 150, 2700 మరియు 192 అనుకోండి. గణనయంత్రాన్ని I, J, K విలువలను ముద్రించమని అడగాలంటే మనము వ్రాయవలసిన వాక్యము WRITE, I, J, K.

సరియైన FORMAT రహిత ఉత్పాదక/ఉత్పాదిత వాక్యముల ఉదాహరణలు

1. READ, L, M, N, A, B
2. READ, ALP, KOU, BETA
3. WRITE, PHI, GAMA, X, Y
4. WRITE, P, Q, R

FORMAT సహిత ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యముల గురించి తెలుకునే ముందు వాక్యపు సంఖ్య (Statement Number) మరియు FORMAT నిర్దేశకాల గురించి తెల్సుకుందాము.

16.4 వాక్యపు సంఖ్య

READ మరియు WRITE వాక్యములు వాటికి సంబంధించిన FORMAT వాక్యముల యొక్క వాక్యపు సంఖ్యను కూడా తెలియపరుస్తుంది అని మనకు తెలుసు. ప్రణాళిలో ఒక వాక్యము రిఫర్ (Refer) చేయాలి అంటే ఆ వాక్యమునకు వాక్యపు సంఖ్యను ఇస్తాము. ఈ సంఖ్య పొడవు 5 అంకముల వరకు ఉండవచ్చును. కార్డుమీద ఈ సంఖ్యను 1 నుంచి 5 నిలువు వరుసల వరకు పంచ్ చేయవచ్చును. ఈ వాక్యపు సంఖ్య సున్న కాకుండా, ఏ అంకగణిత చిహ్నముగానీ ముందులేని (+' లేక '—') పూర్ణాంక సంఖ్యలు ఉండవలెను.

కొన్ని సరియైన వాక్యపు సంఖ్యలు.

1) 50 2) 250 3) 95 4) 1540 5) 2345

కొన్ని సరికాని వాక్యపు సంఖ్యలు.

1. –75 — '—' గుర్తు ఉండుటవలన సరివాక్యపు సంఖ్య కాదు.

2. .9KI — పూర్ణాంకము కాదు కాబట్టి

3. 15, 35 — ',' ఉండుట వలన

4. 2532167 — 5 అంకములకంటే ఎక్కువ ఉండుటవలన

5. 0 — సున్న వాక్యపు సంఖ్య కాదు.

ఈ క్రింది ముఖ్యమైన విషయాలు గుర్తుంచుకోవాలి

1. వాక్యపు సంఖ్యలు ఏదేని వరుసక్రమములో ఉండాలి అని లేదు.
2. ఒక వాక్యము ఒక కార్డు మీద సరిపోకపోతే వేరే కార్డులమీద పంచ్ చేయవచ్చును. ఆ వాక్యానికి వాక్యపు సంఖ్య ఉంటే, దానిని మొదటి కార్డులోనే పంచ్ చేయాలి. మిగతా కార్డులలో పంచ్ చేయనవసరము లేదు.
3. రెండు వేర్వేరు వాక్యాలకు ఒకే వాక్యపు సంఖ్యను ఇవ్వరాదు.

16.5 సంఖ్యలకు FORMAT నిర్దేశకాలు

FORMAT వాక్యము ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము కాదు. FORMAT సహిత ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యము వెంబడి FORMAT వాక్యము ఉండవలెను. ఈ వాక్యము ఈ క్రింది సమాచారమును సంకలినికి అందించును.

1) దత్తాంశము ఏ రూపములో పంచ్ చేయబడినది లేక ఏ రూపములో ముద్రించవలసినది,

2) ఒక్కొక్క చలరాసికి ఎన్ని నిలువు వరుసలు నిర్ణయించినది,

3) ఎన్ని నిలువు వరుసలు ముద్రణ కోసము ఒక్కొక్కదానికి కేటాయించినది,

4) చలరాసి పూర్ణాంక చలరాశా లేక వాస్తవ చలరాశా అనే విషయాలు తెలియపర్చును.

80 నిలువు వరుసలు కల ఒక కార్డులో పొందుపరచిన సమాచారమును ఉత్పాదకము యొక్క ఒక రికార్డ్ (Record) అంటాము. పేపరు టేప్‌లలో 1 నుంచి 72 నిలువు వరుసలు ఒక రికార్డు. ముద్రణకు, 132 నిలువు వరుసలుగల ఒక వరుసను రికార్డు అంటాం. ఒక రికార్డులో అనేక క్షేత్రములుండవచ్చును. ఒక చలరాసికి కార్డులో నిర్ణయింపబడిన నిలువువరుసల శ్రేణిని క్షేత్రము అంటాం. ఆ నిలువు వరుసల సంఖ్యను క్షేత్ర నిడివి అంటాం. ఉదాహరణకి 1.724 యొక్క క్షేత్ర నిడివి 5, –15.25 యొక్క క్షేత్ర నిడివి 6. దత్తాంశ బిందువును '—' గుర్తునుకూడా క్యారక్టర్‌గా లెక్కించవలెను.

READ లేక WRITE వాక్యములోని జాబితాలో ఉన్న చలరాసుల యొక్క క్షేత్ర నిర్దేశకాలు లేక FORMAT నిర్దేశకాలు FORMAT వాక్యములో ఉండును. అన్ని క్షేత్ర నిర్దేశకాలు కామాతో వేరుచేయబడి బ్రాకెట్ల మధ్య FORMAT వాక్యములో ఉంచుతాము.

FORMAT వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము

$$n \text{ FORMAT } \left(F_1, F_2, \ldots\ldots, F_m\right)$$

'n' వాక్యపు సంఖ్య, $F_1, F_2, \ldots\ldots F_m$ లు జాబితాలోని చలరాసుల క్షేత్ర నిర్దేశకాలు. ఇక్కడ సంఖ్యా పరిమాణములకు సంబంధించిన FORMAT నిర్దేశకాల గురించి తెల్సుకుందాం. ఇందుకోసం 3 FORMAT నిర్దేశకాలు కలవు. అవి

1. I — FORMAT నిర్దేశకము.
2. F — FORMAT నిర్దేశకము.
3. E — FORMAT నిర్దేశకము.

16.5.1 I - FORMAT నిర్దేశకము లేక పూర్ణాంక క్షేత్ర నిర్దేశకము

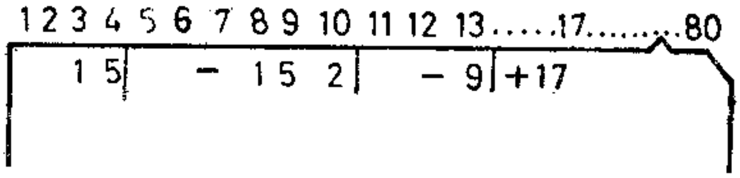
కార్డు మీద ఉన్న దత్తాంశము (ఒక చలరాసి విలువ) పూర్ణాంక పరిమాణము అయినప్పుడు, దానిని నిర్దేశించుటకు 'I' ను ఉపయోగిస్తాం. దీని రూపము Iw, w క్షేత్ర నిడివిని తెల్పును.

ఉదాహరణకు J యొక్క విలువ 516 అనుకుందాం. అప్పుడు దాని FORMAT నిర్దేశకము I3 మరియు దీనికి సంబంధించిన FORMAT వాక్యము.

5 FORMAT (I3),

ఇక్కడ 5 వాక్యపు సంఖ్య

ఉదాహరణకి, K, LN, LM మరియు J యొక్క విలువలు కార్డుమీద ఈ క్రింది విధంగా పంచ్ చేయబడినవి అనుకుందాం.



పటం – 2 : K, LN, LM మరియు J ల విలువలుగల కార్డు

K, LN, LM, J ల క్షేత్ర నిర్దేశకాలు I4, I6, I3 మరియు I4. FORMAT వాక్యము

15 FORMAT (I4, I6, I3, I4)

(15 వాక్యపు సంఖ్య)

గమనిక : క్షేత్రములలోని నిలువు వరుస ఖాళీలను సున్నాలుగా తీసుకొనును. కనుక సంఖ్యలను క్షేత్రములో కుడివైపుకు జర్గవలెను. ఎడమవైపు మాత్రమే నిలువు వరుసలను ఖాళీగా ఉంచవచ్చును. (పైన ఇచ్చిన ఉదాహరణలో మాదిరి (పటం – 2)).

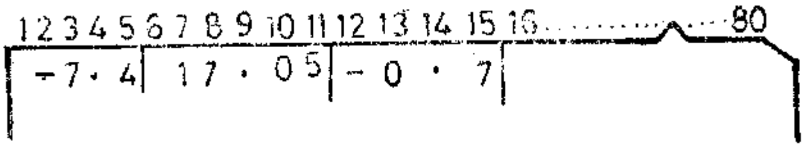
16.5.2 F - FORMAT నిర్దేశకము లేక వాస్తవ క్షేత్ర నిర్దేశకము

దత్తాంశము ఘాతము లేని వాస్తవ సంఖ్యలు అయినపుడు F – FORMAT నిర్దేశకము ఉపయోగిస్తాం. దీని సాధారణ రూపము F*w·d*, *w* = నిలువు వరుసల మొత్తం (దత్తాంశ బిందువు, ఖాళీలు, గుర్తులు అన్నీ కలిపి)

d = దత్తాంశ బిందువు తర్వాత అంకముల సంఖ్య.

ఉదాహరణకి X విలువ –50.123 అయిన, దాని క్షేత్ర నిర్దేశకము F7.3.

X, Y మరియు Z యొక్క విలువలు కార్డుమీద ఈ క్రింది విధంగా పంచ్ చేయబడినవి అనుకుందాం. అప్పుడు



పటం – 3 : X, Y, Z ల విలువలు గల దత్తాంశ కార్డు.

X, Y మరియు Z ల FORMAT నిర్దేశకాలు వరుసగా F5.1, F6.2 మరియు F4.1 మరియు దీనికి సంబంధించిన FORMAT వాక్యము

10 FORMAT (F5.1, F6.2, F4.1)

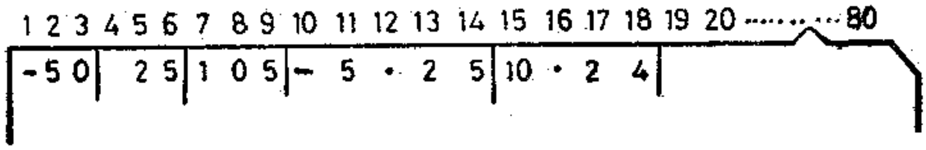
16.5.3 E - FORMAT నిర్దేశకము లేదా వాస్తవ క్షేత్ర నిర్దేశకము ·

వాస్తవ సంఖ్య ఘాతము కల్గి ఉన్న ఎడల E – FORMAT నిర్దేశకము ఉపయోగిస్తాము. దీని సాధారణ రూపము E*w ·d*, E సంఖ్య ఘాతము కల్గియున్నదని సూచించును.*w* మొత్తం క్యారక్టర్ల సంఖ్యను సూచించును, *d* దత్తాంశ బిందువు తర్వాత ఉన్న అంకముల సంఖ్య (E కాకుండా).

ఉదాహరణకు P, Q, R విలువలు 12.72 E – 15, – 7.5 E – 05 మరియు 17.325 E +15 అయిన FORMAT నిర్దేశకాలు E9.2, E8.1 మరియు E10.3 మరియు FORMAT వాక్యము

25 FORMAT (E9.2, E8.1, E10.3)

గమనిక : రెండు లేక మూడు లేక అనేకములైన వరుసగా ఉన్న FORMAT నిర్దేశకాలు ఒకటే అయిన, మొదటి నిర్దేశకము ముందు ఆ సంఖ్యను రాస్తే సరిపోతుంది. అన్నీ రాయనవసరము లేదు. ఉదాహరణకి L,M, N, P మరియు Q ల విలువలు కార్డుమీద ఈ క్రింది విధంగా పంచ్ చేయబడిన



పటం – 4 : L, M, N, P, Q ల విలువలు కల కార్డు.

అప్పుడు L, M, N, P మరియు Q ల FORMAT నిర్దేశకాలు I3, I3, I3, F5.2 మరియు F5.2 దీనికి సంబంధించిన FORMAT వాక్యము

40 FORMAT (I3, I3, I3, F5.2, F5.2)

ఇందులో L, M మరియు N ల FORMAT నిర్దేశకాలు సమానము, మరియు P, Q ల నిర్దేశకాలు సమానము. కనుక పైన FORMATవాక్యమును ఈ క్రింది విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

40 FORMAT (3I3, 2F5.2)

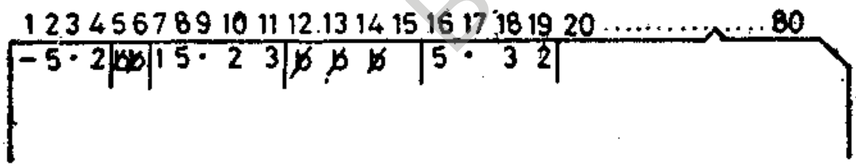
16.5.4 ఖాళీ క్షేత్రములు (Blank Fields)

ఉత్పాదక దత్తాంశ కార్డులో కానీ ఉత్పాదిత రికార్డులోగానీ ఖాళీ నిలువు వరుసలను వదిలివేయుటకు నిర్దేశకము *wX.w* వదిలివేయవలసిన నిలువు వరుసల సంఖ్య ఉదాహరణకు ఈ క్రింది FORMAT వాక్యమును తీసుకొనుము.

15 FORMAT (I6, 5X, 17)

16, 17 చే నిర్దేశింపబడిన రెండు సంఖ్యల మధ్య 5 నిలువు వరుసలను వదిలివేయును.

A, B, C విలువలు ఈ క్రింది విధంగా పంచ్ చేయబడిన



పటం – 5 : A, B, C విలువలుగల కార్డు.

FORMAT వాక్యము ఈ క్రింది విధముగా ఉండును.

60 FORMAT (F4.1, 2X, F5.2, 4X, F4.2)

16.6 FORMAT సహిత ఉత్పాదక మరియు ఉత్పాదిత వాక్యములు

ప్రతి చలరాసికి మనకు కావలసిన విధంగా FORMAT ను నిర్దేశించవచ్చు కాబట్టి, మనకు కావలసిన రీతిలో దత్తాంశమును అందించవచ్చు. మనకు కావలసిన రీతిలో ఫలితములను పొందవచ్చు.

READ మరియు WRITE వాక్యముల గురించి తెల్సుకుందాము.

READ వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము.

READ (i, n) జాబితా

n FORMAT $\left(S_1, S_2, \ldots, S_m\right)$

$n \rightarrow$ FORMAT వాక్యము యొక్క వాక్యపు సంఖ్య

$i \rightarrow$ ఉత్పాదక యూనిట్ యొక్క కోడ్ నెంబరు. ఇది గణనయంత్రానికి ఇంకొక గణనయంత్రానికి ఈ నెంబరు మారుతూ ఉండును.

$S_1, S_2, \ldots, S_m \rightarrow$ FORMAT నిర్దేశకాలు.

ఇక ముందు ఉదాహరణలన్నింటిలో కార్డు రీడరు యొక్క కోడ్ నెంబరు '5' ను వాడుతాము. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది READ వాక్యమును పరిశీలింపుము.

READ (5, 10) X, Y, Z

10 FORMAT (F5.2, F10.2, F7.3)

పై వాక్యములు దత్తాంశ కార్డులో F5.2, E10.2, F7.3 నిర్దేశకాలతో పంచ్ చేయబడిన X, Y, Z విలువలను గ్రహించమని గణనయంత్రాన్ని ఆదేశించును.

మరికొన్ని ఉదాహరణలు

1. READ (5, 75) L, M, N, A, B

   75 FORMAT (I4, I7, I3, F 7.3, E 15.6)

2. READ (5, 105) I, J, X, Y, Z

   105 FORMAT (I6, 2X, I4, 2X, F 7.2, 2X, F 5.1)

3. READ (5, 17) BETA, GLAM, GAMA, K

   17 FORMAT (2 F 8.4, F 5.2, I6)

WRITE వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము WRITE (i, n) జాబితా

n FORMAT $\left(S_1, S_2, \ldots, S_m\right)$

$i \rightarrow$ ఉత్పాదిత యూనిట్ కోడ్ నెంబరు.

$n \rightarrow$ FORMAT వాక్యము యొక్క వాక్యపు సంఖ్య.

$S_1, S_2, \ldots, S_m \rightarrow$ FORMAT నిర్దేశకాలు.

ఉదాహరణలన్నింటిలోనూ లైన్ ప్రింటర్ కోడ్ నెంబరు '9' గా తీసుకుంటాం ఫలితాలను లైన్ ప్రింటర్ ద్వారా పొందుటకు ఒక విషయము గమనించాలి. FORMAT వాక్యములో మొదటిది కారేజ్ కంట్రోల్

క్యారక్టర్. ఇది తప్పకుండా ఉండాలి. ముద్రించుటకు ముందు ఒక విలువు వరుసను వదలాలి అంటే 1X లేక IHb అని, రెండు విలువు వరుసలు వదలాలి అంటే 1H0 అని, ఆ పేజీ వదలి ఇంకొక పేజీలో ముద్రించాలి అంటే 1H1 అని వ్రాయాలి.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1) WRITE (9, 15) L, M, N

15 FORMAT (1Hb, 15, 5X, 14, 5X, 18)

2) WRITE (9, 2) X, Y, Z, A, B

2 FORMAT (1H1, 3F 7.2, E10.3, F5.2)

3) WRITE (9, 75) A, B, C, L

75 FORMAT (1X, F 8.6, 3X, F 11.3, 3X, E 10.3, 3X, 15)

చివరగా PAUSE, STOPమరియు END వాక్యముల గురించి తెల్సుకుందాం.

16.7 PAUSE, STOP మరియు END వాక్యములు

ప్రణాళిని అమలుపర్చునపుడు ఏ దశలోనైనా తాత్కాలికంగా నిలుపుచేయాలి అంటే PAUSE వాక్యమును వాడతాము. తర్వాత కన్సోల్ టైప్‌రైటర్ ద్వారా PAUSE వాక్యమునుండి మిగతా ప్రణాళిని అమలుపర్చవచ్చును. ఇది ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము. దీని సాధారణ రూపము.

PAUSE

లేక PAUSE *n*

n → 1 నుంచి 5 అంకములుగల '+' గానీ '—' గానీ గుర్తులేని ఆక్టల్ పూర్ణాంక సంఖ్య.

ప్రణాళిని అమలుపర్చుటను పూర్తిగా ఆపుచేయుటకు STOP వాక్యమును వాడుతాము. ఇది కూడా ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము. దీని సాధారణ రూపము.

STOP

లేదా STOP *n*

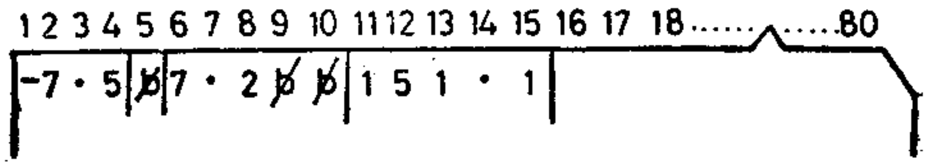
n → 1 నుంచి 5 అంకములుగల '+' గానీ '—' గానీ గుర్తులేని ఆక్టల్ పూర్ణాంక సంఖ్య.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1. PAUSE
2. PAUSE 27
3. PAUSE 532
4. STOP
5. STOP 10
6. STOP 430

END వాక్యము నాన్ ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము. ఇది సంకలినికి ప్రణాళి చివర అని తెలియజేయును. ప్రతి ప్రణాళిలోను ఇది చివరి వాక్యము.

ఉదా 1 : A, B, C విలువలు దత్తాంశ కార్డుమీద ఈ క్రింది విధంగా పంచ్ చేయబడిన, ఈ విలువలను చదవటానికి READ వాక్యము వ్రాయుము.



పటం – 6 : A, B, C ల విలువలుగల కార్డు.

సాధన

READ (5, 10) A, B,C

10 FORMAT (F 4.1, 1X, F 3.1, 2X, F 5.1)

ఉదా 2 : రెండు వాస్తవసంఖ్యలు X, Y లను ఘాతాంక రూప వాస్తవ సంఖ్యలుగా, J విలువ 4 అంకములు కలదిగా ముద్రించుటకు, మరియు ఒక విలువకు మరియొక విలువకు మధ్య 5 నిలువు వరుసలు ఖాళీ ఉండునట్లుగా ముద్రించుటకు తగిన ఉత్పాదిత వాక్యము వ్రాయుము.

సాధన

WRITE (9, 24) X, Y, J

24 FORMAT (1Hb, E15.8, 5X, E15.8, 5X, I4)

గమనికలు

1. ఉత్పాదిత వాక్యములో E - FORMAT నిర్దేశకము ఉపయోగించునపుడు $w \geq d + 6$ అయ్యేటట్లు చూడాలి, అంటే క్షేత్ర నిడివి, దత్తాంశ బిందువు కుడివైపు ఉన్న అంకముల సంఖ్యకంటే కనీసము 6 ఎక్కువ ఉండవలెను. ఈ 6 పంచ్ స్థలములు, i) ఘాతకమునకు రెండు స్థలములు ii) ఘాతక గుర్తు (E) కు ఒక స్థలము, iii) ఘాతకము యొక్క '+' గానీ '—' గానీ గుర్తునకు ఒక స్థలము, iv) దత్తాంశ బిందువునకు ఒక స్థలము, v) మాంటిసా గుర్తునకు ఒక స్థలము.

2. ఉత్పాదితములోని చలరాసి విలువ గురించి మనకు తెలియనప్పుడు (అంటే ఎన్ని నిలువు వరుసలు అవుసరమో, దత్తాంశ బిందువు తర్వాత ఎన్ని అంకములు ఉండునో తెలియనప్పుడు) E – FORMAT నిర్దేశకము వాడుట మంచిది. అంటే E15.X అని వ్రాయుట మంచిది. 15 నిలువు వరుసలు ఆ చలరాసికి కేటాయిస్తాము. దత్తాంశ బిందువుకు ఎడమవైపు X వరుసలు కేటాయిస్తాము.

16.8 అల్ఫా న్యూమరిక్ దత్తాంశానికి FORMAT నిర్దేశకాలు

మూడు FORMATనిర్దేశకాల గురించి తెలుసుకున్నాము. అవి i) పూర్ణాంక విలువలకు, పూర్ణాంక క్షేత్ర నిర్దేశకము. ii) భిన్నాంక విలువలకు, వాస్తవ క్షేత్ర నిర్దేశకము (F – FORMAT నిర్దేశకము) iii) వాస్తవ సంఖ్యలు ఘాతము కల్గియున్నప్పుడు, E – FORMAT నిర్దేశకము మరియు ఖాళీ క్షేత్ర నిర్దేశకాన్ని గూర్చి కూడా తెల్సుకున్నాము. ఉత్పాదకము లేక ఉత్పాదితము సంఖ్యా విలువలతోపాటు కొన్ని పదాలు, వాక్యము లతో కూడుకున్నదై (అక్షరముల మరియు అంకముల సమూహము) నప్పుడు హొలరిత్ క్షేత్ర నిర్దేశకాన్ని (H – నిర్దేశకము) ఉపయోగిస్తాం. ఇంకా కొన్ని నిర్దేశకాలు కూడా కలవు. ఇక్కడ మనము i) H - నిర్దేశకము ii) '/' ఉపయోగము iii) A - నిర్దేశకము iv) బహుళ రికార్డు నిర్దేశకములను గూర్చి తెలుసుకొంటాము.

16.8.1 హొలరిత్ క్షేత్ర నిర్దేశకము లేదా H - నిర్దేశకము

కొన్ని సందర్భాలలో ముద్రణ ఫలితాలతోపాటు కొన్ని వాక్యాలు, శీర్షికలు మొదలగునవి కూడా ఉండవచ్చును. ఆ సందర్భాలలో, అక్షరముల మరియు అంకముల సమూహమునకు H - నిర్దేశకాన్ని వాడుతాం. H – నిర్దేశకము యొక్క సాధారణరూపము.

w H XXXX ....

w = హొలరిత్ క్షేత్ర నిడివి.

XXX ... =*w* అంకముల మరియు అక్షరముల సమూహము (ఖాళీ విలువు పరుసలు కూడా కలుపుకొని) 'H' అనేది క్షేత్రము హొలరిత్ క్షేత్రము అని సూచించును.

w HXXXX .... అనునది FORMAT వాక్యములో వ్రాస్తాము.

ఉదాహరణకి 'TWO *b* REAL *b* ROOTS' అనే శీర్షికను ముద్రించమని గణయంత్రాన్ని అడగటానికి ఈ క్రింది విధంగా వాక్యములు వ్రాయాలి.

```
WRITE (9, 35)
35 FORMAT (1Hb, 14HTWObREALbROOTS)
```

I, J, K విలువలు I5, I5 మరియు I8 నిర్దేశకాలతో, శీర్షికలతో ఈ క్రింది విధంగా

I = XXXXX *b b b b b* J = XXXXX *b b b b b* K = XXXXXXXX

ముద్రించమని గణనయంత్రాన్ని అడుగుటకు సరియగు ఉత్పాదిత వాక్యము.

```
WRITE (9, 45) I, J, K
45 FORMAT (1X, 2HI =, I5, 6X, 2HJ =, I5, 6X, 2HK =, I8)
```

ఈ క్రింది ఉత్పాదిత వాక్యమును చూడండి.

```
WRITE (9, 10) N, ROOT
10 FORMAT (1Hb, 6HbAFTER, I2, 23Hb ITE –
        RATIONSbTHEbROOTbIS, F3.1)
```

N విలువ 10 అయితే, ROOT = 1.8 అయితే పై వాక్యముల ననుసరించి ఉత్పాదితము ఈ క్రింది విధముగా ఉండును.

AFTERb 10b ITERATIONSb THEb ROOTb ISb 1.8

16.8.2 స్లాష్ '/' ఉపయోగము

ఉత్పాదకములోగానీ, ఉత్పాదితములోగానీ ఒక కార్డును దాటవేయుటకు '/' స్లాష్‌ను FORMAT వాక్యములో వాడుతాం. ఉత్పాదితము ముద్రితము అయ్యేటప్పుడు '/' గుర్తు FORMAT వాక్యములో ఉన్న ఎడల అది గణనయంత్రమును ముద్రణలో ఒక లైన్‌ను వదలివేయమని అడుగును.

సరియైన అవగాహన కొరకు ఈ క్రింది ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాము.

1) READ (5, 16) A, B, C, D

16 FORMAT (F 8.3, F 7.5/F 5.3, F 7.2)

పై వాక్యములవల్ల గణనయంత్రం, F 8.3 మరియు F 7.5 నిర్దేశకాలతో A మరియు B ల విలువలను మొదటి కార్డు నుంచి చదువును. అప్పుడు గణనయంత్రం '/' ను గుర్తించుటవలన మొదటి కార్డును చదువుట మానివేయును. రెండవ కార్డునుంచి F 5.3 మరియు F 7.2 నిర్దేశకాలతో C మరియు D విలువలను గ్రహించును.

2) WRITE (9, 25) X, Y, I

25 FORMAT (1Hb, F 8.3/1Hb, F7.5/1Hb, I5)

పై వాక్యములవల్ల గణనయంత్రం F 8.3 నిర్దేశకముతో X విలువ మొదటి లైన్‌లో, F 7.5 నిర్దేశకముతో Y విలువ రెండవ లైన్‌లో, మరియు I5 నిర్దేశకముతో I విలువను మూడవ లైన్‌లోనూ ముద్రించును.

3) WRITE (9, 45) X, Y, L, M

45 FORMAT (1Hb, F7.3, E10.3//1Hb , 2I5)

పై వాక్యముల వల్ల గణనయంత్రం F 7.3 మరియు E 10.3 నిర్దేశకములతో X మరియు Y విలువలను మొదటి లైన్‌లో ముద్రించి, రెండవ లైన్‌ను దాటవేసి, మూడవ లైన్‌లో I5 మరియు I5 నిర్దేశకాలతో L మరియు M విలువలను ముద్రించును.

16.8.3 బహుళ రికార్డు నిర్దేశకము

ఉత్పాదక - ఉత్పాదిత జాబితాలు ఒకటికంటే ఎక్కువ రికార్డులలో కావాలంటే ఈ బహుళ రికార్డు నిర్దేశకాన్ని వాడుతాము. దీని గురించి తెల్సుకునే ముందు సంకలిని FORMAT వాక్యమును ఏ విధంగా అర్థము చేసుకుంటుందో తెల్సుకుందాము. ఉద్దేశ్య ప్రణాళిలో ఉత్పాదక - ఉత్పాదిత వాక్యమును సంకలిని గుర్తించిన వెంటనే, దీనికి సంబంధించిన FORMAT వాక్యమును ఎడమవైపు నుంచి కుడివైపుకు పరీక్షించును. అప్పుడే జాబితాలో ఇవ్వబడిన చలరాసులను కూడా ఎడమవైపునుంచి కుడివైపుకు పరీక్షించును. జాబితాలో ఇవ్వబడిన ప్రతిదాని విలువ ఇచ్చిన FORMAT నిర్దేశకము ననుసరించి చదవబడుతుంది లేక ముద్రించ బడుతుంది. చివర బ్రాకెట్ దగ్గరకు వచ్చినపుడు, ఇచ్చిన జాబితాలోని వన్ని అయిపోయినవా లేవా అని

పరీక్షించును. అన్నీ అయిపోకపోయినట్లయితే, కుడివైపునుంచి ఎడమవైపుకు మొదటి బ్రాకెట్ వచ్చేవరకు పరీక్షించును. ఈ పరీక్షలో వేటినైనా చదవటముగానీ ముద్రించటముగానీ చేయదు. మళ్ళీ ఎడమవైపు నుంచి కుడివైపుకు పరీక్షచేస్తూ, జాబితాలో మిగిలి ఉన్న వాటిని రెండవ కార్డునుంచి చదవటము లేక రెండవలైన్‌లో ముద్రించటము చేయును. ఈ విధంగా జాబితాలో ఉన్న వాటి నన్నింటిని చదివేవరకు లేక ముద్రించే వరకు పరీక్ష చేస్తూ ఉంటుంది.

ఉదాహరణకి ఈ క్రింది వాక్యమును పరిశీలిద్దాం.

```
WRITE (9, 16) I, J, K, L
16  FORMAT (1Hb, I5)
```

పై వాక్యములవల్ల గణనయంత్రం, I5 FORMAT నిర్దేశకముతో I విలువను మొదటిలైన్‌లోను, అదే I5 FORMAT నిర్దేశకముతో J విలువ రెండవలైన్‌లోనూ అదేవిధంగా K మరియు L విలువలు I5 నిర్దేశకముతో మూడవ మరియు నాల్గవలైనులో ముద్రించును.

ఉదా 1 : ఈ క్రింది వాక్యమును పరిశీలించండి.

```
WRITE (9, 27) A, B, C, X, Y, Z, P, Q, R
27  FORMAT (1Hb, F5.2, (F8.2, F8.3))
```

పై వాక్యములవల్ల గణనయంత్రం F5.2, F8.2 మరియు F8.3 నిర్దేశకాలతో A, B, C ల విలువలను మొదటి లైన్‌లో ముద్రించును. X, Y విలువలను F8.2, F8.3 నిర్దేశకాలతో రెండవలైన్‌లో, Z, P ల విలువలు, మూడవ లైన్‌లో, Q, R ల విలువలు, నాల్గవ లైన్‌లో F8.2, F8.3 ని నిర్దేశకాలతో ముద్రించును.

ఉదా 2 :

```
WRITE (9, 45) A, B, C, I, J, K, L, M, N, KOU, INT, MON
45  FORMAT (1Hb, 3F8.4/(3I4/2I3))
```

పై వాక్యమువల్ల గణనయంత్రం A, B, C విలువలను F8.4 నిర్దేశకములతో మొదటి లైన్‌లో ముద్రించును. I, J, K ల విలువలను I4 నిర్దేశకములతో రెండవ లైన్‌లో ముద్రించును. తర్వాత L, M ల విలువలను I3 నిర్దేశకములతో మూడవ లైన్‌లో ముద్రించును. తర్వాత 3 చొప్పున, 2 చొప్పున చలరాసుల విలువలను I4, I3 నిర్దేశకాలతో మిగతా లైన్‌లలో జాబితాలోని చలరాసుల విలువలన్నీ ముద్రించును.

16.8.4 A – FORMAT నిర్దేశకము

హొలెరిత్ నిర్దేశకము నుపయోగించి అక్షరముల - అంకముల సమూహమును గణనయంత్రం చదవగలదు. ఆ సమాచారమును గణనయంత్రం జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో దాచి ఉంచదు. ఇది మనకు ఒక అసౌకర్యము. నిజానికి శీర్షికలు ముద్రించటానికి, ఈ శీర్షికలను జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో దాచి ఉంచవలసిన పనిలేదు. అందువలన అటువంటి వాటికి H – నిర్దేశకము ఉపయోగకరము. కొన్ని రకము ప్రశ్నలకు ఈ సమాచారమును జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో దాచవలసి వస్తుంది. ఉదాహరణకు పేర్లను ఒక వరుసక్రమములో ఏర్పాటుచేయాలి. అంటే,

ఇచ్చిన పేర్లలో ఒక ప్రత్యేక అక్షరము (A అనుకోండి, లేదా R అనుకోండి) ఎన్నిసార్లు వస్తున్నది తెల్సుకోవాలి అంటే మొదలగు వాటికి ఈ పేర్లను జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో దాచి ఉంచాలి. ఇది A – FORMAT ఉపయోగించుట ద్వారా సాధ్యపడుతుంది. A – FORMAT నిర్దేశకము యొక్క సాధారణ రూపము.

A*w*

w = క్షేత్ర నిడివి. FORMAT వాక్యములోని ప్రతి A*w* నిర్దేశకమునకు, ఒక చలరాసి పేరు, జాబితాలో ఉండవలెను. ఉదాహరణకి ఈ క్రింది వాక్యములను పరిశీలించండి.

READ (5, 100) X

100 FORMAT (A4)

దత్తాంశ కార్డు : HEMA

పై వాక్యముల వల్ల గణనయంత్రము, HEMA అనే పేరును X అను అడ్రస్‌గల జ్ఞప్తి ప్రదేశాలలో భద్రపరచును. ఒక్కొక్క చలరాసి పేరును ఎన్ని క్యారక్టర్లు కేటాయించుతుంది అనే విషయము చలరాసి వాస్తవ చలరాసా, పూర్ణాంక చలరాసా అనే విషయము మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. ఉదాహరణకు TDC-316 గణనయంత్రం, వాస్తవ చలరాసి పేరుకి 4 క్యారక్టర్లను, పూర్ణాంక చలరాసి పేరుకు 2 క్యారక్టర్లను జ్ఞప్తి ప్రదేశాలలో దాచును. కనుక ఒక దాంట్లో క్యారక్టర్ల సంఖ్య 4 కంటే ఎక్కువ ఉంటే ఒకదానికంటే ఎక్కువ చలరాసుల పేర్లు తీసుకొనవలెను. అటువంటి సందర్భాలలో సాదికా చలరాసులను ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణకు ఈ క్రింది వాక్యమును పరిశీలించుదాం.

ఉదా 1 :

READ (5, 15) A, B, C, D

15 FORMAT (4A4)

DATA : VENKATANARAYANA

పై వాక్యములవల్ల గణనయంత్రం 'VENK' ను A అనే జ్ఞప్తి స్థలములో, 'ATAN' ను B అనే జ్ఞప్తి స్థలములోనూ, 'ARAY ను C లోనూ 'ANA b ' ను D అను జ్ఞప్తి స్థలములో ఉంచును.

ఉదా 2 :

READ (5, 25) (K(I), I = 1, 7)

25 FORMAT (7A2)

దత్తాంశము : OPENUNIVERSITY

పై ఉత్పాదక వాక్యమువల్ల గణనయంత్రం 'OP' ను K(1), 'EN' ను K(2) లోనూ, 'UN' ను K(3), 'IV' ను K(4), 'ER' ను K(5), 'SI" ను K(6), 'TY' ను K(7) లోనూ భద్రపరచును.

ప్రస్తుతము చివరగా FORMAT వాక్యములు వ్రాయుటయందు గుర్తుంచుకోవలసిన ముఖ్యమైన విషయాలు.

1. దత్తాంశము కార్డుమీద పంచ్ చేయబడిన వరుసక్రమములోనే జాబితాలోని చలరాసులు కూడా అదే వరుసక్రమములో ఉండవలెను (ఉత్పాదితమునకు కూడా)

2. ఉత్పాదక దత్తాంశము క్షేత్రములో కుడివైపు చివరగా ఉండేటట్లు చూడాలి.

3. చలరాసి పేరు మరియు చలరాసి FORMAT నిర్దేశకము సరిపడవలెను అంటే పూర్ణాంక విలువలకు I – FORMAT నిర్దేశకము, వాస్తవ సంఖ్యలకు E మరియు F – FORMAT నిర్దేశకాలు ఇవ్వవలెను.

4. ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత జాబితాలోని చలరాసుల పేర్లు ఉండాలి, సమాసములు ఉండరాదు.

5. ఉత్పాదితములో చలరాసుల విలువ మనకు తెలియనప్పుడు E – FORMAT నిర్దేశకము వాడుట మంచిది. అటువంటి సందర్భాలలో E15.8 వాడుట మంచిది.

6. H – నిర్దేశకము వాడునప్పుడు క్యారక్టర్లను సరిగ్గా లెక్కించవలెను.

7. WRITE వాక్యమునందుగల FORMAT వాక్యములో మొదటి నిర్దేశకము క్యారేజి కంట్రోల్ క్యారక్టరు

   (ie., 1H b, 1H1 లేదా 1H0).

8. ఒక లైన్‌మీద ముద్రించగల్గిన క్యారక్టర్లకంటే ఎక్కువ ముద్రించరాదు. సాధారణంగా ఒక లైన్‌లో 132 క్యారక్టర్లను ముద్రించటానికి వీలవుతుంది.

16.8.5 కొన్ని చిన్న గణనయంత్ర ప్రణాళికలు

గణనయంత్రమునకు దత్తాంశమును అందించుట, ఫలితములను గణనయంత్రం నుంచి పొందుట గురించి తెల్సుకున్నాం. కనుక మనము గణనయంత్రం నుపయోగించి చిన్న చిన్న ప్రశ్నలను సాధించ వచ్చును. గణనయంత్రంలో ఉపయోగించగల, చిన్న చిన్న ప్రశ్నలను సాధించుటకు, ఫోర్ట్రాన్ ప్రణాళిలను తయారుచేయుట గురించి ఇక్కడ తెల్సుకుందాము. మొదట ఇచ్చిన ప్రశ్నను క్రమచిత్రము ద్వారాగానీ లేక నిర్ణయపట్టిక వలనగానీ విశ్లేషించి, ఆదేశాల సముదాయమును తయారుచేస్తాం. తర్వాత ప్రతి ఆదేశాన్ని ఫోర్ట్రాన్ భాషలోనికి అనువదించాలి. ఈ ఫోర్ట్రాన్ ప్రణాళి సాధారణంగా ఫోర్ట్రాన్ కోడింగ్ కాగితాలు (Fortran Coding Sheets) మీద వ్రాస్తాం. ఒక్కొక్క ఆదేశాన్ని ఒక్కొక్క లైన్‌లో వ్రాస్తాం. తర్వాత ఒక్కొక్క లైన్‌లో ఉన్న సమాచారమును ఒక్కొక్క కార్డుమీద పంచ్ చేస్తాం. కోడింగ్ కాగితంమీద వ్రాసేటప్పుడుగానీ కార్డుమీద పంచ్ చేసేటప్పుడుగానీ ఈ క్రింది విషయాలను గుర్తుంచుకోవాలి. కోడింగ్ కాగితములో ఉన్న నిలువు వరుసలు పంచ్‌డ్ కార్డు నిలువు వరుసల వలెనే ఉండును.

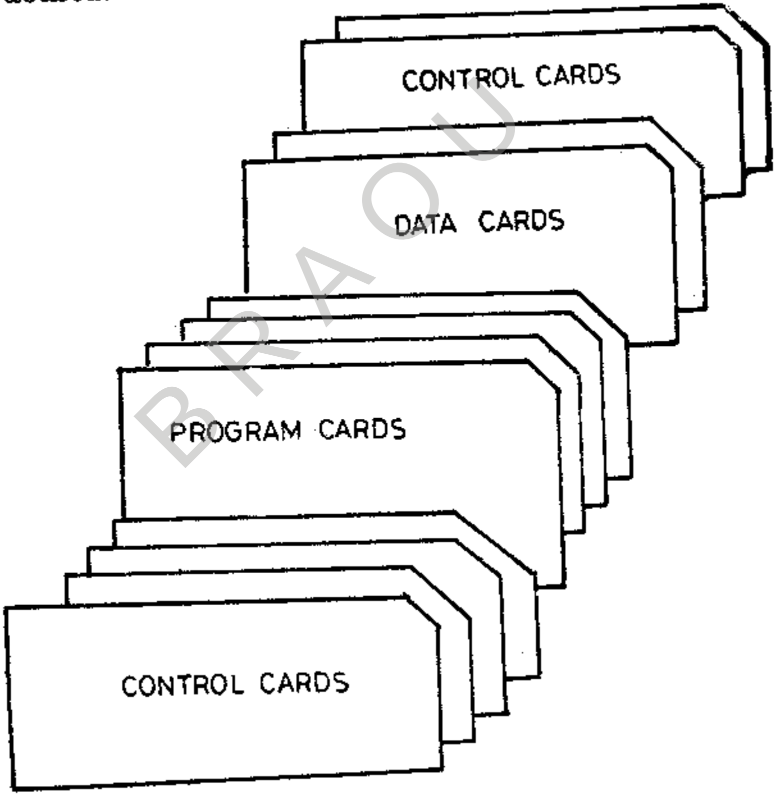
1. కార్డులో మొదటి నిలువు వరుసలో 'C' అను అక్షరము పంచ్ చేయబడినట్లయి ఆ కార్డులో పంచ్ చేయబడిన వాక్యము లేదా వ్యాఖ్యాలను (ప్రణాళి పేరు మొదలగునవి) సూచించును. సంకలిని ఈ వాక్యమును సంకలనము చేయదు. ప్రణాళిని ముద్రించేటప్పుడు దీనిని కూడా ముద్రించును.

2. వాక్యపు సంఖ్యలను 1 నుంచి 5 నిలువు వరుసల మధ్య పంచ్ చేస్తాం.

3. ఫోర్ట్రాన్ వాక్యములను 7-72 నిలువు వరుసల మధ్య పంచ్ చేస్తాం. ఒక కార్డు మీద ఒక వాక్యము మాత్రమే పంచ్ చేయాలి. ఒక వాక్యము ఒక కార్డు కంటే ఎక్కువగా ఉంటే రెండవ కార్డుమీద లేక ఇంకా కొన్ని కార్డులమీద పంచ్ చేయవచ్చును. అటువంటప్పుడు మొదటి కార్డుగాక మిగతా కార్డులలో 6 వ నిలువవరుసలో '0' కాకుండా ఇతర ఏ ఫోర్ట్రాన్ అక్షరమువైనను పంచ్ చేయాలి. సాధారణంగా వరుస సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాం. ఎన్ని కార్డులు (ఒక వాక్యమునకు) ఉపయోగించవచ్చును అనేది మనము ఉపయోగించే గణనయంత్రంమీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

4. ఫోర్ట్రాన్ వాక్యములో ఉన్న ఖాళీ నిలువు వరుసలను సంకలని లెక్కలోకి తీసుకొనదు. చదవటానికి వీలుగా ఉండటానికి ఖాళీలను ఉపయోగిస్తాం.

5. దత్తాంశ కార్డులు కాకుండా మిగతా వాటిమీద 73-80 నిలువు వరుసలు ప్రణాళి రచయిత గుర్తింపు మార్కునకు ఉపయోగించవచ్చును. ప్రణాళిని అమలుపర్చుటకు గణనయంత్రమునకు కొన్ని ఆదేశాలు ఇవ్వాలి. ఇందుకోసం ప్రణాళి కార్డులతోపాటు గణనయంత్రం నియంత్రణ కార్డులను కూడా జతచేయాలి. ఈ కార్డులు గణనయంత్రం ఏఏ పనులు చేయాలో ఆదేశించును. వీటి సంఖ్య, రూపము మనము ఉపయోగించే గణనయంత్రంపై ఆధారపడియుంటుంది. కనుక ప్రణాళి కార్డులు (1) గణన యంత్రం నియంత్రణ కార్డులు, (2) ప్రణాళి కార్డులు (3) దత్తాంశ కార్డులను కలిపి జాబ్ (job) అంటాం. ఈ జాబ్ ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.



పటం – 2 : పూర్తి ప్రణాళి కార్డుల వరుసక్రమము

Control Cards — నియంత్రణ కార్డులు

Program Cards — ప్రణాళి కార్డులు

Data Cards — దత్తాంశ కార్డులు

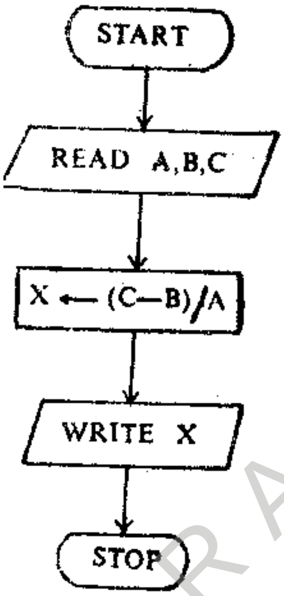
ఉదా 1 : ఏకఘాత సమీకరణం

$ax + b = c \ (c \neq 0)$ ను సాధించుటకు గణనయంత్రం ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

X విలువను కనుగొనుటకు, ముందుగా ఉత్పాదక వాక్యముద్వారా a, b, c ల విలువలను గణనయంత్రం యొక్క జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో A, B, C అను పేరుగల జ్ఞప్తి ప్రదేశాలలో భద్రపరచాలి. తర్వాత X విలువ $X = (c - b)/a$ అను సూత్రము నుపయోగించి కనుగొనబడింది. తర్వాత చివరగా X విలువ ఉత్పాదిత వాక్యము ద్వారా మనకు అందింపబడుతుంది.

ముందుగా క్రమచిత్రాన్ని గీసి, తర్వాత ప్రణాళి వ్రాద్దాము.



పటం- 3 : $ax + b = c$ ను సాధించుటకు క్రమచిత్రము.

మొదట FORTRAN రహిత ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యములలో ప్రణాళి వ్రాద్దాము.

ప్రణాళి 1 :

```
C    PROGRAME TO SOLVE LINEAR EQUATION
     READ, A, B, C
     X = (C – B)/A
     PRINT, X
     STOP
     END
```

ప్రణాళి వ్రాసిన తర్వాత పై ఆదేశాలను పంచ్‌డ్ కార్డులమీద పంచ్ చేయాలి. ఇవికాకుండా A, B, C ల విలువలు ఒకటవ విలువు వరుసనుంచి పంచ్ చేయబడిన దత్తాంశ కార్డు, మరియు గణనయంత్రం నియంత్రణ కార్డులను కలిపి, గణనయంత్రానికి అందించిన, మనకు ఫలితము ఉత్పాదిత యూనిట్ ద్వారా లభించును.

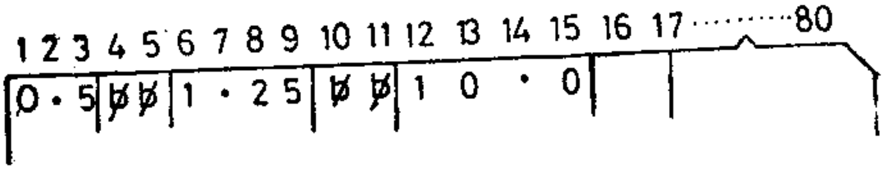
గమనిక : ఇంకొక ఏకఘాత సమీకరణము సాధించాలి అంటే ప్రణాళిక మారదు. దత్తాంశ కార్డు మాత్రమే మార్చవలెను. పాత దత్తాంశకార్డు తీసివేసి, క్రొత్త A, B, C ల విలువలుగల మరియొక దత్తాంశ కార్డును పెట్టవలెను. కనుక ఒక ప్రణాళి వ్రాశామంటే, సరూప ప్రశ్నలన్నింటిని అదే ప్రణాళిని ఉపయోగించి సాధించ వచ్చును.

ఇప్పుడు FORMAT సహిత ఉత్పాదక - ఉత్పాదిత వాక్యముల నుపయోగించి ప్రణాళిని వ్రాద్దాము. A, B, C ల విలువలు 0.5, 1.25 మరియు 10.0 అనుకొందాం. వీటి FORMAT నిర్దేశకాలు F3.1, F4.2 మరియు F4.0.

ప్రణాళి 2 :

```
C     PROGRAM TO SOLVE LINEAR EQUATION
      READ (5, 15) A, B, C
15    FORMAT (F3.1, 2X, F4.2, 2X, F4.0)
      X = (C – B)/A
      WRITE (9, 20) X
20    FARMAT (1Hb, E15.8)
      STOP
      END
```

(X విలువ మనకు ముందుగా తెలియదు కాబట్టి, E15.8 నిర్దేశకాన్ని తీసుకొన్నాము). దత్తాంశ కార్డు ఈ క్రింది విధంగా ఉండును.



పటం – 4 : A, B, C విలువలుగల దశాంశ కార్డు.

ఉదా 2 : A, X, S విలువలను F10.4 నిర్దేశకాలతో గణనయంత్రమునకు అందించుటకు, మరియు ఈ క్రింది సూత్రముల నుపయోగించి Y మరియు Z ను గణించి ముద్రించుట కొరకు ప్రణాళి వ్రాయుము.

$$Y = \sqrt{X^2 - A^2},\ Z = \frac{X \cdot S}{2} - \frac{A^2}{2} \log |X + S|$$

సాధన :

మొదట A, X మరియు S ల విలువలను ఉత్పాదక వాక్యముల ద్వారా గణనయంత్రమునకు అందించవలెను. తర్వాత సూత్రముల నుపయోగించి Y మరియు Z లను కనుగొని, తర్వాత ఉత్పాదిత వాక్యము ద్వారా ముద్రించమని గణనయంత్రమును ఆదేశిస్తాము. చిన్న చిన్న ప్రశ్నలకు క్రమచిత్రాల అవసరము లేకుండా నేరుగా ప్రణాళిని వ్రాయగల్గుతాము. అనుభవము మీద మనము నేరుగా ప్రణాళి తయారుచేయ గల్గుతాము.

ప్రణాళి 3 :

```
C        PROGRAM TO CALCULATE Y AND Z
         READ (5, 25) A, X, S
   25    FORMAT (3F10.4)
         Y = SQRT (X * X – A * A)
         Z = X * S/2. – A *  A/2 * ALOG (ABS (X + S))
         WRITE (9,35) A, X, S, Y, Z
   34    FORMAT (1Hb, 3F10.4, 2X, 2HY =, E15.8, 2X, 2HZ =, E15.8)
         STOP
         END
```

ఉదా 3 : సరియైన FORMAT నిర్దేశకాలు ఉపయోగించి E మరియు V ను ఈ క్రింది సూత్రముల నుపయోగించి కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

$$E = \frac{1}{2} CQ^2, C = 0.00001, Q = 0.0025 \text{ అయినప్పుడు}$$

$$V = RT/P, R = 15.7, T = 12.87, P = 156.05 \text{ అయినప్పుడు}$$

ప్రణాళి 4 :

```
C       TO CALCULATE E AND V
        READ (5, 8) C, Q, R, T, P
   8    FORMAT (2X, F7.5, 2X, F6.4, 2X, F4.1, 2X, F5.2, 2X, F6.2)
        E = 1./2. *  C *  Q *  *  2
        V = R * T/P
        WRITE (9, 12) E, V
  12    FORMAT (1Hb, E15.8/1Hb, E15.8)
        STOP
        END
```

ఇచట ఉత్పాదిత FORMAT వాక్యములో '/' ను ఉపయోగించాము. మొదటి లైన్‌లో E విలువను E15.8 నిర్దేశకముతో, రెండవ లైన్‌లో V విలువను E15.8 నిర్దేశకముతో ముద్రించును.

ఉదా *4* : A (4, 5, 7), B (32., 5.4, 7.6) అనునవి రెండు బిందువులు. ఈ రెండు బిందువుల మధ్య దూరము మరియు A B యొక్క దిక్-కొసైన్‌లు కనుగొనుటకు ప్రణాళిని వ్రాయుము.

సాధన :

A యొక్క నిరూపకాలు A_1, A_2, A_3 మరియు B యొక్క నిరూపకాలు B_1, B_2, B_3 అనుకుందాం. చలరాశి 'DIST' దూరమునకు, DCX, DCY మరియు DCZ దిక్ కొసైన్‌లను సూచించును అనుకుందాం. దిక్‌కొసైనులు, దూరము కనుగొనుటకు ఈ క్రింది సూత్రములు ఉపయోగిస్తాం.

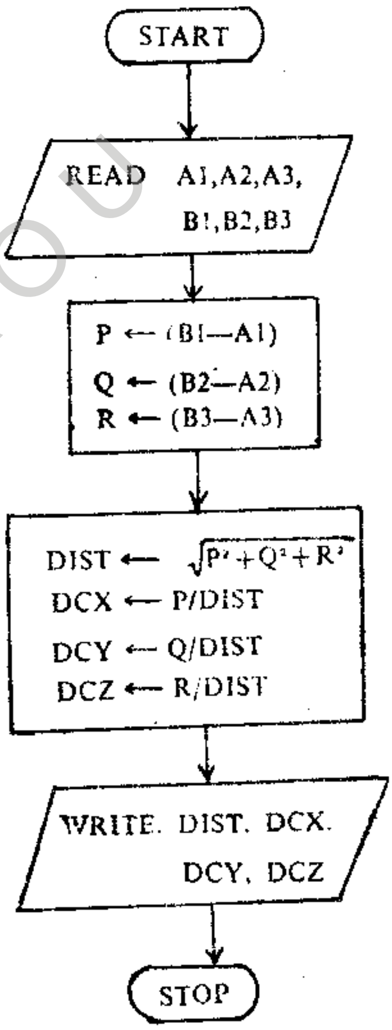
$$\mathrm{DIST} = \sqrt{\left(B_1 - A_1\right)^2 + \left(B_2 - A_2\right)^2 + \left(B_3 - A_3\right)^2}$$

$$\mathrm{DCX} = \left(B_1 - A_1\right)/\mathrm{DIST}$$

$$\mathrm{DCY} = \left(B_2 - A_2\right)/\mathrm{DIST}$$

$$\mathrm{DCZ} = \left(B_3 - A_3\right)/\mathrm{DIST}$$

క్రమ చిత్రం ఈ క్రిందనీయబడింది.



పటం - 5 : దూరము, దిక్ కొసైన్ కనుగొనుటకు క్రమచిత్రము.

ప్రణాళిక 5 :

```
C       TO CALCULATE DISTANCE AND DCS
        READ (5, 3) A1, A2, A3, B1, B2, B3
  3     FORMAT (3F2.0, 2X, 3F3.1)
        P  =  B1 – A1
        Q  =  B2 – A2
        R  =  B3 – A3
        DIST  =  SQRT (P * P + Q * Q + R * R)
        DCX  =  P/DIST
        DCY  =  Q/DIST
        DCZ  =  R/DIST
        WRITE (9, 7) DIST, DCX, DCY, DCZ.
  7     FORMAT (1Hb, 5HDIST =, E15.8/1Hb, 4HDCX =
  1     E15.8, 2X, 4HDCY =, E15.8, 2X, 4HDCZ =, E15.8)
        STOP
        END
```

ఉదా 5 : ఈ క్రింది శ్రేణి మొత్తం కనుగొనుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి. $x = 5.4$ కు

$$S = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

సాధన :

గణనయంత్రమును ఉపయోగించి ప్రశ్నలను సాధించుటలో, వీలైతే అంకగణిత పరిక్రియలు తగ్గించటానికి వీలుంటే తగ్గించాలి. ఈ ఉదాహరణలో మధ్యస్థ చలరాసులను ఉపయోగించుట వలన అంకగణిత పరిక్రియలను తగ్గించవచ్చు.

ప్రణాళి 6 :

```
C       TO END THE SUM
        READ (5, 15) X
  15    FORMAT (F3.1)
        X2  =  X * X
        X4  =  X2 * X2/24.
        X6  =  X4 * X2/30.
        X8  =  X6 * X2/56.
        X10 =  X8 *X2/90.
```

```
      SUM = 1. – X2/2. + X4 – X6 + X8 – X10
      WRITE (9, 20) X, SUM
20    FORMAT (1Hb, F3.1, 5X, E15.8)
      STOP
      END
```

16.9 సారాంశము

ఉత్పాదక వాక్యాల ద్వారా, కంప్యూటర్‌కు విశ్లేషించాల్సిన సమాచారం అందిస్తాము. ఉత్పాదిత వాక్యాలు, కంప్యూటర్ విశ్లేషించిన సమాచారం మనకు అందించడానికి ఉపయోగపడతాయి. కంప్యూటర్‌కు అందించవలసిన సమాచారంలోని చలరాశుల డాటా ఏ రూపంలో ఉంది, ఒక్కొక్క చలరాశికు ఎంత నిడివి కావాలి వంటి సమాచారాన్ని ముందుగా కంప్యూటర్‌కు తెలియపర్చడానికి; అలాగే, విశ్లేషణ అనంతరం కావలసిన సమాచారం ఏరూపంలో ముద్రించాలో కంప్యూటర్ తెలియపర్చడానికి format వాక్యాలు ఉపయోగపడతాయి. ఉత్పాదక/ఉత్పాదిత వాక్యలు తరువాత ఎప్పుడూ format వాక్యము వ్రాస్తాము. format వాక్యము ఎక్జిక్యూటబుల్‌కాదు. ఈ వాక్యము కంపైలర్‌కు ఏదైన కంప్యూటర్‌కు అందించాల్సిన/ముద్రించాల్సిన చలరాశి యొక్క రూపం, వాటి నిడివి వంటివి తెలియపర్చుతుంది. సంఖ్యలకు సంబంధించి మూడు రకాల format నిర్దేశకాలున్నాయి. I – format, E – format, F – format నిర్దేశకాలు. ఉత్పాదక/ఉత్పాదిత వాక్యాలలో సంఖ్యలతోబాటు పదాలు, వాక్యాలు ఉంటే, హాల్‌రిత్ నిర్దేశకాలు, A – format నిర్దేశకాలు వాడతాము.

16.10 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానమియ్యండి.

1. ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యముల ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము.

2. a) వాక్యపు సంఖ్యను గూర్చి వ్రాయుము.

   b) ఈ క్రిందివి సరియైన వాక్యపు సంఖ్యలో కావో సహేతుకముగా తెల్పండి.

   1) 150 2) 10. 3) K 15 4) 200 5) 1235784

3. ఈ క్రింది వాటిని నిర్వచింపుము.

   a) i) రికార్డు ii) క్షేత్రము iii) క్షేత్ర నిడివి

   b) FORMAT వాక్యమును గూర్చి వ్రాయుము.

4. రెండేసి ఉదాహరణలిస్తూ F – FORMAT నిర్దేశకము, E – FORMAT నిర్దేశకము గురించి వ్రాయుము.

5. హొలరిత్ క్షేత్ర నిర్దేశకము గూర్చి, రెండు ఉదాహరణలు ఇస్తూ వివరించండి.

6. A, B, C ల విలువలు 15.85, 101.23 మరియు 1050.25 అయిన, వీటిని ఈ క్రింది రూపములో ముద్రించుటకు FORMAT సహిత ఉత్పాదిత వాక్యము వ్రాయండి.

A = 15.85

B = 101.23

C = 1050.25

7. P, Q, Rల విలువలు 12.0, 7.25, 5.75. ఈ విలువలని చదివి $S = P^2 + Q^2 + R^2$ ను గణనచేసి ముద్రించుటకు తగిన ప్రణాళిని వ్రాయండి.

8. A, B, C ల విలువల నిర్దేశకాలు F7.0. ఈ విలువలను గ్రహించి, S = (A + B + C)/2,

Area = $\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)}$ ను గణనచేసి A, B మరియు C ల విలువలు ఒక లైన్‌లో, S మరియు Area ల విలువలు తర్వాత లైన్‌లో ముద్రించుటకు సరిపడు ప్రణాళిని వ్రాయండి.

9. F ను ఈ క్రింది సూత్రము, విలువల నుపయోగించి కనుగొనుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి.

X = 2.2 θ = .5 రేడియన్లు, ϕ = .2 రేడియన్లు, మరియు Z = .0034 లకు

$$F = \frac{\cos\left(e^{-x^2}\right) - \sin\left(\theta + \pi/4\right)}{\tan\phi + z^{2.5}}$$

II. క్లుప్తంగా సమాధానాలివ్వండి.

1. సంఖ్యా పరిమాణములకు ఎన్ని FORMAT నిర్దేశకాలు కలవు అవి ఏవి?

2. A, B మరియు C ల విలువలు వరుసగా –15.752, 153.175 మరియు 10.72E –15 అయిన, వీటికి సరిపడు FORMAT నిర్దేశకాలను వ్రాయండి.

3. X, Y, Z విలువలు వరుసగా - 15.75, 40.17413 మరియు 0.575E –01. వీటిని గణనయంత్రమునకు అందించుటకు సరిపడు READ వాక్యమును వ్రాయండి.

4. A, B, C, K మరియు L విలువలు 10.75, –75.752, 100.02,452 మరియు –1750 గా ముద్రించుటకు WRITE వాక్యము వ్రాయండి.

5. "THE b ROOTS b ARE b COMPLEX" అనే శీర్షికను ముద్రించుటకు FORMAT వాక్యము వ్రాయండి.

6. X, Y, Z, P, Q, R ల విలువలు వరుసగా 10.18, 1.75, 3.75, 150.0, 100.75 మరియు 108.5. వీటిని లైన్‌కు రెండు విలువల చొప్పున ముద్రించటానికి తగిన ఉత్పాదిత వాక్యమును వ్రాయండి.

7. ఈ క్రింది వాక్యమును గణనయంత్రం జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో ఉంచటానికి, A – FORMAT నిర్దేశకాన్ని ఉపయోగించి ఉత్పాదక వాక్యమును వ్రాయండి.

8. Q మరియు R లు కనుగొనుటకు (ఈ క్రింది సూత్రముల నుపయోగించి ప్రణాళి వ్రాయండి.)

$Q = H (T - U)$ మరియు $R = V (T - U)$

$H = 352000, T = 815, U = 850, V = 0.05 \times 10^{-15}$ అయినప్పుడు

సమాధానాలు

I. 2 (b) 1) అవును. 2) కాదు – దత్తాంశ బిందువు వున్నది కావున. 3) కాదు – సంఖ్య కాదు కాబట్టి 4) అవును 5) కాదు – 5 అంకములకంటే ఎక్కువ కనుక.

6.
```
      WRITE (9, 15) A, B, C
   15 FORMAT (1Hƀ, 2HA =, F5.2/1Hƀ, 2HB =, F6.2/1Hƀ, 2HZ =, F7.2)
```

II 2. F7.3, F7.3, E9.2

3.
```
      READ (5, 15) X, Y, Z
   15 FORMAT (F5.2, F8.5, E9.3)
```

4.
```
      WRITE (9, 17) A, B, C, K, L
```

6.
```
      WRITE (9, 20) X, Y, Z, P, Q, R
   20 FORMAT (1Hƀ, F5.2, F4.2/1Hƀ, F4.2, F4.2/1Hƀ, F5.1, F6.2)
```

7.
```
      READ (5, 13) A, B, C, D, E
   13 FORMAT (5 A4)
```

దత్తాంశము : BALAPARAMESAWARA RAO

ఖండిక – 17 : నియంత్రణ వాక్యాలు

విషయ సూచిక

17.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక అంతానికి మీరు, (i) తగిన నియంత్రణ వాక్యములనుపయోగించి ఇచ్చిన సమస్య సాధించడానికి పోర్ట్రాన్ ప్రణాళిలను వ్రాయగలగాలి, (ii) ఒక ప్రణాళిలో ఉన్న తప్పులను కనిపెట్టగలగాలి, (iii) లూపింగ్‌వంటి ప్రక్రియలకు DO వంటి వాక్యాలనుపయోగించి ప్రణాళి వ్రాయగలగాలి.

17.2 ఉపోద్ఘాతం

ఈ ఖండికలో నియంత్రణ వాక్యముల గురించి వాటి ఉపయోగాల గురించి తెల్సుకుందాం. గణన యంత్ర, ప్రణాళిలోని వాక్యములను ఒకదాని వెంట ఒక దానిని వరుసగా మొదటి నుంచి చివరదాకా తీసుకొని అమలుపర్చును. అంటే ఒక వాక్యములోఇవ్వబడినపరిక్రియల నన్నింటిని పూర్తిచేసిన తర్వాత, దాని తర్వాత వాక్యమును తీసుకొనును. దీనిని నియంత్రణ యొక్క సాధారణ వరుసక్రమము (Normal Flow of Control) అంటాం.

ప్రణాళిని అమలు పర్చునపుడు కొన్నిసార్లు ఈ వరుస క్రమమును మార్చవలసి రావచ్చును. అంటే కొన్ని వాక్యములను, వివిధ చలరాసుల విలువలతో మళ్ళీ, మళ్ళీ గణన చేయవలసి రావచ్చు, లేక మొత్తం ప్రణాళినే వివిధ విలువలతో అనేకసార్లు అమలుపర్చవలసి రావచ్చు, లేక ప్రశ్నను సాధించు పద్ధతి ననుసరించి కొన్ని వాక్యములను అమలు పర్చరానవసరము లేకపోవచ్చు. ఇటువంటి సందర్భాలలో నియంత్రణ వరుసక్రమము మార్చవలసి రావచ్చును. దీని కోసము తార్కిక నిర్ణయాలు తీసుకోవలసి వచ్చును (Logical decision making) మరియు నియంత్రణ వరుసక్రమము మార్చవలసి రావచ్చును. ఫోర్ట్రాన్‌లో ఈ రెండు సౌకర్యాలు కలవు.

నియంత్రణ వాక్యములు రెండు విధాలు (1) నియమ రహిత నియంత్రణ వాక్యములు. (2) నియమ సహిత నియంత్రణ వాక్యములు. వీటి గురించి ఇప్పుడు తెల్సుకుందాం.

17.3 నియమ రహిత నియంత్రణ వాక్యము

నియమ రహిత నియంత్రణ వాక్యమును అమలుపర్చునపుడు, దీని తర్వాత వాక్యము కాకుండా, నియంత్రణ వాక్యములో ఉన్న వాక్యపు సంఖ్య గల వాక్యమును తీసుకొని అమలుపర్చును. ఈ నియమ రహిత నియంత్రణ వాక్యాన్ని, నియమరహిత GO TO వాక్యము అనిగూడా అంటాం. దీని సాధారణ రూపము

GO TO *n*

n ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము యొక్క వాక్యపు సంఖ్య.

ఈ వాక్యము గణనయంత్రముకు తర్వాత అమలుపర్చు వాక్యము *n* వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యము అని తెలియజేయును. ఈ వాక్యము (*n* వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యము) GO TO *n* వాక్యము కంటే ముందర అయినా ఉండవచ్చు, తర్వాత అయినా ఉండవచ్చు.

కొన్ని సరియైన GO TO వాక్యములు

1. GO TO 5
2. GO TO 150
3. GO TO 40

కొన్ని సరికాని GO TO వాక్యములు

1. GO TO 0
2. GO TO I+5
3. GO TO, 35
4. GO TO 154362

17.4 నియమ సహిత నియంత్రణ వాక్యములు

ఫోర్ట్రాన్ - IV లో ఉన్న నియమ సహిత నియంత్రణ వాక్యములు

i. అంకగణిత IFవాక్యము

ii. తార్కిక IF వాక్యము

iii. గణిత IF వాక్యము

17.4.1 అంకగణిత IF వాక్యము

ప్రణాళి రచనలో ఎక్కువగా ఉపయోగపడే నియమసహిత నియంత్రణ వాక్యము అంకగణిత IF వాక్యము. ఈ వాక్యమువల్ల గణనయంత్రం ఒక నిర్ణయము చేస్తుంది. ఈ నిర్ణయానుసారము నియంత్రణ బదిలీ చేయబడుతుంది. అంకగణిత IF యొక్క సాధారణరూపము

IF (e) n_1, n_2, n_3

e = అంకగణిత సమాసము, n_1, n_2, n_3 లు ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము యొక్క వాక్యపు సంఖ్య.

పై వాక్యము యొక్క అర్థము ఇది. అంకగణిత సమాసము 'e' యొక్క విలువ ఋణాత్మకమైతే (< 0) n_1, వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యమును అమలుపర్చును. 'e' విలువ సున్న అయితే, n_2 వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యమును అమలుపర్చును. 'e' విలువ ధనాత్మకమయితే (> 0), n_3 వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యమును అమలుపర్చును.

ఉదాహరణకి ఈ క్రింది వాక్యమును పరిశీలించుము

IF (2.*A–B) 5, 10, 16

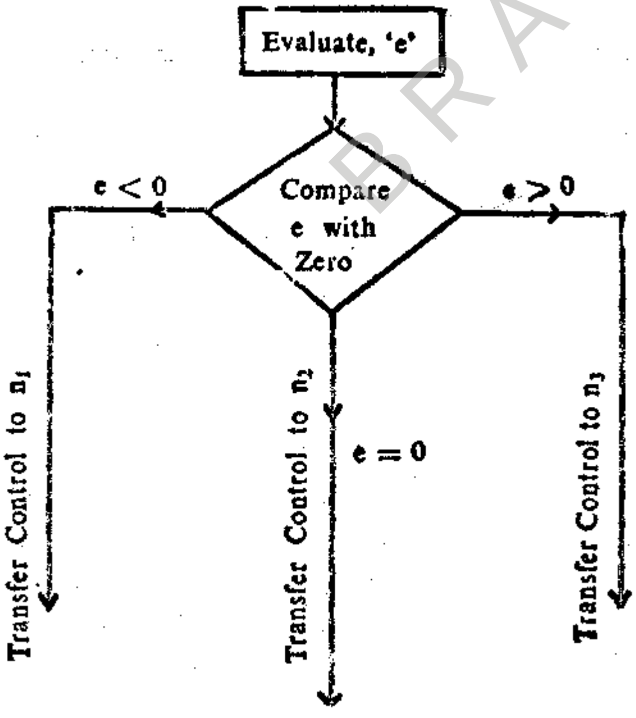
మొదట గణనయంత్రము 'e' యొక్క విలువ, అంటే 2.*A–B యొక్క విలువను కనుగొనుము. తర్వాత

(2.*A–B) < 0 ఐతే 5 వాక్యపుసంఖ్య గల వాక్యమును అమలుపర్చును.

(2.*A–B) = 0 ఐతే, 10 వాక్యపుసంఖ్యగల వాక్యమును అమలుపర్చును.

(2.*A–B) > 0 ఐతే, 16 వాక్యపుసంఖ్యగల వాక్యమును అమలుపర్చును.

సరియగు అవగాహనకొరకు ఈ క్రింది క్రమచిత్రాన్ని చూడండి.



పటం – 1 : అంకగణిత IF వాక్యము యొక్క క్రమచిత్రం.

గమనిక : n_1, n_2 మరియు n_3 లు ఎల్లప్పుడూ విడి విడి సంఖ్యలు అయి ఉండాలన్న నియమము లేదు. పై మూడింటిలో ఏ రెండు సంఖ్యలు అయినా ఒకటే కావచ్చు. (ప్రశ్నలో ఇచ్చిన నియమాలబట్టి ఉండును). ఉదాహరణకి ఈ క్రింది వాక్యములో

IF (*e*) 5, 5, 10

ఇచట $n_1 = n_2 = 5, n_3 = 10$. ఋణాత్మక మార్గము, సున్నా మార్గము ఒకటే.

మూడు మార్గములు ఒకటైతే (ఋణాత్మక, సున్నా, ధనాత్మక మార్గములు) నియమ రహిత నియంత్రణ వాక్యము వచ్చును. అంటే, ఉదాహరణకి IF (*e*) 25, 25, 25 అనే వాక్యము నియమరహిత నియంత్రణ వాక్యము GO TO 25 తో సమానము.

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 1 : P = 3.0, Q = 1.5 ఐతే IF (P–Q) 11, 111, 1111 అనే వాక్యమునునుసరించి గణనయంత్రం ఏ వాక్యమును అమలుపర్చును.

సాధన :

మొదట గణనయంత్రము P – Q విలువను కనుగొనును

$$\text{ఇచట } P - Q = 3.0 - 1.5 = 1.5$$

$$\therefore e = P - Q > 0.$$

కనుక గణనయంత్ర '1111' వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యమును అమలుపర్చును.

ఉదా 2 : $B^2 - 4AC$ విలువ సున్న ఐన గణనయంత్రం వాక్యపు సంఖ్య '10' గల వాక్యమును అమలుపర్చును. సున్నకాకుండా ఇతరము అయినపుడు (< 0 లేక > 0 అయినప్పుడు) '15' వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యమును అమలుపర్చును. పైన తెల్పినదానికి సరిపడు అంకగణిత IF వాక్యము వ్రాయండి.

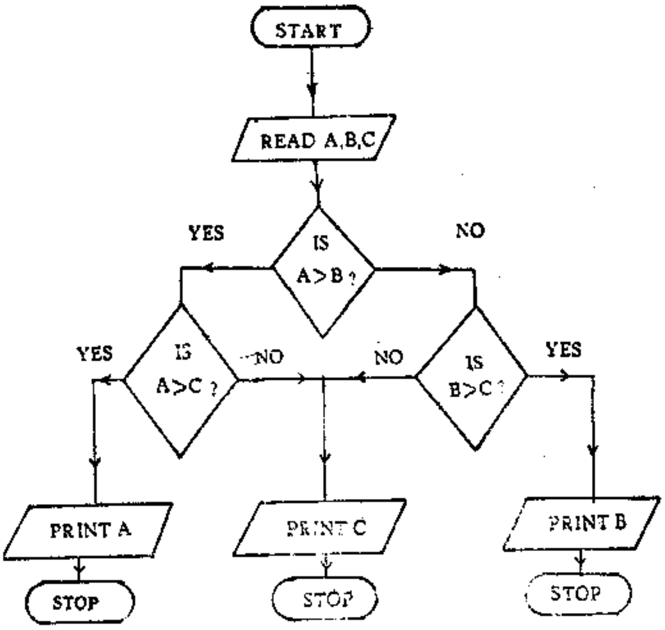
సాధన :

IF (B * B – 4. * A * C) 15, 10, 15

ఉదా 3 : ఇచ్చిన మూడు సంఖ్యలు A, B మరియు C లలో పెద్ద సంఖ్యను కనుగొనుటకు, అంకగణిత IF వాక్యము నుపయోగించి ప్రణాళిని తయారుచేయండి.

సాధన :

ఈ ప్రశ్నకు తగిన క్రమచిత్రాన్ని ఇదివరలో గీశాం. ప్రణాళిని సులువుగా వ్రాయటానికి దానిని ఇక్కడ మళ్ళీ గీద్దాం.



పటం – 2 : A, B, C లలో పెద్ద సంఖ్యను కనుగొను క్రమచిత్రం.

ఇచ్చట A మరియు B విలువలను పోల్చుటకు, అంకగణిత సమాసమును A–B గా తీసుకుంటాం. అదే విధంగా B మరియు C ల విలువలు పోల్చుటకు అంకగణిత సమాసమును B–C గా తీసుకుంటాం. క్రమచిత్రాన్ని పరిశీలిస్తూ ప్రణాళిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తాం. (ఇచట A, B, C ల FORMAT నిర్దేశకాలు F5.3గా తీసుకుందాం.)

ప్రణాళి 1 :

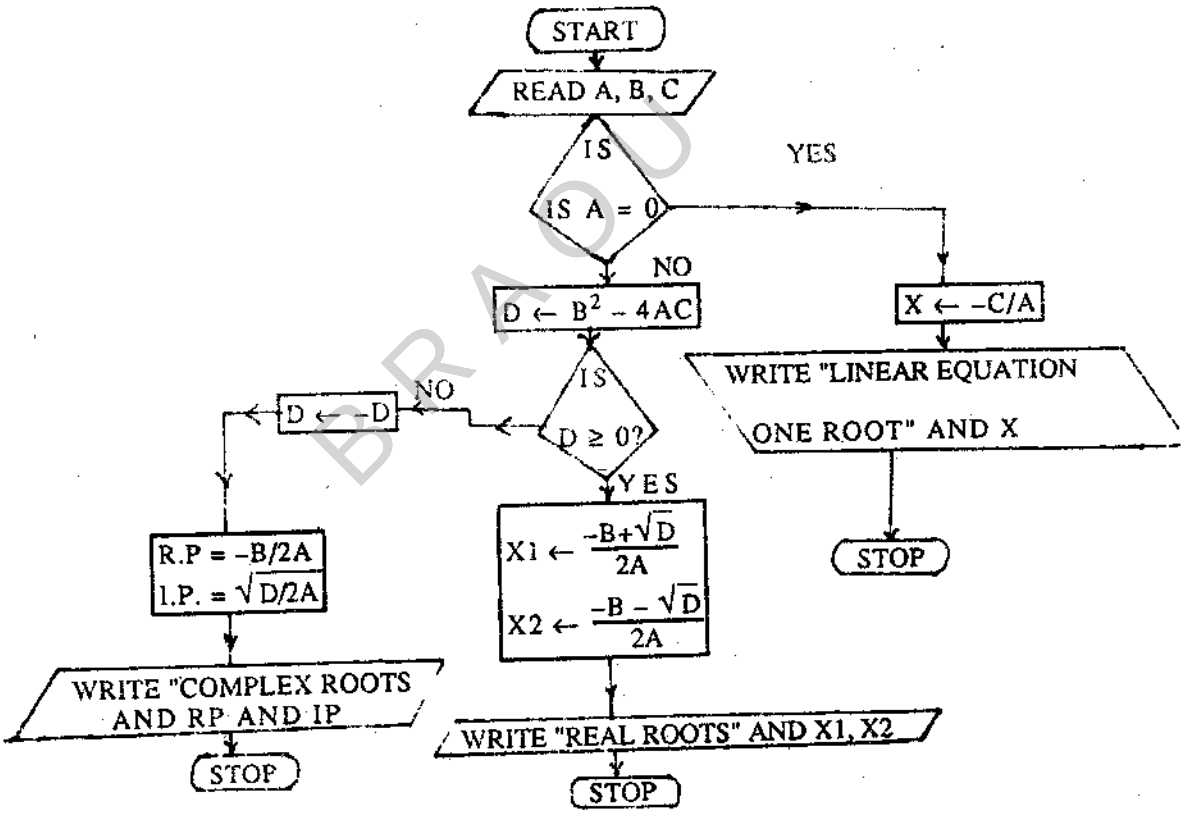
```
C         PICKING LARGEST OF A, B, C USING
C         ARITHMETIC IF
          READ (5, 10) A, B, C
     10   FORMAT (3F5.3)
          IF (A–B) 6, 6, 12
      6   IF (B–C) 7, 7, 15
      7   WRITE (9, 25) C
          STOP
     12   IF (A–C) 13, 13, 20
     13   WRITE (9, 25) C
          STOP
     20   WRITE (9, 25) A
          STOP
```

```
15  WRITE (9, 25) B
25  FORMAT (1Hb̸, F5.3)
    STOP
    END
```

ఉదా 4 : A, B మరియు C ల FORMAT నిర్దేశకాలు F6.2, F6.3 మరియు F7.3 లుగా తీసుకొని ద్విఘాత సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

ద్విఘాత సమీకరణము యొక్క మూలాలు కనుగొను పద్ధతి మనకు తెలుసు. విచక్షణి (Discriminant) $b^2 - 4ac$ యొక్క విలువను బట్టి మూలములు వచ్చును. క్రమచిత్రాన్ని పరిశీలించి ప్రణాళి వ్రాద్దాం.



పటం – 3 : $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలములు కనుగొనుటకు క్రమచిత్రం.

ప్రోగ్రాం 2 :

```
C         ROOTS OF QUADRATIC EQUATION
          READ (5, 7) A, B, C
     7    FORMAT (2X, F6.2, 2X, F6.3, 2X, F7.3)
          IF (A) 8, 18, 8
     8    D = B*B-4.*A.*C
          IF (D) 9, 13, 13
     9    D = - D
          A2 = 2.*A
          X1 = -B/A2
          X2 = SQRT (D)/A2
          WRITE (9, 10) X1, X2
    10    FORMAT (1X, 13HREAL PART X1 = , E15.8/1X,
        1 18HIMAGINARY PART X2 =, E15.8)
          STOP
    13    ROOTD = SQRT (D)
          X1 = (-B+ROOTD)/A2
          X2 = (-B-ROOTD)/A2
          WRITE (9, 15)
    15    FORMAT (1H b̸, 3HX1 =, E15.8, 8X, 4HX2 =, E15.8)
          WRITE (9, 16) X1, X2
    16    FORMAT (1H b̸, 3HX1 =, E15.8, 5X, 4HX2 =, E15.8)
          STOP
    18    X = C/B
          WRITE (9, 19)
    19    FORMAT (1X, 28HLINEAR EQUATION ONE ROOT ONLY)
          WRITE (9, 20) X
    20    FORMAT (1H b̸, 3HX =, E15.8)
          STOP
          END
```

పై ప్రణాళి అంకగణిత IF వాక్యము, H – నిర్దేశకము ఉపయోగించి వ్రాశాం. FORTRAN–IV భాషలో మరియొక IF వాక్యము కలదు. అది తార్కిక IF వాక్యము. పూర్ణాంక, వాస్తవ స్థిరసంఖ్యలు, చలరాసులు, సమాసములతోపాటు FORTRAN – IV భాషయందు తార్కిక స్థిరరాసులు, చలరాసులు, సమాసములు కూడా కలవు. వీటిని గురించి ఇప్పుడు తెల్సుకుందాం.

17.5 తార్కిక వాక్యములు

17.5.1 తార్కిక స్థిరరాసులు

FORTRAN - IV భాషలో .TRUE. మరియు .FALSE. అను రెండు తార్కిక స్థిరరాసులు కలవు. TRUE మరియు FALSE కు ముందు, వెనుక ఉన్న '.' బిందువులు తప్పకుండా ఉండవలెను. ఒక తార్కిక విల్కువ .TRUE. లేదా .FALSE. లలోని ఏదేని ఒక విలువ కల్గియుండును.

17.5.2 తార్కిక చలరాసులు

ప్రణాళి అమలుపర్చునపుడు తార్కిక విలువలు మారెడి చలరాసులను తార్కిక చలరాసులు అంటాం. పూర్ణాంక, వాస్తవ చలరాసులకు పేర్లు ఇచ్చినట్లే తార్కిక చలరాసులకు కూడా పేర్లు ఇస్తాం. ఒక చలరాసి తార్కిక చలరాసి అనే విషయము రూపము తెలియజేయు వాక్యము ద్వారా తెలియపరుస్తాం. (Type declaration Statement).

ఉదాహరణకు, KOUN, GAMA, YES మరియు BIG అనువాటిని తార్కిక చలరాసులుగా తీసుకోవాలంటే, వాటిని ప్రణాళిలో మొదటగా ఉపయోగించక ముందే ఈ క్రింది రూపము తెలియజేయు వాక్యము ద్వారా పై చలరాసులు తార్కిక చలరాసులు అని తెలియజేయాలి.

LOGICAL KOUN, GAMA, YES, BIG

17.5.3 సంబంధీకృత పరిక్రియలు మరియు తార్కిక పరిక్రియలు

FORTRAN – IV భాషలో ఉన్న సంబంధీకృత పరిక్రియలు ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి.

Sl. No.	గణితపర చిహ్నము	అర్థము	FORTRAN సమాసము
1.	<	తక్కువ	.LT.
2.	=	సమానము	.EQ.
3.	>	ఎక్కువ	.GT.
4.	≤	తక్కువగానీ సమానముగానీ	.LE.
5.	≠	సమానము కాదు	.NE.
6.	≥	ఎక్కువగానీ సమానముగానీ	.GE.

పట్టిక – 1 : సంబంధీకృత పరిక్రియలు

తార్కిక పరిక్రియలు (i) .AND. (ii) .OR. (iii) .NOT. ఉదాహరణకు X.EQ.Y అనే దానిని పరిశీలిద్దాం. X = Y అయినట్లయితే పై దాని విలువ .TRUE. లేకపోతే విలువ .FALSE.

అదే విధంగా P మరియు Q విలువలు .TRUE. అయినప్పుడు మాత్రమే P లేక Q విలువ P.AND.Q విలువ .TRUE., P లేక Q విలువ FALSE అయినప్పుడు P లేక మరియు Q విలువలు.FALSE. అయినప్పుడు P AND Q విలువ .FALSE. అగును.

.NOT.X ను తీసుకోండి. X విలువ .FALSE. అయినప్పుడు .NOT.X విలువ .TRUE. అగును. X విలువ .TRUE అయినప్పుడు, .NOT.X విలువ .FALSE. అగును.

17.5.4 తార్కిక సమాసములు

ఈ క్రింద నీయబడిన ప్రకారము సరియగు కలయికలవల్ల ఏర్పడిన దానిని తార్కిక సమాసము అంటాం.

1) తార్కిక పరిక్రియలచే కలపబడిన తార్కిక స్థిరరాసులు, చలరాసులు లేక ప్రమేయాల సమూహము

లేదా

2) సంబంధీకృత పరిక్రియలలో కలపబడిన అంకగణిత స్థిరరాసులు, చలరాసులు, ప్రమేయముల సమూహము

లేదా

3) (1) మరియు (2) ల కలయిక.

తార్కిక సమాసములను తయారుచేయునపుడు ఈ క్రింది విషయాలు గుర్తుంచుకోవాలి.

a) .NOT. అనే పరిక్రియకు తర్వాత మూలకము (స్థిరరాశి కానీ చలరాశికానీ ప్రమేయముకానీ) ఉండాలి, ముందు ఉండదు. (ఉదాహరణ .NOT.B మొదలగునవి).

b) మొదటిది .AND. లేక .OR. ఐతే రెండవది .NOT. అయినప్పుడు తప్ప; ఏ రెండు తార్కిక పరిక్రియలు వరుసగా రాకూడదు.

c) .AND. మరియు .OR. పరిక్రియలకు ముందు మూలకము ఉండవలెను.

పై పరిక్రియల తర్వాత కూడా మూలకము లేదా .NOT. ఉండవలెను.

కొన్ని సరియైన తార్కిక సమాసములు

1) .FALSE.

2) (A .GT. 5.2) .AND. (B .LE. 15.0)

3) I .GT. KOUN*J

4) (WET .LE. 50) .OR. (HT .GE. 5.7)

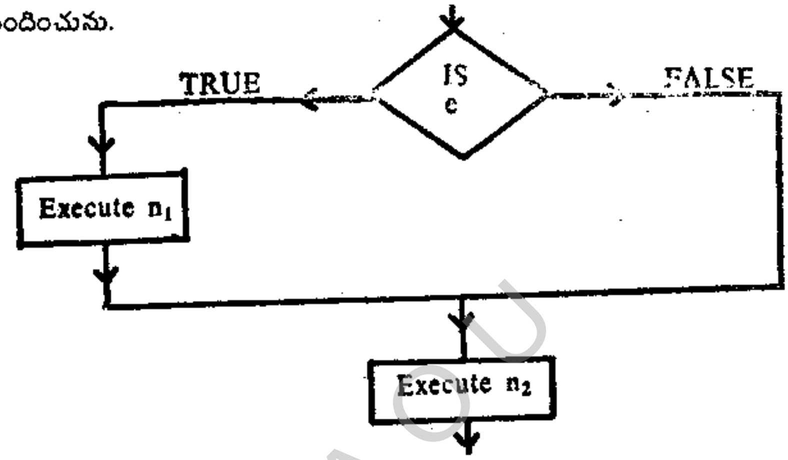
17.5.5 తార్కిక IF వాక్యము

'e' తార్కిక సమాసము, n_1, n_2 లు ఎక్జిక్యూటబుల్ వాక్యముల వాక్యపు సంఖ్యలు ఐన, తార్కిక IF వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము

IF (e) n_1
n_2

'n_1' వాక్యము మరియొక తార్కిక IF వాక్యముగానీ DO వాక్యముగానీ కాకూడదు. 'n_2' తార్కిక IF వాక్యము తర్వాత వచ్చు వాక్యము.

ఇప్పుడు తార్కిక IF వాక్యపు అర్థమును పరిశీలిద్దాం. 'e' విలువ .TRUE. అయినట్లయితే గణనయంత్రం మొదట 'n_1' వాక్యమును అమలుపర్చి, తర్వాత 'n_2' వాక్యమును అమలుపర్చును. 'e' విలువ .FALSE. ఐతే గణనయంత్రం 'n_1' ను అమలుపర్చకుండా 'n_2' వాక్యమును అమలుపర్చును. ఈ క్రింది క్రమచిత్రము సరియైన అవగాహన నందించును.



పటం – 4 : తార్కిక IF వాక్యపు క్రమచిత్రము.

'e' విలువ .TRUE. అయినపుడు 'n_1' వాక్యమును మాత్రమే అమలుపర్చాలి. 'n_2' వాక్యమును అమలుపర్చకూడనప్పుడు GO TO వాక్యమును ఈ క్రింది విధంగా ఉపయోగిస్తాం.

IF (e) GO TO n
n_2
⋮
n n_1

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 1 : 'F' ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచింపబడింది.

$$F = x^2 + 5x + 7, \quad x \le 10.5 \text{ ఐనప్పుడు}$$

$$= x^2 + 15, \quad x > 10.5 \text{ ఐనప్పుడు}$$

'F' ను గణనచేయుటకు సరియైన తార్కిక IF వాక్యము వ్రాయండి.

సాధన :

```
IF (X .LE. 10.5) F  =  X*X + 5.*X+7.
IF (X .GT. 10.5) F  =  X*X+15.
```

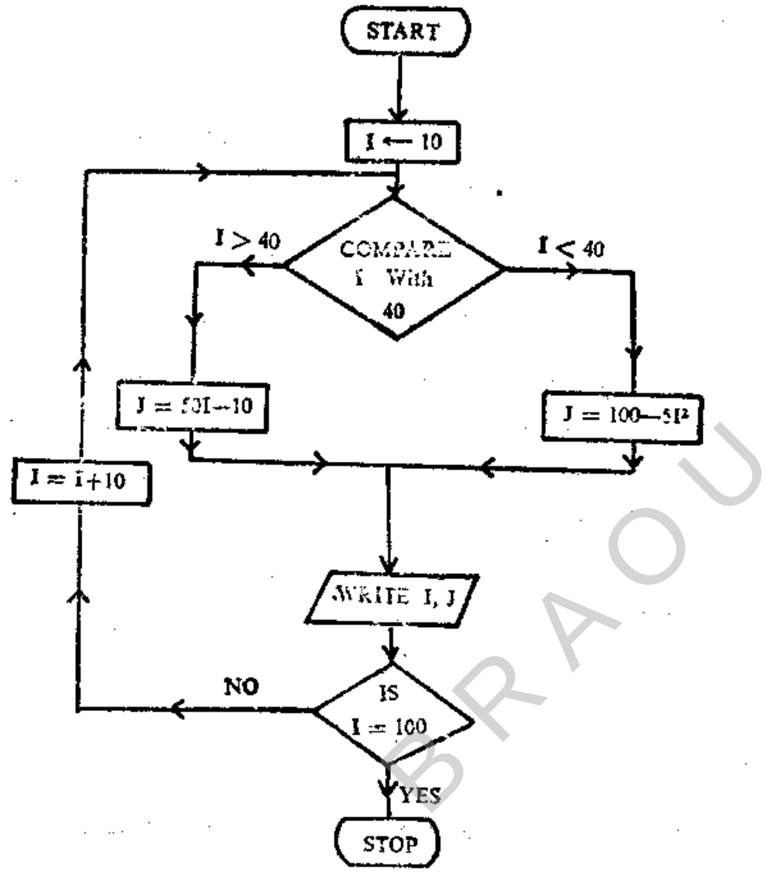
ఉదా *2* : I విలువలు 10 నుంచి 100 వరకు 10 పెరుగుదలతో తీసుకొని J ను ఈ క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించి గణనచేసి, ముద్రించుటకు తగిన గణనయంత్రం ప్రణాళిని వ్రాయండి.

$$J = 100 - 5I^2, \ I \le 40 \text{ అయినప్పుడు}$$

$$= 50I - 10, \ I > 40 \text{ అయినప్పుడు}$$

సాధన :

ఇచ్చట ప్రణాళి వ్రాయటానికి తార్కిక IF వాక్యము నుపయోగిద్దాం. క్రమచిత్రాన్ని పరిశీలించండి.



పటం − 5 : J విలువను కనుగొనుటకు వ్రాసిన క్రమచిత్రం.

ప్రణాళి 3 :

```
C      TO CALCULATE J
       I = 10
15     IF (I .LE. 40) J = 100-5*I*I
       IF (I .GT. 40) J = 50*I-10
       WRITE (9, 50) I, J
```

```
50  FORMAT (1Hb, I3, 5X, E15.8)
    IF (I .EQ. 100) STOP
    I = I+10
    GO TO 15
    END
```

17.5.6 గణిత GO TO వాక్యము (Computed GO TO)

గణిత GO TO వాక్యము నియమసహిత నియంత్రణ వాక్యము. పూర్ణాంక చలరాసి విలువనుబట్టి, ఇచ్చిన వాక్యముల సమితినుంచి ఒక వాక్యమును అమలుపర్చవలసి వచ్చినప్పుడు ఈ గణిత GO TO వాక్యమును వాడుతాము. $n_1, n_2, \ldots, n_k$ లు వాక్యపు సంఖ్యలు, 'i' పూర్ణాంక చలరాసి (సాదికాచలరాసి కాకుండా) పేరు ఐన, గణిత GO TO వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము.

$$\text{GO TO } \left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right), i$$

బ్రాకెట్లు, n ల మధ్య నున్న కామాలు మరియు 'i' కు ముందు ఉన్న కామా తప్పక ఉండవలెను. ఈ వాక్యము యొక్క అర్థము పరిశీలిద్దాం 'i' విలువలనుబట్టి (అంటే 1, 2, 3, 4 ...), బ్రాకెట్ల మధ్యన ఇవ్వబడిన వాక్యపు సంఖ్యలుగల వాక్యమును గణనయంత్రం అమలుపర్చును. అంటే i విలువ 1 అయినప్పుడు, 'n_1' వాక్యమును, i విలువ 2 అయినప్పుడు 'n_2' వాక్యమును .... అమలుపర్చును. ఎట్టి పరిస్థితులలో 'i' విలువ బ్రాకెట్ల మధ్య ఇవ్వబడిన మొత్తం వాక్యముల సంఖ్యకంటే ఎక్కువ ఉండరాదు. i విలువ సున్నగానీ, ఋణాత్మకముగానీ కాకూడదు. ఈ వాక్యమును పంచ్డ్ కార్డుమీద 7 నుంచి 72 వరకు గల నిలువువరుసల మధ్య ఎక్కడైనా పంచ్ చేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు ఈ క్రింది వాక్యమును పరిశీలించండి.

GO TO (10, 13, 30, 20, 5), I

ఇచ్చట I = 1 అయినప్పుడు '10' వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యమును అమలుపర్చును. I = 2 అయినప్పుడు '13' వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యమును, ... చివరగా I = 5 అయినప్పుడు '5' వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యమును గణన యంత్రం అమలుపర్చును.

ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదా *1* : M విలువ 2, 3 లేదా 4 అయినప్పుడు, '20' వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యమును అమలుపర్చును. M విలువ '1' అయినప్పుడు '40' వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యమును, M విలువ '5' అయినప్పుడు '60' వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యమును గణనయంత్రం అమలుపర్చును. దీనికి సరిపడు GO TO వాక్యము వ్రాయండి.

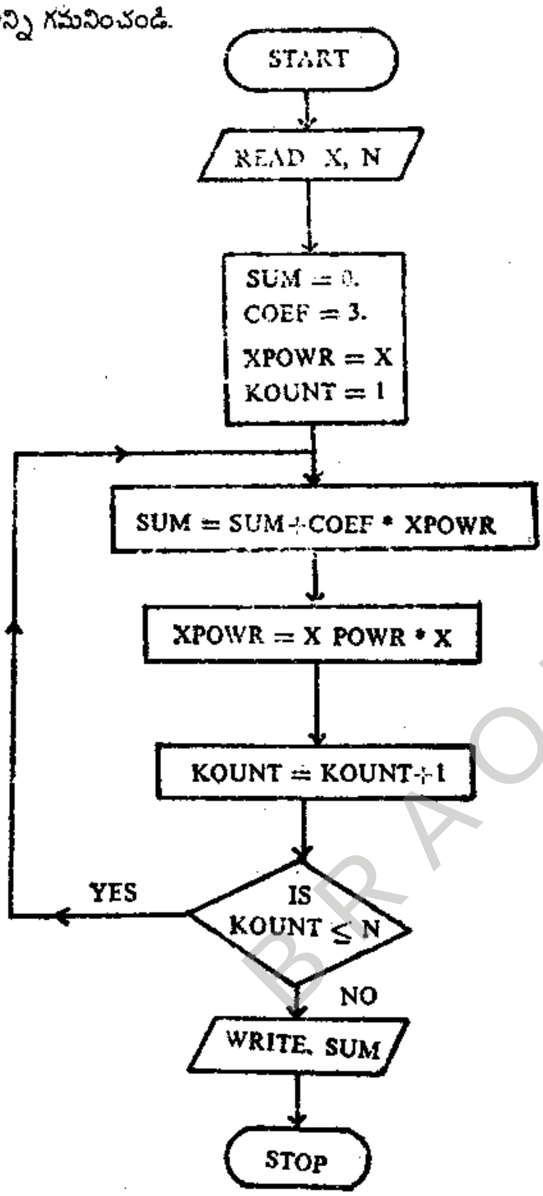
సాధన :

GO TO (40, 20, 20, 20, 60), M

ఉదా 2 : ఈ క్రిందనీయబడిన శ్రేణిలో 'N' పదముల మొత్తం కనుగొనుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి. అట్లాగే 20, 30, 40 పదముల మొత్తం కనుగొనుటకు పై ప్రణాళిని గణిత GO TO వాక్యమును విస్తృత పరచండి.

$$S = 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

సాధన : మొదట క్రమచిత్రాన్ని గమనించండి.



పటం – 6 :

ప్రణాళి 4 :

```
C       SUMMING SERIES
        READ (5, 6) X, N
      6 FORMAT (F6.2, 5X, I3)
        SUM = 0.
```

```
      COEF = 3.
      XPOWR = X
      KOUNT = 1
      NDEX = 0
12    SUM = SUM + COEF * XPOWR
      XPOWR = XPOWR * X
      KOUNT = KOUNT+1
      IF (KOUNT .LE. N) GO TO 12
      WRITE (9, 15) N, SUM
15    FORMAT (1Hb, I3, 5X, E15.8)
      NDEX = NDEX + 1
      GO TO (16, 17, 18, 19), NDEX
16    N = 20
      GO TO 12
17    N = 30
      GO TO 12
18    N = 40
      GO TO 12
19    STOP
      END
```

(ఇచట X మరియు N F6.2 మరియు 13 గా తీసుకున్నాం.)

17.6 పాదికా చలరాశులు

ఇంతవరకు మనకు వాస్తవ చలరాసులు, పూర్ణాంక చలరాసుల గురించి తెల్సు. ఇవి ఒకే అస్థిత్వము (Entity) కలవి. ఫోర్ట్రాన్ భాష పాదికా చలరాసులను కూడా అనుమతించును.

పాదికా చలరాసి అమరిక లేక కొన్ని పరిమాణముల సమూహమునకు సంబంధించినది. అమరికలోని అన్ని మూలకములను ఒకే పేరుతో సూచించవచ్చును. ఈ మూలకముల సమూహమును అమరిక అంటాం. అమరికలోని ప్రతి మూలకమును పాదికా చలరాసి అంటాం. ప్రతి మూలకమును ఆ అమరికలో అది ఉన్న స్థానమును బట్టి గుర్తిస్తాము.

కొన్ని పరిమాణముల సమూహమును ఒకే పేరుతో గుర్తించుట చాలా ఉపయోగము. ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులందరినీ STUD అనే ఒక చలరాసి పేరుతో పిలువవచ్చు. ఒక్కొక్క విద్యార్థిని STUD తర్వాత బ్రాకెట్లలో వేర్వేరు పాదికలు వ్రాయుటద్వారా గుర్తించవచ్చు. అంటే STUD (1), STUD(2), ... అని. మనము గణితశాస్త్రంలో ఒక బిందువు నిరూపకాలను X_1, X_2, X_3 అని సూచిస్తాం. ఫోర్ట్రాన్‌లో ఈ పరిమాణములను అమరిక X ద్వారా సూచిస్తాము. అమరిక X యొక్క మూలకములను X(1), X(2), X(3) అని సూచిస్తాం. ఈ అమరికను ఏక పరిమాణ అమరిక అంటాం. ప్రతి మూలకమును సూచించుటకు ఒక పాదిక చాలు. రెండు పాదికలు ఉంటే దానిని ద్వి పరిమాణ అమరిక అంటాం. మూడు పాదికలు ఉంటే దానిని త్రి పరిమాణ అమరిక అంటాం.

పాదికా చలరాసులు, మూడుకంటే ఎక్కువ పాదికలు కలిగియుండవచ్చు. అటువంటి వాటిని అనేక పరిమాణ అమరిక అంటాం. ఈ పాదికలన్నీ,కామాతో వేరుచేయబడి బ్రాకెట్లమధ్య ఉండును. ఎన్ని పాదికల వరకు ఉండవచ్చు అనేది మనము ఉపయోగించే గణనయంత్రం మీద ఆధారపడి యుండును.

ద్విపరిమాణ అమరికకు ఒక ఉదాహరణగా ఈ క్రింది మాత్రిక L ను చూపండి.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \end{bmatrix}$$

మాత్రిక L యొక్క మూలకములను ఫోర్ట్రాన్ భాషలో

L (1,1), L (1,2), L (1,3)

L (2,1), L (2,2), L (2,3) అని సూచిస్తాం.

పాదిక చలరాసి పేరు I, J, K, L, M, లేక N తో ప్రారంభమవుతే దానిని పూర్ణాంక పాదికా చలరాసి అంటాం. I, J, K, L, M, లేక N కాకుండా ఇతర అక్షరములతో ప్రారంభము అయిన దానిని వాస్తవ పాదికా చలరాసి అంటాం. ఉదాహరణకు STUD వాస్తవ పాదికా చలరాసి, L పూర్ణాంక పాదికా చలరాసి. పాదికా చలరాసి సాధారణ రూపము

W $(i, j, \ldots)$

$i, j, \ldots$ పాదికలు. 'W' పాదికా చలరాసి పేరు.

పాదికల నియమాలు

పాదిక ధనాత్మక (సున్నాకాకుండా) పూర్ణాంక స్థిరరాసి, లేక చలరాసి లేక సమాసము అయి ఉండవచ్చును. సమాసము అయినట్లయితే ఈ క్రింది రూపములలో మాత్రమే ఉండవలెను.

1. చలరాసి ± స్థిరరాసి

2. స్థిరరాసి * చలరాసి ± స్థిరరాసి

(చలరాసి, స్థిరరాసి పాదికా రాసులు కాకూడదు).

అంటే, L పాదికా రాసి కాని పూర్ణాంక చలరాసి, M మరియు N లు పూర్ణాంక స్థిరరాసులు అయిన పాదిక ఈ క్రింది రూపములలో ఉండవచ్చును.

L

M or N

L + M or L – M

M * L

M * L + N లేక M * L – N

a) కొన్ని సరియైన పాదికల ఉదాహరణలు.

J, L, 15, 5, K + 5, L – 10, 10* KOUN, 5 * INT, 25 * I – 6, 15 * LAMB – 7 మొదలగునవి.

b) కొన్ని సరికాని పాదికలు.

–5, 4.2, – I, 10 + I, 17 – M, J * 5, K*2–5, IN * 10 – 15 * I etc.

c) కొన్ని సరియైన పాదికా చలరాసులు.

VEL (J), K (5), KON (2*I, 5*I–15), AB (L+2, M + 5, KN),

NUM (4*N–3), MARKS (I), ARRAY (I, J, K) మొదలగునవి.

d) కొన్ని సరికాని పాదికా చలరాసులు.

VEL (–J*3), INK (A*5), J (0), MAT (0, B), Z (2.9, X, 5*J), W (–5, I, K * J – I * J) మొదలగునవి.

17.6.1 డైమన్షన్ వాక్యము

పాదికా చలరాసులను ఉపయోగించినపుడు, వీటికి సంబంధించిన సమాచారమును డైమన్షన్ వాక్యము ద్వారా అందజేస్తాం. అది ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము కాదు. ఇది పాదికా చలరాసుల పేర్లను, పరిమాణములను గణయంత్రమునకు అందజేయును. జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో ఎన్ని జ్ఞప్తి ప్రదేశాలు వీటికోసము ఉంచాలి అనే సమాచారమును అందించును. దీని సాధారణ రూపము

DIMENSION $q_1, q_2, \cdots$

$q_1, q_2, \ldots$ లు పాదికా చలరాసుల పేర్లు. వీటితోపాటు వెంబడే బ్రాకెట్లలో ఒకటి, రెండు లేక మూడు అనేకములైన గుర్తులేని పూర్ణాంక స్థిరరాసులు ఉండును. ఇవి పాదికలకు కావలసిన జ్ఞప్తి స్థలములను సూచించును. ఈ వాక్యమును 7 నుంచి 72వ నిలువు వరసలలో ఎక్కడైనా పంచ్ చేయవచ్చును.

ఉదాహరణలు

1. DIMENSION STUD (50), MARKS (50)
2. DIMENSION I(5, 10), J(10, 5), X (10)
3. DIMENSION KOUN (4, 4, 4), INT (10)
4. DIMENSION VEL (15), Z (5, 5), X (10)

ఈ క్రింది విషయాలు గుర్తుంచుకోవాలి.

1. ఒక డైమన్షన్ వాక్యములోనే ఎన్ని పాదికా చలరాసులైనా వ్రాయవచ్చు.

2. పాదికా చలరాసి ప్రణాళిలో వాడిన చోటుకంటే ముందుగా ఈ డైమన్షన్ వాక్యము వ్రాయవలెను. మామూలుగా ప్రణాళిలోని మొదటి వాక్యము డైమన్షన్ వాక్యము వ్రాయటము మంచిది.

3. ఒకటికంటే ఎక్కువ డైమన్షన్ వాక్యములు ప్రణాళిలో ఉండవచ్చు.

4. పాదికా చలరాసుల పేర్లు, ఫోర్ట్రాన్ అంగీకరించే సాధారణ ప్రమేయముల పేర్లు, ప్రణాళిలో ఉపయోగించిన చలరాసుల పేర్లు కాకుండా ఇతరములై ఉండాలి.

5. DIMENSION I (10, 5) అనగా I, ద్విపరిమాణ అమరిక అని మరియు పాదికలు 10 మరియు 5 కంటే ఎక్కువ విలువలు కల్గియుండవని అర్థము. ఈ వాక్యమువల్ల $10 \times 5 = 50$, జ్ఞప్తి ప్రదేశాలను అమరిక I కొరకు ఉంచును. జ్ఞప్తి యూనిట్‌లో ఉన్న జ్ఞప్తి ప్రదేశాల సంఖ్యను దృష్టిలో ఉంచుకొని డైమన్షన్ వాక్యము వ్రాయాలి. ఎట్టి పరిస్థితులలోనూ డైమన్షన్ వాక్యముచేత అడగబడిన జ్ఞప్తి ప్రదేశముల సంఖ్య, జ్ఞప్తి యూనిట్‌లోని మొత్తం జ్ఞప్తి ప్రదేశాల సంఖ్య కంటే ఎక్కువ ఉండరాదు.

6. పరిమాణ సంబంధమైన సమాచారమును, డైమన్షన్ వాక్యము ద్వారా అందజేయవచ్చును లేదా రూపము తెల్పు వాక్యము ద్వారానైనా ఈ క్రింది విధంగా తెలియపర్చవచ్చును.

INTEGER MARKS (50), STUD (50)

REAL I (10, 5), KAT (50)

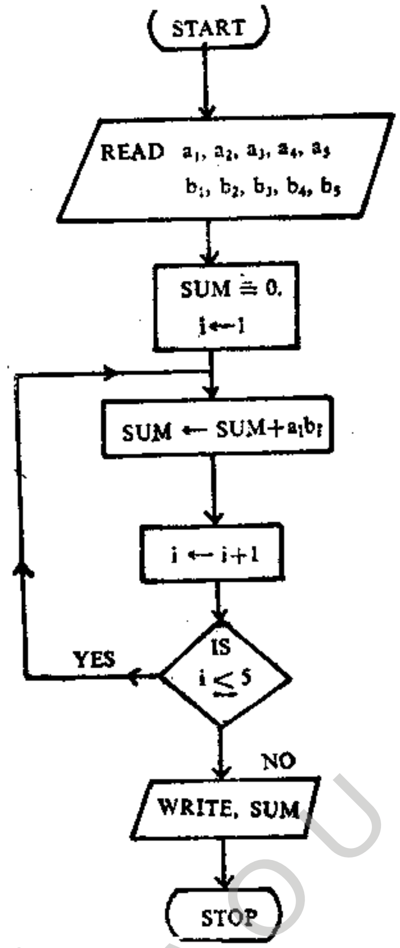
అంతేకానీ రెండు ఉపయోగించరాదు (డైమన్షన్ వాక్యము, రూపము తెల్పు వాక్యము).

పునరావృత గణనలలో ఈ పాదికా చలరాసుల ఉపయోగము ఎక్కువ. పాదికా చలరాసుల ప్రాముఖ్యత తెల్సుకునేందుకు DO వాక్యం నేర్చుకొన్న తరువాత కూడా పరిశీలిద్దాం.

ఉదా : A మరియు B సదిశల మూలకాలు a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 మరియు b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 లు 5F6.2 నిర్దేశకాలతో కార్డుకు 5 విలువల చొప్పున పంచ్ చేయబడ్డవి. $SUM = SUM + \sum_{i=1}^{5} a_i b_i$ సూత్రము నుపయోగించి అదిశాలబ్ధము కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

మొదట SUM విలువ సున్నాగా తీసుకుందాం. ప్రతిసారి $a_i b_i$ గణించి, దానిని SUM కు కలుపుదాము ($i \le 5$). $i > 5$ అయినప్పుడు SUM విలువను ముద్రించమని గణనయంత్రాన్ని అడుగుదాము. క్రమచిత్రాన్ని పరిశీలించండి.



పటం - 1 : అదిశా లబ్ధము కనుగొనుటకు క్రమచిత్రము.

ప్రణాళి :

```
C       TO CALCULATE SCALAR PRODUCT
        DIMENSION A (5), B (5)
        READ (5, 10) A (1), A (2), A (3), A (4), A (5)
      1 B (1), B (2), B (3), B (4), B (5).
10      FORMAT (5F6.2)
        SUM = 0.0
        I = 1
15      SUM = SUM + A (I) * B (I)
        I = I + 1
```

```
      IF (I. LE. 5) GO TO 15
      WRITE (9, 20) SUM
   20 FORMAT (1Hb̸, 4HUSM =,  E15.8)
      STOP
      END
```

17.7 ప్రణాళి సంబంధిత తప్పులు

కొన్నిసార్లు మూల ప్రణాళిలో సరికాని FORMAT నిర్దేశకాలు, సరికాని అంకగణిత సమాసములు ఉండవచ్చును. ప్రణాళిని అమలుపర్చక పూర్వమే ఇటువంటి తప్పులను గుర్తించి తొలగించాలి.

మూడు రకాల తప్పులు సాధారణంగా చేస్తూ ఉంటాం. 1. సంకలన తప్పులు 2. ఎక్సిక్యూషన్ తప్పులు 3. తార్కిక తప్పులు. ఒకవేళ సంకలన తప్పులను మనము గుర్తించలేకపోయిన, గణనయంత్రం వీటిని గుర్తించి తప్పులపట్టికను మనకు అందించును. సున్నాచే భాగహారము, తప్పు FORMAT నిర్దేశకములు ఇవ్వటము మొదలగు తప్పులవల్ల ప్రణాళి అమలుపర్చునపుడు అవి అమలుపర్చకుండా ఆపివేయును. ప్రణాళి రచనలో అనుభవము మీద ఇటువంటి ఎక్సిక్యూటబుల్ తప్పులను కనుగొనవచ్చును. గణనయంత్రం తార్కిక తప్పులను కనిపెట్టలేదు. అందువల్ల మనకు వచ్చే ఫలితాలు తప్పులతో కూడుకొని ఉండును. కొన్ని వాక్యములను వదిలివేయుట, తప్పుడు సూత్రముల నుపయోగించుట, అన్ని నియమాలను పరిశీలించక పోవుట మొదలగునవి తార్కిక తప్పులు. ఇటువంటి తప్పులు అన్నీ కనిపెట్టటం అనుభవం మీద వచ్చును. ఈ తప్పులు కనిపెట్టుటను డీబగ్గింగ్ అంటాం.

గణనయంత్రంలో ప్రతి అంకగణిత పరిక్రియకు కొంత సమయము పట్టును. వీలైతే కొన్ని అంకగణిత పరిక్రియలను తగ్గించగల్గితే కొంత గణనయంత్రం కాలమును ఆదా చేయగల్గుతాము. తక్కువ వ్యవధిలో ప్రశ్నలకు సాధనలను రాబట్టుట ప్రణాళి రచయిత యొక్క నేర్పుమీద ఆధారపడియుండును. గణనయంత్రం సమయమును తగ్గించుటకు కొన్ని విషయాలు ఈ క్రింద నీయబడినవి.

1. సాధ్యమైతే పరిక్రియలను తగ్గించటానికి ప్రయత్నించాలి. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది బహుపదిని పరిశీలించండి.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{ లో}$$

ప్రతి పదము విలువ కనుగొని, కలుపుకుంటూ పోతే, $n(n+1)/2$ గుణకారములు మరియు n కూడికలు అవసరము. హార్నర్ పద్ధతి ప్రకారము బ్రాకెట్ల నుపయోగిస్తే, పై బహుపదిని

$$P_n(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x\left(a_3 + \ldots x\left(a_{n-1} + xa_n\right)\right)\right)\right)$$

ఈ పద్ధతి ప్రకారము ఐతే 'n' గుణకారములు $\left(n(n+1)/2 \text{ కంటే తక్కువ}\right)$ 'n' కూడికలు మాత్రమే అవసరము.

2. వీలైతే భాగహారములను, ఘాతికీకరణములను తగ్గించటానికి ప్రయత్నించాలి. ఎందుకంటే చాలా గణన యంత్రాలు భాగహారమునకు, ఘాతికీకరణకు కూడికలు, తీసివేతలకు పట్టే సమయంకంటే ఎక్కువ సమయం పట్టును. ఉదాహరణకు $\left(b^2-4c\right)/2a$ ను

(B * B–4.0 * A * C)/(A + A) గా వ్రాయాలి గానీ (B **2 – 4. * A * C)/(2.*A) గా కాదు.

అట్లాగే z^3 ను Z * Z * Z గా వ్రాయాలిగానీ Z ** 3 గా కాదు.

3. ఒకే సమాసము ఒకే ప్రణాళిలో అనేకసార్లు గణనచేయుటను తీసివేయాలి. ఉదాహరణకు

ROOT 1 = (–B + SQRT (B * B – 4.0 * A * C)/(A + A) ను

G = A + A, H = –B/G

DISC = SQRT (B * B – 4.0 * A * C)/G

ROOT 1 = H + DISC

ROOT 2 = H – DISC

4. సాధారణ ప్రమేయములను పునరావృతం కాకుండా చూడాలి. ఉదాహరణకి

$$T = 15 \sin^4 (x) + 7 \sin^3 x - 12 \sin^2 (x) \text{ ను}$$

ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయాలి.

S = SIN (X)

T = ((15.0 * S + 7.) *S – 12.) *S*S.

5. గణనయంత్రంలో భద్రపరచబడిన లైబ్రరీ ప్రమేయములను అవసరమున్నప్పుడల్లా ఉపయోగించాలి. ఉదాహరణకు SQRT (X), X ** 0.5 కంటే తక్కువ సమయములో ఫలితములను అందించును.

6. వీలైనప్పుడల్లా ఘాతము పూర్ణాంకము అయితే మంచిది. ఉదాహరణకి A ** 5 కు X ** 5 కంటే తక్కువ సమయము పట్టును.

7. దత్తాంశము ఒకే తరగతికి (పూర్ణాంకము లేదా వాస్తవము) చెందితే మంచిది. ఉదాహరణకు

R = S * 4.0* P/(B + 5.) ను R = S * 4 * P/(B + 5) కంటే తక్కువ కాలములో అమలుపర్చును.

ఇదే విధంగా కొన్ని విషయాలు గుర్తుపెట్టుకొని, మరియు అనుభవముమీద గణనయంత్రం సమయము తగ్గించగల్గుతాము.

17.8 DO వాక్యము

కొన్ని ఆదేశాలను మరల మరల అమలుపర్చాలన్నా, ప్రణాళి మొత్తంను వివిధ విలువలతో అనేక పర్యాయములు అమలుపర్చాలన్నా, సాధారణ వరుసక్రమము మార్చాలన్నా ఉపయోగించే నియంత్రణ వాక్యాల గురించి నేర్చుకున్నాం. అక్కడ నియమరహిత GO TO వాక్యము, నియమరహిత IF వాక్యముల గురించి చర్చించాము.

ఫోర్ట్రాన్‌లో ఉన్న మరియొక మిక్కిలి ఉపయోగకరమగు నియంత్రణ వాక్యము DO వాక్యము. కొద్దిపాటి ఆదేశాలను అనేక పర్యాయములు, అనేక విలువలతో అమలుపర్చుట ద్వారా చాలా వరకు ప్రశ్నలను గణన యంత్రం ద్వారా సాధించవచ్చు. ఇటువంటి సందర్భాలలో DO వాక్యమును ఉపయోగించి ప్రణాళిని కుదించ వచ్చును. ఇప్పుడు DO వాక్యము గురించి మరియు ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యములలో DO వాక్యములాంటి సంకేతాల ఉపయోగము గురించి తెల్సుకుందాం.

DO వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము

DO $n \quad i = m_1, m_2, m_3$

....

....

n ....

n = ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము యొక్క వాక్యపు సంఖ్య

i = పాదికా చలరాసి కాని పూర్ణాంక చలరాసి

m_1, m_2, m_3 లు సున్నాకంటే ఎక్కువ విలువలు కలిగిన పూర్ణాంక స్థిరాంకాలు లేదా చలరాసులు.

m_3 లేని ఎడల దాని విలువ '1' గా తీసుకుంటాం. కనుక DO వాక్యము యొక్క మరియొక రూపము.

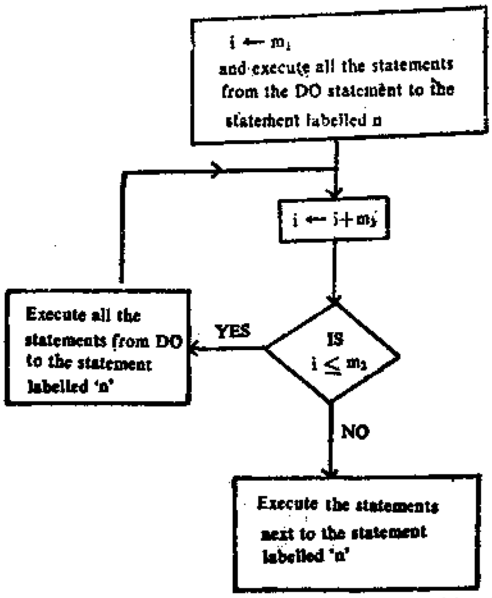
DO $n \quad i = m_1, m_2$

....

....

n ....

DO వాక్యమును 7 నుంచి 72 వ నిలువు వరుసల మధ్య పంచ్ చేస్తాం. ఇప్పుడు DO వాక్యము యొక్క అర్థాన్ని పరిశీలిద్దాం. DO వాక్యము నుంచి 'n' వాక్యము వరకు గల వాక్యముల నన్నింటిని అమలుపర్చుటకు ఆజ్ఞ. ఈ వాక్యముల సమూహమును DO ప్రదేశము అంటాం. ఈ వాక్యమువల్ల గణనయంత్రం 'i' కు మొదట 'm_1' విలువను ఇచ్చును. DO ప్రదేశములోని ఆదేశాలనన్నింటిని అమలుపర్చును. ఇప్పుడు 'i' విలువకు 'm_3' కలపబడి m_2 తో పోల్చబడుతుంది. విలువ m_2 కంటే ఎక్కువ అయిన, నియంత్రణ DO ప్రదేశము దాటి బైటకు వచ్చును. కనుక m_2 కంటే తక్కువ విలువలన్నింటికి DO ప్రదేశము అమలుపర్చబడుతుంది. m_3 లేకపోతే, ప్రతిసారి '1' కలపబడుతుంది. సరియైన అవగాహనకు ప్రక్క పేజీలోని క్రమచిత్రాన్ని పరిశీలించండి. ప్రణాళిలో DO వాక్యముచే నియంత్రణ చేయబడిన లూప్‌ను DO లూప్ అంటాం.



పటం - 8 : DO వాక్యము యొక్క అర్థము తెల్పు క్రమచిత్రం.

ఉదాహరణకు ఈ క్రింది DO వాక్యమును తీసుకోండి

DO 10 J = 1, 25, 5

మొదట J విలువ 1 గా తీసుకొనును. ఈ విలువతో '10' వాక్యము వరకుగల వాక్యములన్నింటిని అమలుపర్చును. '10' వాక్యమును అమలుపర్చిన తర్వాత మరలా మొదటి DO వాక్యము దగ్గరకు వచ్చును. ఇప్పుడు J విలువ, ముందర విలువ + 5 అగును. అనగా J విలువ 6 అగును. దీనిని 25 తో పోల్చును. 25 కంటే తక్కువ అయినపుడు మళ్ళీ '10' వాక్యము వరకుగల వాక్యముల నన్నింటిని అమలుపర్చును. ఈ విధంగా చేస్తూ పోతుంది. చివరగా J = 21 అయినప్పుడు అన్ని వాక్యములు '10' తర్వాత వాక్యమును అమలుపర్చును. ఎందుకనగా తర్వాత J విలువ 21 + 5 = 26 > 25 కాబట్టి.

కొన్ని సరియగు DO వాక్యములు

1. DO 50 I = 1, 155, 3
2. DO 5 IR = L, M, N
3. DO 44 KOUN = 1, 12
4. DO 25 NUM = N, M
5. DO 125 IRPT = 5, MN, ML

కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 1 : ఈ క్రింది సూత్రము నుపయోగించి Dను కనుగొనుటకు ప్రోగ్రామ్ వ్రాయండి.

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right)$$

సాధన :

ఇచ్చట $(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), i = 1, 2, \ldots N$ కనుగొని అన్ని కలపాలి. కనుక DO వాక్యము వాడుతాము.

ప్రణాళి 1 :

```
C      TO CALCULATE    D USING DO STATEMENT
       DO 10 I = 1, N
       READ (5, 2) X, Y, Z
     2 FORMAT (3F8.3)
       TERM = SQRT (X*X + Y*Y + Z*Z)
    10 D = D + TERM
       WRITE  (9, 12) N, D
    12 FORMAT (1Hb, I5, 5X, E15.8)
       STOP
       END
```

ఉదా 2 : పాదికా చలరాసి C_i ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించబడింది.

$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$, i 1 నుంచి 10 వరకు గల సరిసంఖ్య అయినప్పు డు

$= \sqrt{4A_i + 10B_i}$, i 1 నుంచి 10 మధ్యగల బేసిసంఖ్య అయినప్పుడు

C_i కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

ఇచట పాదికాచలరాసులు A (I), B (I), C (I)లు ఉపయోగిద్దాం. అందువలన డైమన్షన్ వాక్యము ఉపయోగించాలి. ఇచట సరిసంఖ్యలకు C_i కనుగొనుటకు ఒక DO వాక్యము, బేసి సంఖ్యలకు C_i కనుగొనుటకు మరియొక DO వాక్యము ఉపయోగిస్తాం. ప్రణాళి ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

ప్రణాళి 2 :

```
C      TO CALCULATE C(I)
       DIMENSION A (10), B (10), C (10)
       READ (5, 2) A(1), A(2), A(3), A(4), A(5), A(6), A(7), A(8), A(9), A(10)
     2 FORMAT (5F7.2)
       READ (5, 2) B (1), B (2), B (3), B (4), B (5), B (6), B (7), B (8), B (9), B (10)
```

```
C       TO GET EVEN C (I)
        DO 4  I = 2, 10, 2
      4 C (I) = SQRT (A (I) * A (I) + B (I) * B (I))
C       TO GET ODD C (I)
        DO 6  I = 1, 10, 2
      6 C (I) = SQRT (4. * A (I) + B (I))
        WRITE (9, 8) C (1), C (2), C (3), C (4), C (5), C (6), C (7), C (8), C (9), C(10)
      8 FORMAT (1Hb, 5E15.8)
        STOP
        END
```

ఉదా 3 : X విలువలు 1.0 నుంచి 10.0 వరకు 0.05 పెరుగుదులతో, ఈ క్రింది సూత్రము నుపయోగించి F విలువలు కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

$$F = \frac{\sin x}{e^x - \cos x}$$

సాధన :

'i' పొదికా చలరాసి కాకుండా పూర్ణాంక చలరాసి అవ్వవలెను. ఇచట $i = x$ మరియు m_1, m_2, m_3 లు 1.0, 10.0 మరియు 0.05. కనుక ప్రణాళిలో DO వాక్యము

DO 10 X = 1.0, 10.0, 0.05

వ్రాసిన గణనయంత్రం అంగీకరించదు, కనుక X బదులు IX తీసుకుందాం. మరియు X = IX/100.0 గా మరియు $m_1 = 100$, $m_2 = 1000$, $m_3 = 5$ గా తీసుకొని DO వాక్యమును ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తే మనకు కావలసిన X విలువలు 1.0, 1.05, 1.10 ... వచ్చును.

```
DO 10 IX = 100, 1000, 5
X = IX/100.0
```

ప్రణాళి 3 :

```
C       CALCULATION OF F
        DO 10 IX = 100, 1000, 5
        X = IX/100.0
        F = SIN (X)/(EXP (X) - COS (X))
```

```
10  WRITE (9, 15) X, F
15  FORMAT (1Hb, 5X, F6.2, 5X, E15.8)
    STOP
    END
```

DO వాక్యము వ్రాయునపుడు పాటించవలసిన నియమాలు కొన్ని కలవు. ఇప్పుడు వాటి గురించి తెల్సుకుందాం.

17.8.1 DO వాక్యము వ్రాయునపుడు పాటించవలసిన నియమాలు

1. DO ప్రదేశము యొక్క మొదటి మరియు ఆఖరి వాక్యము నాన్ ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము కారాదు. అంటే డైమన్షన్ వాక్యము, FORMAT వాక్యము మొదలగునవి.

2. DO ప్రదేశములో ఆఖరి వాక్యము GO TO, STOP, PAUSE, అంకగణిత IF, DO వాక్యముగానీ, తార్కిక IF వాక్యముకానీ కారాదు.

3. పై వాక్యములలో ఒకటి చివర వాక్యముగా రావలసి రావటము తప్పని సరి అయిన పరిస్థితులలో CONTINUE వాక్యము అనే నిరర్థక వాక్యమును ఉపయోగిస్తాము. సాధారణంగా DO లూప్‌లో చివర ఉండే ఈ ఎక్సిక్యూటబుల్ వాక్యము యొక్క సాధారణ రూపము.

CONTINUE

ఉదాహరణకు 100 మూలకాలుగల X అను ఒక ఏక పరిమాణ అమరికను తీసుకోండి. మూలకాల లబ్ధము కావాలనుకుందాం. ఇందుకోసం, ముందుగా ఈ మూలకాలలో ఏదైనా ఒకటి సున్నాయేమో పరీక్షించాలి. ఏదైనా సున్నా అయితే, లబ్ధము సున్నా అవుతుంది. పై చర్యలకు సరిపడు వాక్యములు

```
    DO 10 I = 100
10  IF (A (I) .EQ. 0.0) GO TO 15
15  PROD = 0.
```

ఇక్కడ DO ప్రదేశములో ఆఖరి వాక్యము తార్కిక IF వాక్యము. కనుక గణనయంత్రం అంగీకరించదు. అందువల్ల CONTINUE వాక్యము ఉపయోగిస్తాము.

```
    DO 10 I = 1, 100
    IF (A(I).EQ. 0.0) GO TO 15
10  CONTINUE
15  PROD = 0.
```

CONTINUE వాక్యమును 7 నుంచి 72 నిలువు వరుసల మధ్యన పంచ్ చేస్తాము.

4. సూచిక 'i' మరియు సూచికా పరామితులు m_1, m_2, m_3 లను DO ప్రదేశములో మరియొక వాక్యముచే మార్చుటకు వీలులేదు. DO ప్రదేశములోని వాక్యములన్నింటిని అమలుపర్చునంతవరకు 'i' విలువ అట్లాగే ఉండును.

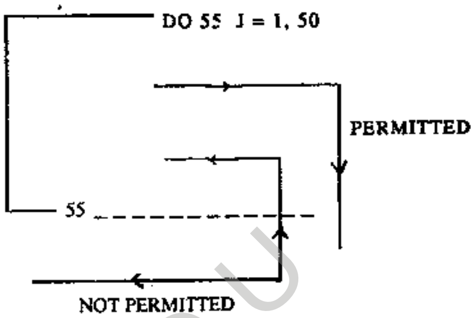
5. m_1, m_2, m_3 సూచికా పరామితులుగాకల DO వాక్యము యొక్క పునావృతముల సంఖ్య 'r',

$$r = 1 + (m_2 - m_1)/m_3.$$

ఇక్కడ $(m_2 - m_1)/m_3$ ను పూర్ణాంక మోడ్‌లో గణనచేయును. (అంటే, భిన్నాంకమును వదిలివేయును.)

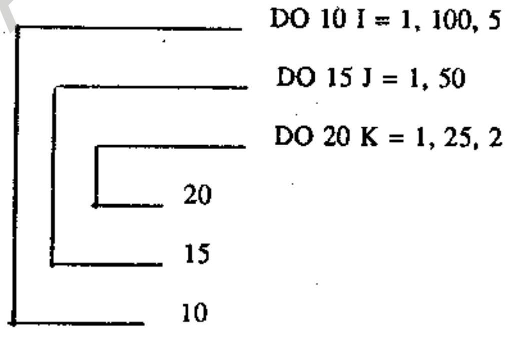
ఉదాహరణకు, $m_1 = 1, m_2 = 10$ మరియు $m_3 = 2$ అయిన $r = 1 + 9/2 = 1 + 4 = 5$.

6. DO ప్రదేశములో ఉన్న వాక్యములన్నింటిని 'r' సార్లు అమలుపర్చిన తర్వాత, DO ప్రదేశమునుంచి బయటకు వచ్చి మొదట వాక్యమును అమలుపర్చును. ఈ నిష్క్రమణను సాధారణ నిష్క్రమణ అంటాం. DO ప్రదేశములోని నియంత్రణ వాక్యము ద్వారా నియంత్రణను DO ప్రదేశము బయటకు బదిలీ చేయవచ్చును. దీనిని అసాధారణ నిష్క్రమణము అంటాం. సాధారణ నిష్క్రమణలో 'i' విలువ DO ప్రదేశము బయట మళ్ళా నిర్వచించాలి. అసాధారణ నిష్క్రమణలో 'i' విలువ, DO ప్రదేశములో చివరగా పొందిన విలువే ఉండును. నియంత్రణ బదిలీ DO ప్రదేశము లోపలి నుండి బయటకు అనుమతించును కానీ బయటనుంచి DO ప్రదేశమునకు లోపలికి నియంత్రణ బదిలీ అనుమతించదు.

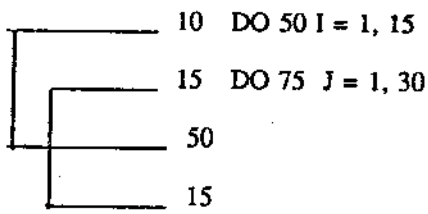


7) ఒక DO లూప్ లోపల ఇతర DO లూప్‌లుకూడా ఉండవచ్చును. ఒక DO లూపు ప్రదేశము మరియొక DO లూప్ ప్రదేశమును దాటరాదు, దానిలోపలే ఉండవలెను. ఇటువంటి DO ల సమూహమును నెస్టెడ్ DO లు అంటాం.

ఈ క్రింది ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.



ఒక DO ప్రదేశము ఇంకొక DO ప్రదేశమును దాటరాదు. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది పటమును గ్రహించండి.



ఇచ్చట 10 వాక్యపు సంఖ్యగల DO వాక్యము 50 వాక్యపు సంఖ్యగల వాక్యము వరకుగల వాక్యముల నన్నింటిని 15 సార్లు అమలుపేర్చమని ఆజ్ఞనిచ్చును. ఈ విధంగా అమలుపర్చునపుడు నియంత్రణ 15 వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యము దగ్గరకు వచ్చును. ఇది మరియొక DO వాక్యము. ఈ వాక్యము, 50 వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యము తర్వాతకల 75 వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యము వరకు గల వాక్యములన్నింటిని 30 సార్లు అమలుపర్చమని ఆజ్ఞనిచ్చును. నియంత్రణ '50' వాక్యము అమలుపర్చగానే, మొదటి DO వాక్యము ననుసరించి, నియంత్రణను '10' వాక్యము దగ్గరకు పొమ్మని ఆజ్ఞాపించును, కానీ రెండవ DO వాక్యము ననుసరించి '75' వ వాక్యముదాకా అమలుపర్చుకుంటూ పోవాలి. అందువల్ల గణనయంత్రం ఇటువంటి పరిస్థితిని అంగీకరించదు.

రెండుకానీ అంతకంటే ఎక్కువ DO ప్రదేశముల యొక్క చివరి వాక్యము ఒకటే అవ్వవచ్చును. ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి. ఇచట మూడు DO ప్రదేశముల యొక్క చివరి వాక్యము ఒకటే.

```
      DO 10 I = 1, 15
      DO 10 J = 1, 5
      DO 10 K = 1, 10
      ......................
      ......................
      ......................
      ......................
10    ......................
```

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 1 : A మరియు B అను రెండు ఏక పరిమాణ అమరికలు ఒక్కొక్కటి 10 మూలకాలను కలిగియున్నవి. A మరియు B ల మూలకాలు F15.6 నిర్దేశకంతో కార్డులమీద పంచ్ చేయబడినవి అనుకొని, A, B ల మొత్తము, ఏకపరిమాణ అమరిక 'C' ను కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

ఇచట మనము పాదికా చలరాసులు A, B మరియు C లను ఉపయోగిస్తున్నాం కనుక DIMENSION వాక్యముకూడా వ్రాయాలి. A, B ల మూలకముల విలువలను గణనయంత్రమునకు అందించుటకు DO వాక్యము ఉపయోగిద్దాం.

ప్రణాళి 4 :

```
C     TO FIND THE SUM OF A AND B
      DIMENSION A (10), B (10), C (10)
      DO 10 I = 1, 10
10    READ (5, 15) A (I)
15    FORMAT (F15.6)
      DO 20 I = 1, 10
```

```
20  READ (5, 15) B (I)
    DO 25 I = 1, 10
    C (I) = A (I) + B (I)
25  WRITE (9, 35) I, C (I)
35  FORMAT (1Hb, I3, 5X, E15.8)
    STOP
    END
```

ఉదా 2 :

$$W = \frac{911.8}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}}$$

$$m = 2, 3, 4, 5, \ldots 50$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots (m-1)$$

వివిధములైన m, n ల విలువలకు వచ్చు W విలువలను గణించి పట్టికను తయారుచేయుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

ఇచట DO ప్రదేశముల చివరి వాక్యము ఒకటేగల రెండు DO వాక్యములను ఉపయోగిస్తాం.

ప్రణాళి 5 :

```
C       CALCULATION OF W
        DO 15 M = 2, 50
        K = M - 1
        DO 15 N = 1, K
        W = 911.8/(1./ (N * N) - 1./(M * M))
   15   WRITE (9, 20) M, N, W
   20   FORMAT (1Hb, I5, 5X, I5, 5X, E15.8)
        STOP
        END
```

17.9 ఉత్పాదక – ఉత్పాదిత వాక్యములో ఉపయోగించు DOలాంటి సంకేతాలు

అమరికలను గణనయంత్రమునకు అందించాలన్నా, గణనయంత్రం అమరికలను ముద్రించాలన్నా ప్రణాళిలో DO లాంటి సంకేతాలను ఉపయోగించుతాము. ఇవి చాలా ఉపయోగము.

ఉదాహరణకు మూలకములు A (I) అనుకొందాం. గణన యంత్రమునకు అందించటానికి ఈ క్రింది DO వాక్యము ఉపయోగించాం అనుకొందాం.

```
      DO 10 I = 1, 10
10    READ (5, 15) A (I)
15    FORMAT (F15.6)
```

ప్రతి READ వాక్యమునకు ఒక దత్తాంశ కార్డు ఉండాలి కాబట్టి, ఇచట ఒక్కొక్క కార్డుమీద ఒక్కొక్క A (I) విలువ చొప్పున 10 దత్తాంశ కార్డులు కావాలి. ఒక కార్డుద్వారా అందించటానికి పట్టే గణనయంత్రం సమయముకంటే ఇచట 10 రెట్లు గణనయంత్రం సమయము పట్టును.

ఒకేకార్డు నుంచి అన్ని విలువలను గణనయంత్రమునకు అందించాలంటే ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

```
      READ (5, 25) A (1), A (2), A (3), A (4), A (5), A (6), A (7), A (8), A (9), A (10)
25    FORMAT (10F15.6)
```

అమరికలోని మూలకాలు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు, మూలకాలన్నింటిని READ వాక్యములోని జాబితాలో వ్రాయుట కష్టము.

10 కార్డుల అవసరము లేకుండా, పై విధంగా జాబితాలో అన్ని మూలకాలు వ్రాయనవసరంలేకుండా, DO వాక్యము చెయ్యగల పనిని చేయగల, READ వాక్యమును ఫోర్ట్రాన్ అనుమతించును. ఈ వాక్యము ఈ క్రింది విధంగా ఉండును.


```
      READ (5, 15) (A (I), I = 1, 10)
15    FORMAT (10F15.6)
```

పై వాక్యముల వల్ల గణనయంత్రం ఒక రికార్డులో పంచ్ చేయబడిన 10 విలువలను గ్రహించి A (1), A (2), A (3), ..., A (10) కు ఆపాదించును. 10 విలువలు ఒకే కార్డులో పంచ్ చేయలేకపోయిన, తర్వాత రికార్డులలో పంచ్ చేయవచ్చును. 10 విలువలను గ్రహించే వరకు కార్డులను చదువును. పై READ వాక్యమును అంతర్గత DO ఉత్పాదక జాబితాకల READ వాక్యము అంటాం.

ఉదాహరణకు సరిసంఖ్య స్థానములో ఉన్న A యొక్క మూలకాల విలువలను గణనయంత్రమునకు అందించాలంటే (A (2), A (4), A (6), A (8) మరియు A (10)), READ వాక్యము ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తాం.

READ (5, 15) (A (I), I = 2, 10, 2)

15 FORMAT (5F15.6)

అదే విధంగా బేసి సంఖ్య స్థానంలో ఉన్న A యొక్క మూలకాల విలువలు గణనయంత్రమునకు అందించాలంటే (A (1), A (3), A (5), A (7), మరియు A (9)), READ వాక్యము ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తాం.

READ (5, 15) (A (I), I = 1, 10, 2)

15 FORMAT (5F15.6)

ఒకటి కంటే ఎక్కువ అమరికలను READ వాక్యములోని జాబితాలో వ్రాయవచ్చును. ఉదాహరణకు

READ (5, 30) (A (I), B (I), I = 1, 10)

30 FORMAT (20F15.6)

పై వాక్యము కార్డు మీద పంచ్ చేయబడిన విలువలను వరుసగా A (1), B (1), A (2), B (2), ..., A (10), B (10) లకు ఆపాదించును.

పాదికా చలరాసులుగల DO జాబితా ఈ క్రింది రూపములో ఉండును.

$\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, i = m_1, m_2, m_3\right)$

$q_1, q_2, \ldots, q_k$ లు పాదికా చలరాసులు లేక చలరాసులు.

'i' – పాదికా చలరాసికాని పూర్ణాంక చలరాసి పేరు.

m_1, m_2, m_3 లు పూర్ణాంక స్థిరరాసులు లేక పాదికా చలరాసి కాని పూర్ణాంక చలరాసులు.

కొన్ని ఉదాహరణలు

1) READ (5, 60) (A (I), B (I), C (I), I = 1, 50)

2) READ (5, 25) M, (X (I), Z (I), I = 1, M)

3) READ (5, 100) L, (R (M), M = 1, L), N, (S (I), I = 1, N)

ద్విపరిమాణ అమరికలను కూడా ఇటువంటి READ వాక్యమును ఉపయోగించవచ్చు. పాదికా చలరాసులుగల అంతర్గత DO జాబితా ఈ క్రింది రూపములో ఉండును.

$\left(\left(q_1, q_2, \ldots q_k, i = m_1, m_2, m_3\right), q_1', q_2', \ldots q_n', i = l_1, l_2, l_3\right)$

$q_1, q_2, \ldots q_k, q_1', q_2', \ldots, q_n'$ – పాదికా చలరాలసులు లేక మామూలు చలరాసులు.

$i, m_1, m_2, m_3, j, l_1, l_2, l_3$ లు క్రిందటి ఉదాహరణలో లాగా.

ఉదాహరణకు,

READ (5, 50) ((A (I, J), I = 1, 10), J = 1, 5)

50 FORMAT (10F8.3)

కార్డు మీద పంచ్ చేయబడిన విలువలను వరుసగా

A (1, 1) A (2, 1) A (3, 1) ...... A (10, 1)

A (1, 2) A (2, 2) A (3, 2) ...... A (10, 2)

⋮

A (1, 5) A (2, 5) A (3, 5) ...... A (10, 5)

ఈ క్రింది వాక్యమును పరిశీలించండి.

WRITE (9, 15) ((A (I, J), B (I, J), I = 1, 5)), J = 1, 2)

15 FORMAT (1H ƀ, (10F15.8))

పై వాక్యము ననుసరించి గణన యంత్రం ఒక లైనుకు 10 విలువల చొప్పున ఈ క్రింది క్రమములో చలరాసుల విలువలను ముద్రించును.

A (1, 1) B (1, 1) A (2, 1) B (2, 1) ...... A (5, 1) B (5, 1)

A (1, 2) B (1, 2) A (2, 2) B (2, 2) ...... A (5, 2) B (5, 2)

త్రిపరిమాణ అమరికలకు కూడా పై విధంగా అంతర్గత DO జాబితాలు గల READ లేదా WRITE వాక్యముల నుపయోగించవచ్చును. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది వాక్యము

READ (5, 100) (((A (I, J, K), I = 1, 10), J = 1, 2), K = 1, 2)

100 FORMAT (10F8.5)

కార్డుమీద పంచ్ చేయబడిన విలువలు వరుసగా ఈక్రింది విధముగా చలరాసులకు ఆపాదించును.

A (1, 1, 1) A (2, 1, 1) ...... (A (10, 1, 1)

A (1, 2, 1) A (2, 2, 1) ...... A (10, 2, 1)

A (1, 1, 2) A (2, 1, 2) ...... A (10, 1, 2)

A (1, 2, 2) A (2, 2, 2) ...... A (10, 2, 2)

సూచన : READ వాక్యపు జాబితాలోని సూచికలు $(m_1, m_2, m_3$ లు$)$ చలరాసులు కావచ్చు. చలరాసులు అయినప్పుడు వాటిని మొదటిసారిగా ఉపయోగించకముందే వాటిని నిర్వచించవలెను. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది వాక్యము సరియైనది.

READ (5, 16) (A (I), I = J, K)

కావాలంటే J, K లు ముందుగా నిర్వచింపబడాలి. DO వాక్యమునకు ఉన్న నియమాలన్నీ కూడా ఈ అంతర్గత DO జాబితాగల READ, WRITE వాక్యములకు వర్తించును. కొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిద్దాం.

ఉదా 1 : A, B లు N (50 కంటే తక్కువ) మూలకాలు గల రెండు ఏక పరిమాణ అమరికలు.

$$C = \sum_{I=1}^{N} A(I)\,B(I)$$. C కనుగొని ముద్రించుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

A, B ల మూలకాల విలువలను గణనయంత్రంకు అందించటానికి అంతర్గత DO జాబితాగల READ వాక్యము నుపయోగిద్దాం. A, B లు పాదికా చలరాసులు కనుక DIMENSION వాక్యము, C, విలువ కనుగొనుటకు DO వాక్యమును ఉపయోగిద్దాము.

ప్రణాళి 6 :

```
C       TO CALCULATE C
        DIMENSION A (50), B (50)
        READ (5, 10) N, (A (I), B (I), I = 1, N)
   10   FORMAT (I3/(10F7.3))
        C = 0
        DO 15 I = 1, N
        C = C + A (I) * B (I)
   15   CONTINUE
        WRITE (9, 20) N, C
   20   FORMAT (4Hb, I3, 5X, E15.8)
        STOP
        END
```

ఉదా 2 : X మరియు Y లు N × K, K × M ఆర్డరుకల ద్విపరిమాణ అమరికలు (M, N, K లు 10 కంటే తక్కువగానీ, సమానముగానీ) X, Y ల లబ్ధము Z ను కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

ఇచట అంతర్గత DO జాబితాను READ మరియు WRITE వాక్యములో ఉపయోగిస్తాం. రెండు మాత్రికల లబ్ధము కనుగొను పద్ధతి మనకందరకు తెల్సు. DO వాక్యము నుపయోగిద్దాం.

ప్రణాళి 7 :

```
C       PRODUCT OF TWO MATRICES
        DIMENSION X (10, 10), Y (10, 10), Z (10, 10)
        READ (5, 10) N, K, M
     10 FORMAT (3I5)
        READ (5, 15) (X (I, J), I = 1,  N), J = 1, K)
        READ (5, 15) (Y (I, J), I = 1, K), J = 1, N)
     15 FORMAT (10F6.2)
        DO 20   I = 1, N
        DO 20   J = 1, M
        Z (I, J) = 0.0
        DO 20 L = 1, K
     20 Z (I, J) = Z (I, J) + X (I, L ) * Y (L, J)
        WRITE (9, 25) ((Z (I, J), I = 1, N), J = 1, M)
     25 FORMAT (1Hb, (5E15.8))
        STOP
        END.
```


17.10 సారాంశము

ఒక ప్రోగ్రామ్ (ప్రణాళిలో) లో వాక్యములను కంప్యూటర్ ఒకదాని వెంట ఒకదానిని వరుసక్రమములో, మొదటి నుండి చివరిదాకా అమలుపరుస్తుంది. దీనిని నియంత్రణ యొక్క సాధారణ వరుసక్రమము అంటారు. అయితే ఒక్కొక్కసారి ప్రణాళిని అమలుపర్చేటప్పుడు ఈ సాధారణ వరుసక్రమాన్ని మార్చవలసి వస్తుంది. ఈ సందర్భాలలో నియంత్రణ వాక్యాలను ఉపయోగిస్తాము. నియంత్రణ వాక్యాలలో ముఖ్యమైనవి GO TO, అంకగణిత IF, తార్కిక IF, కంప్యూటెడ్ GO TO, DO మొదలైనవి. పాదికా చలరాసులు ప్రోగ్రామ్‌లో వచ్చినప్పుడు DIMENSION వాక్యాలు వాడతాము. ప్రణాళిలో పాదికాచలరాసులను మొదటిసారి ఉపయోగించక ముందే dimension వాక్యము వ్రాయవలెను. Dimension వాక్యము ఎగ్జిక్యూటబుల్ వాక్యము కాదు. ఇది మూల ప్రణాళిలో వాడబడిన పాదికా చలరాశుల పరిమాణమును, పేర్లను తెలియపర్చును. సాధారణంగా ప్రణాళిలో మూడు రకాలైన తప్పులు దొర్లే అవకాశం ఉంది. అవి : (i) సంకలన తప్పులు (ii) ఎగ్జిక్యూషన్ తప్పులు (iii) తార్కిక తప్పులు. ప్రోగ్రామ్‌లో తప్పులు కనిపెట్టడాన్ని డీబగ్గింగ్ అంటాము. ప్రణాళిని ఎగ్జిక్యూట్ చేయడానికి కంప్యూటర్‌కు అతి తక్కువ సమయం పట్టేటట్లుగా ప్రణాళిని వ్రాయడమే

అతి ముఖ్యమైనది; ఇది అనుభవం మీద వస్తుంది. కొన్ని ఆదేశాల సముదాయాన్ని అనేకసార్లు అమలుపర్చాల్సి వచ్చినప్పుడు DO వాక్యము వాడతాము. ఇంకా, అమరికలను (arrays) కంప్యూటర్‌కు అందించాలన్నా, కంప్యూటర్ అమరికలను ముద్రించాలన్నా DO వాక్యములాంటి input/output వాక్యములను వాడతాము.

17.11 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు విపులంగా సమాధానమివ్వండి.

1. a) నియమరహిత GO TOవాక్యము b) అంకగణిత IF వాక్యము గురించి వివరించండి.

2. అంకగణిత IF వాక్యము నుపయోగించి ఇచ్చిన 'N' సంఖ్యలలో పెద్దసంఖ్యను కనుగొనుటకు క్రమచిత్రాన్ని, ప్రణాళిని వ్రాయండి.

3. h విలువలు 20 నుంచి 200 వరకు 10 పెరుగుదలతో తీసుకొని క్రింద ఇచ్చిన సూత్రము నుపయోగించి g ను కనుగొనుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి.

$g = 32.17\ (4390/(4390+h))^2$, $h > 0$ అయినప్పుడు

$= 32.17\ (1 + h/4390)$, $h \leq 0$ అయినప్పుడు

4. తార్కిక IF వాక్యము నుపయోగించి ఇచ్చిన మూడు సంఖ్యలలో పెద్ద సంఖ్యను కనుగొనుటకు క్రమచిత్రం, ప్రణాళి వ్రాయండి.

5. మొదటి 'n' వాస్తవ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము $S = n\ (n+1)\ (2n+1)/6$, n విలువలు 5 నుంచి 50 వరకు 5 పెరుగుదలతో S విలువలను కనుగొనుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి.

6. ఈ క్రిందనీయబడినవి సరియైనా పాదికలో కావో సహేతుకంగా తెల్పండి.

(1) –1500, (2) 150*V – 1, (3) J * 5, (4) 0, (5) J + 1

7. ఈ క్రిందివి సరియైన పాదికాచలరాసులో కావో తెల్పండి.

(1) A (L + 2, M + 5, N + 10) (2) MATX (5, 5, 5) (3) IN (K * 10)

(4) X (-15, 0, 5) (5) GAMA (X + 5, Y + 5, Z + 5).

8. ఫోర్ట్రాన్ ప్రోగ్రామింగ్‌లో DO వాక్యము యొక్క ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.

9. ఈ క్రింద నీయబడిన శ్రేణిలో N పదముల మొత్తం కనుగొనుటకు DO వాక్యము నుపయోగించి ప్రణాళి వ్రాయండి. $S = 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \ldots\ldots$

10. X మరియు Y లు (M × N) ఆర్డరుగల రెండు ద్విపరిమాణ అమరికలు (M మరియు N ల విలువలు 10 అంతకంకటే తక్కువ).

T = X యొక్క వ్యత్యయము (Transpose of X)

S = X + Y లు కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

11. X మరియు Y లు 20 మూలకాలుకల రెండు ఏకపరిమాణ అమరికలు. 2F8.3 నిర్దేశకముతో మొదటి కార్డుమీద x_1, y_1 విలువలు, రెండవ కార్డుమీద x_2, y_2 విలువలు, ... 20 వ కార్డుమీద x_{20}, y_{20} ల విలువలు పంచ్ చేయబడ్డాయి.

$$A = \sum_{k=1}^{20} \left(x_k + y_k\right)^2, \quad B = \sum_{k=1}^{20} \left|x_k - y_k\right|$$ లను కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

II. క్లుప్తంగా సమాధానాలివ్వండి.

1. X = –3.0, Y = 4.0 అయినప్పుడు IF (X * X – Y * Y) 10, 15, 20 వాక్యము ననుసరించి గణనయంత్రం ఏ వాక్యపు సంఖ్యకల వాక్యమును అమలుపర్చును.

2. ఒక్కొక్క దత్తాంశ కార్డుమీద ఒక్కొక్క R విలువ F4.0 నిర్దేశకముతో ఇయ్యబడిన 5 పంచ్‌డ్ కార్డులను చదివి. T ను $T = \dfrac{150}{\dfrac{R-100}{15} + \dfrac{15}{R-100}}$ సూత్రము నుపయోగించి T విలువలు కనుగొని ముద్రించుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి.

3. X విలువను F10.3 నిర్దేశకముతో పంచ్‌డ్ కార్డునుంచి గ్రహించి F (x) విలువను

$F(x) = x^2 + 5x, x < 0$ అయినప్పుడు

$= 0, \quad x = 0$ అయినప్పుడు

$= 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}, x > 0$ అయినప్పుడు

కనుగొని ముద్రించుటకు ప్రణాళిని వ్రాయండి.

4. $A = \dfrac{0.0666\, r^4}{\left(r^2 - 1\right)^2}$ సూత్రము నుపయోగించి $r = 10, 20, \ldots\ldots 100$, విలువలకు A విలువలను కనుగొని ముద్రించుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

5. $Z = \log(1 + x) / \left(e^x - 1 + x^3\right)$ సూత్రము నుపయోగించి, DO లూప్‌ను కూడా ఉపయోగించి, X = 1.5, 1.55, 1.60, ..., 10.0 విలువలకు Z విలువలను కనుగొనుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

6. V విలువలు 1 నుంచి 10 వరకు 0.5 పెరుగుదలతో,

T విలువలు 100 నుంచి 1000 వరకు 10 పెరుగుదలతో,

S విలువలు 1.1 నుంచి 1.5 వరకు 0.1 పెరుగుదలతో,

వివిధమైన V, T, S, విలువలకు E విలువలకు ఈ క్రింది సూత్రము నుపయోగించి 3 DO లూప్‌లు ఉపయోగించి ప్రణాళి వ్రాయండి.

E = log V + log T/(S – 1)

7. P, Q లు 20 మూలకాలుగల రెండు ఏకపరిమాణ అమరికలు F10.3 నిర్దేశకముతో ఒక్కొక్క కార్డుమీద 5 మూలకాల విలువలు పంచ్ చేయబడ్డాయి. ఈ మూలకాలను గణనయంత్రమునకు అందించుటకు సరిపడు అంతర్గత DO జాబితాకల READ వాక్యమును వ్రాయండి.

ఖండిక – 18 : ఉపప్రణాళికలు, సబ్‌రొటీన్‌లు

విషయసూచిక

18.1 లక్ష్యాలు, ఉద్దేశాలు

ఈ ఖండిక చదివింతరువాత మీరు, అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయము, ప్రమేయ ఉపప్రణాళి, సబ్ రోటిన్‌లు ఉపయోగించి ఒక పెద్ద ప్రణాళిని కొన్ని చిన్న చిన్న ఉపప్రణాళిలుగా చేసి, తిరిగి వాటిని కూర్చగలగాలి.

18.2 ఉపోద్ఘాతం

ఫోర్ట్రాన్ భాషలో ఒక పెద్ద ప్రణాళిని కొన్ని చిన్న చిన్న ఉప ప్రణాళిలుగా విభజించే వీలున్నది. వీటిని తిరిగి కూర్చినపుడు మొదటి పూర్తి ప్రణాళి అవుతుంది. మాత్రికా విలోమము కనుగొనుట, బహుపది యొక్క మున్నాలు (zeros) కనుగొనుట మొదలగు సమస్యలన్నిటికి ఉపప్రణాళికలు వ్రాయవచ్చు. ఒకసారి వ్రాసిన ఉప ప్రణాళి ప్రధాన ప్రణాళిలో ఎన్నిసార్లయినా వాడవచ్చు. ఉప ప్రణాళిలు వాడి పెద్ద పెద్ద సంకీర్ణ ప్రణాళిలకు పట్టే కాల వ్యవధిని తగ్గించవచ్చు.

ఏక మూల్య ప్రమేయ విలువలను కనుక్కోడానికి ఈ క్రింది పద్ధతులు వాడుతాము. 1) ఒకే ఒక అంకగణిత ప్రవచనములో కనుగొన గలిగిన పక్షంలో అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయం (అం.ప్ర) ను వాడుతాము. 2) ఒకటి కంటే ఎక్కువ ఫోర్ట్రాన్ ప్రవచనాలు వాడాలర్సిన పక్షంలో ప్రమేయ ఉపప్రణాళి (ప్ర.ప్ర)ను వాడుతాము.

18.3 అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయము

అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయము యొక్క సాధారణ రూపము :

పేరు $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ = సమాసము

ఇందులో "పేరు" అన్నది ప్రవచన ప్రమేయపు పేరు. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ లు విభిన్న అపాదిక (non-subscripted) చలరాసుల పేర్లు. వీటిని ఆర్గుమెంటులు అంటాము.

అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయాన్ని వాడేటప్పుడు దృష్టిలో నుంచుకోవలసిన కొన్ని ముఖ్యాంశాలు :

1. అం.ప్ర.లు అన్నీ, ప్రణాళిలో అమలుపరచదగిన (Executable) మొట్టమొదటి ప్రవచనము కంటె ముందుగానే కన్పించాలి.

2. చలరాసులు వ్రాయడానికి వాడే నియమాలే అం.ప్ర. పేరును వ్రాయుట గూడా వర్తిస్తాయి.

3. భాండాగార (Library) ప్రమేయాల పేర్లకు, ప్రధాన ప్రణాళిలో వచ్చే యితర ఉపప్రణాళిల పేర్లకు, ప్రమేయపు పేరు భిన్నంగా వుండాలి.

4. ఒకే ఒక అంకగణిత ప్రవచనముచేత మాత్రమే అం.ప్ర.ను నిర్వచించాలి.

5. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ఆర్గ్యుమెంటులు ఆభాస (Dummy) చలరాసులు. ప్రణాళిలో ప్రమేయము విలువ కనుగొనేటప్పుడు ఈ చలరాశుల స్థానంలో వాస్తవమైన (Actual) చలరాశులు లేదా విలువలు వాడబడుతాయి.

6. "సమాసము"లో పాదికా చలరాశులుండరాదు. ఆర్గ్యుమెంటులు కాబట్టి చలరాశులుండవచ్చు.

7. "సమాసము" లో వాడిన యే యితర అం.ప్ర అయినా ముందుగా నిర్వచింపబడాలి.

8. ప్రణాళిలో ప్రమేయపు పేరు కన్పించినపుడు అం.ప్ర. పిలువబడుతుంది.

9. వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటుల జాబితా (List), అం.ప్ర.లోని అభాస ఆర్గ్యుమెంటుల జాబితా, i) వరుసక్రమములో ii) సంఖ్యలో iii) విధము (Mode) లో సరిపోవాలి.

ఒక ఉదాహరణ చూద్దాము.

```
      RSUM (X, Y, Z) = SQRT (X * X + Y * Y + Z * Z)
      A  =  4.892
      B  =  5.613
      C  =  6.194
10    D  =  4.167 + RSUM (A, B, C)
      E  =  D * 4.0
      WRITE (9, 100) E
100   FORMAT (5Hb E = b b b, F15.4)
      STOP
      END
```

దీనిలో A = 4.892 మొట్ట మొదటి అమలుపరచదగిన ప్రవచనము (వాక్యము). ఈ ప్రవచనమునకు ముందే RSUM ప్రమేయము నిర్వచించాము. RSUM అనేది ప్రమేయము పేరు. 10 నెంబరు ఉన్న ప్రవచనములో ప్రమేయము RSUM (A, B, C) కన్పించగానే అం.ప్ర.లో X, Y, Z లకు బదులుగా A, B, Cల విలువలు ప్రతిక్షేపించబడి ప్రమేయపు విలువ గణించబడుతుంది. ఈ ఫలితము 4.167కు కూడబడి వచ్చిన ఫలితము E గా నిల్వచేయబడుతుంది.

సూచన : ప్రమేయపు వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటుల పాదికా చలరాశి జాబితాలోని విలువై ఉండవచ్చు. ఉదాహరణకు

10 D = S (4) + RSUM (S (1), S (2), S (3) అని వుండవచ్చు)

18.4 ప్రమేయపు ఉపప్రణాళిలు

ప్రమేయ ఉప ప్రణాళి (ప్ర. ప్ర) సాధారణ రూపము ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

```
type FUNCTION name (v1, v2, ..., vn)
..............................................
..............................................
name = expression
..............................................
..............................................
RETURN
..............................................
..............................................
name = expression
..............................................
..............................................
RETURN
END.
```

ఇక్కడ type అంటే ప్రమేయము REAL లేదా INTEGER విధము (Mode) లో ఉంటుంది అని చెప్పబడము. ఈ చెప్పడము (Optional) "name" ప్రమేయమునకు గుర్తుగా పెట్టే పేరు $v_1, v_2, \ldots, v_n$ లు ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటులు.

ఇప్పుడు $n!$ గుణించడానికి ఒక ప్ర.ప్ర వ్రాద్దాము.

```
INTEGER FUNCTION FACT (N)
IF (N) 11, 12, 13
```

```
11    FACT = 0
      RETURN
12    FACT = 1.
      RETURN
13    P = 1.
      DO 100 J = 2, N
100   P = P * J
      FACT = P
      RETURN
      END
```

ఈ ఉపప్రణాళిలో ప్రమేయము పేరు FACT. దీని type INTEGER అని చూపబడింది. N అనేది ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటు.

దిగువ ఇచ్చిన ప్రణాళి (దీనిని ప్రధాన ప్రణాళి అంటాము) పైన చెప్పిన ఉపప్రణాళిని పిలుస్తుంది.

```
      READ (3, 10) K, I, M
      L = I * M + I
      F = FACT (I) + FACT (L)/FACT (K)
      PRINT (9, 20) K, L, I, M, F
10    FORMAT (3I5)
20    FORMAT (4I5, E14.6)
      STOP
      END
```

ఇంకో ఉదాహరణ చూద్దాము

మూడో తరగతి నిర్ధారకము $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ విలువ కనుక్కోవాలనుకోండి.

```
C       EVALUATING THIRD ORDER DETERMINANT
        DIMENSION A (3, 3)
        READ (3, 10) ((A (I, J), I = 1, 3), J = 1, 3)
   10   FORMAT (9F6.2)
        C1 = DET (A (2, 2), A (2, 3), A (3, 2), A (3, 3))
        C2 = DET (A (2, 1), A (2, 3), A (3, 1), A (3, 3))
        C3 = DET (A (2, 1), A (2, 2), A (3, 1), A (3, 2))
        VALUE =  A (1, 1) * C1 – A (1, 2) * C2 + A (1, 3) * C3
        WRITE (4, 20) VALUE
   20   FORMAT (E14.6)
        STOP
        END
C       SUBPROGRAM TO EVALUATE SECOND ORDER DET
        FUNCTION DET (P, Q, R, S)
        DET = P * S – Q * R
        RETURN
        END
```

ప్రమేయపు ఉప ప్రణాళి నుపయోగించేటప్పుడు దృష్టిలో నుంచుకోవలసిన ముఖ్యాంశాలు :

i) ప్రమేయ ఉప ప్రణాళి ఉపయోగించి గణించబడే ప్రతి ప్రమేయము ఏకమూల్య (Single Valued) ప్రమేయమై ఉండాలి.

ii) ప్రమేయము type చెప్పకపోతే, మామూలుగా చలరాశుల mode ఏ విధముగా నిర్ణయించబడుతుందో అలాగే ప్రమేయము type తీసుకోబడుతుంది.

iii) చలరాసుల పేర్లు వ్రాయడాని కుపయోగించే నియమాలే ప్ర.ప్ర పేరు వ్రాయడానికి కూడా వర్తిస్తాయి.

iv) i) భాండాగార (library) ప్రమేయాల పేర్లు ii) ప్రధాన (main) ప్రణాళి పేరు iii) ప్రధాన ప్రణాళిలో వాడిన యితర ఉప ప్రణాళిల పేర్లు వీటికి భిన్నంగా ప్ర.ప్ర పేరు ఉండాలి.

v) అభాస ఆర్గ్యుమెంటుల క్రింద చెప్పిన వేవైనా కావచ్చు.

i) అపాదిక చలరాశులు ii) పాదికా చలరాశుల పేర్లు (పాదికలు వ్రాయకూడదు) iii) ఉపప్రణాళిల పేరు iv) భాండాగార ప్రమేయాల పేర్లు

vi) ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటు పాదికాచలరాశైతే, ఉపప్రణాళిలోని DIMENSION ప్రవచనము లేదా వాక్యములో కన్పించాలి. దాని గరిష్ఠ పరిమితి ప్రధాన ప్రణాళిలోని అనురూప వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటు పరిమితై ఉండాలి.

vii) ప్రమేయము పేరు ఒక ASSIGNMENT ప్రవచనములోని ఎడమవైపున చలరాశి పేరుగా ఒక్కసారైనా కన్పించాలి.

viii) ప్ర.ప్రలో RETURN ప్రవచనము ఒక్కసారైనా కన్పించాలి.

ix) ప్ర.ప్రలో చివరి ప్రవచనము END ఉండాలి.

x) పిలిచే ప్రమేయము (calling function) లోని వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటులు, ఉపప్రణాళిలోని ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటులతో i) సంఖ్యలో ii) వరుసక్రమములో iii) విధములో సరిపోవాలి.

xi) వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటులు i) స్థిరాంకాలు ii) చలరాశుల పేర్లు iii) పాదికా చలరాశులు iv) సమాసాలు కావచ్చు.

xii) ప్రధాన ప్రణాళిలో ప్ర.ప్ర పేరు కన్పించగానే కంట్రోలు (control) ప్ర.ప్రకు మారుతుంది. ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటులకు బదులుగా,వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటులతో ఉపప్రణాళిలోని ప్రవచనాలు చేయబడుతాయి (executed).

xiii) ప్రధాన ప్రణాళిలో "పేరు" కన్పించిన స్థానానికి నియంత్రణ (control)ను RETURN ప్రవచనము మారుస్తుంది.

ఉదాహరణ : 30 అంశాలు గల 3 జతల సదిశల అదిశాలబ్ధాల మొత్తము కనుక్కోడానికి ప్రణాళి వ్రాయండి.

సాధన :

దత్త సదిశలు A_1, B_1 ; A_2, B_2; A_3, B_3 అనుకోండి

$$A_1 = \left[a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots\ldots a_{1,30}\right] \text{ మొ॥ అనుకోండి.}$$

$$S = \sum_{i=1}^{30}\left(a_{1i}\,b_{1i} + a_{2i}\,b_{2i} + a_{3i}\,b_{3i}\right) \text{ కనుగొనాలి.}$$

```
C      MAIN PROGRAM TO FIND SUM OF SCALAR PRODUCTS
       DIMENSION A1(30), B1(30), A2(30), B2(30), A3(30), B3(30)
       READ (3, 10) (A1 (I), B1 (I), A2 (I), B2 (I), A3 (I), B3 (I), I = 1, 30)
    10 FORMAT (5F14.4)
       SUM = SCPDT (A1, B1) + SCPDT (A2, B2) + SCPDT (A3, B3)
       WRITE (4, 20) SUM
    20 FORMAT (F16.6)
       STOP
       END
```

```
C      FUNCTION SUBPROGRAM TO CALCULATE SCPDT
       FUNCTION SCPDT (SJ, SK)
       DIMENSION SJ (30), SK (30)
       SCPDT = 0.
       DO 50 I = 1, 30
    50 SCPDT = SCPDT + SJ (I) * SK (I)
       RETURN
       END
```

18.5 సబ్ రొటీన్ ఉపప్రణాళి

```
SUBROUTINE name (v1, v2, ..., vn)
...........................
...........................
RETURN
...........................
...........................
END
```

"Name", స.ప్ర. పేరు $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $(n \geq 0)$ ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటులు. వీటిని 'Name' తరువాత బ్రాకెట్లలో వ్రాయాలి.

ప్రధాన ప్రణాళికి, ప్రమేయ ఉప ప్రణాళి ఒకే ఒక విలువ నిస్తుంది. కాని సబ్ రొటీన్ ఉప ప్రణాళి ఎన్ని విలువలైనా పంపుతుంది.

సబ్ రొటీన్ ఉప ప్రణాళి వ్రాసేటప్పుడు పాటించవలసిన ముఖ్యాంశాలు :

1. స.ప్ర. పేరులో 1 నుంచి 6 వరకు అక్షరాంకాలు (alphanumerics) ఉండవచ్చు. మొదటిది మాత్రము అక్షరమై ఉండాలి.
2. ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటులు, i) ఆపాదిక వ్యూహము (array) యొక్క పేర్లు. ii) యితర ప్ర.ప్ర, స.ప్ర ల పేర్లు కావచ్చు. ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటు వ్యూహము వేరయిన ప్పుడు దాని పరిమాణము (dimension) స.ప్ర.లో చెప్పాలి.
3. ప్రధాన ప్రణాళి, స.ప్ర.లలో అనురూప ఆర్గ్యుమెంటుల పరిమాణాలు ఒక్కటై ఉండాలి.
4. స.ప్ర.లో RETURN ప్రవచనము ఒక్కటైనా ఉండాలి.

5. స.ప్ర, దాని 'name' లో విలువను నిల్వచేయదు CALL ప్రవచనమును అన్వయించుటకు చిహ్నముగా పనిచేస్తుంది. (serves as a device for reference for a call statement)

6. ఒక సబ్‌రొటీన్ ఉప ప్రణాళి యితర ఉప ప్రణాళిలను పిలువ (Call) గలుగుతుంది.

7. ఒక సబ్‌రొటీన్, ప్రధాన ప్రణాళి చేత CALL ప్రవచనము వల్ల పిలువబడుతుంది.

18.6 CALL ప్రవచనము లేదా వాక్యము

ప్రధాన ప్రణాళిలో CALL ప్రవచనము కన్పించగానే కంట్రోలు సబ్‌రొటీన్ ఉప ప్రణాళికు మారుతుంది. సబ్‌రొటీన్‌లోని ప్రవచనాలన్నీ పూర్తిగా చేయబడి ఫలితాలతో సహా కంట్రోలు ప్రధాన ప్రణాళికు RETURN ప్రవచనము వల్ల పంపించబడుతుంది.

CALL ప్రవచనము యొక్క సాధారణ రూపము

CALL name $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$

ఇక్కడ "name" స.ప్ర. పేరు. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ లు వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటులు. వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంటులు, ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటులు సంఖ్యలో, వరుసక్రమంలో, విధము (mode) లోను పరిమాణములోను సరిపోవాలి.

స.ప్ర.లో ఆభాస ఆర్గ్యుమెంటు ఒక ప్ర.ప్ర. లేదా స.ప్ర. పేరయితే CALL ప్రవచనములోని అనురూప వాస్తవమైన ఆర్గ్యుమెంట్, వాడబడే వాస్తవమైన (actual) ప్ర.ప్ర. లేదా స.ప్ర. పేరై ఉండాలి.

గమనికలు :

i) స.ప్రలో ఆర్గ్యుమెంటులు లేకపోవచ్చు. కాని ప్ర.ప్రలో కనీసం ఒక ఆర్గ్యుమెంటైనా ఉండాలి.

ii) స.ప్ర. పేరు ఆర్గ్యుమెంటుల విధము తెలుపదు. కాని ప్ర.ప్ర.లో type యివ్వనప్పుడు పేరు దాని విధమును తెలుపుతుంది.

iii) స.ప్రలోని మొదటి ప్రవచనములో తప్ప, దాని పేరు స.ప్ర.లో మరింకెక్కడా కన్పించకూడదు. ప్ర.ప్రలో ప్రమేయము పేరు ఒక్కసారైనా కన్పించాలి.

ఉదా 1 : రెండు 10×10 మాత్రికల లబ్దాన్ని గణించుటకు ఒక సబ్ రొటీన్ ఉప ప్రణాళిని వ్రాయండి. ఈ స.ప్రను వాడుకొని లబ్ద మాత్రికను ముద్రించుటకు (to print) ఒక ప్రధాన ప్రణాళిని వ్రాయండి.

సాధన :

Let A $(L \times M)$, B $(M \times N)$ మాత్రికల లబ్దము C $(L \times N)$ కనుక్కోవాలనుకోండి. (సామాన్యంగా ఉపయోగపడే ఉపప్రణాళి వ్రాసేటప్పుడు దానిని సార్వత్రిక రూపంలో వ్రాస్తాము).

```
C       SUBROUTINE MATPDT (A, B, C, L, M, N)
        DIMENSION A (10, 10), B (10, 10), C (10, 10)
```

```
      DO 100  I = 1, L
      DO 100  J = 1, N
      C (I, J) = 0.
      DO 100  K = 1, M
100   C (I, J) = C (I, J) + A (I, K) * B (K, J)
      RETURN
      END
```

దీనిని వాడుకొని మాత్రికా లబ్ధాన్ని ముద్రించే ప్రధాన ప్రణాళి క్రింద యిచ్చినాము.

```
C     MAIN PROGRAM
      DIMENSION P (10, 10), Q (10, 10), R (10, 10)
      READ (5, 10) ((P (I, J), I = 1, 5) , J = 1, 6), ((Q (I, J), I = 1, 6), J = 1, 10)
      CALL MATPDT (P, Q, R, 5, 6, 10)
      WRITE (9, 50) ((C (I, J), J = 1, 10), I = 1, 5)
10    FORMAT (10F6.2)
50    FORMAT (5F14.4)
      STOP
      END
```


ఉదా 2 : 10° చొప్పున పెంచుతూ 0° నుండి 90° వరకుగల అన్ని కోణాలకు cos (x) ను గణించుటకు ఒక సబ్ రొటీన్ ఉప ప్రణాళిని వ్రాయండి. x రేడియన్‌లలో ఉన్నప్పుడు

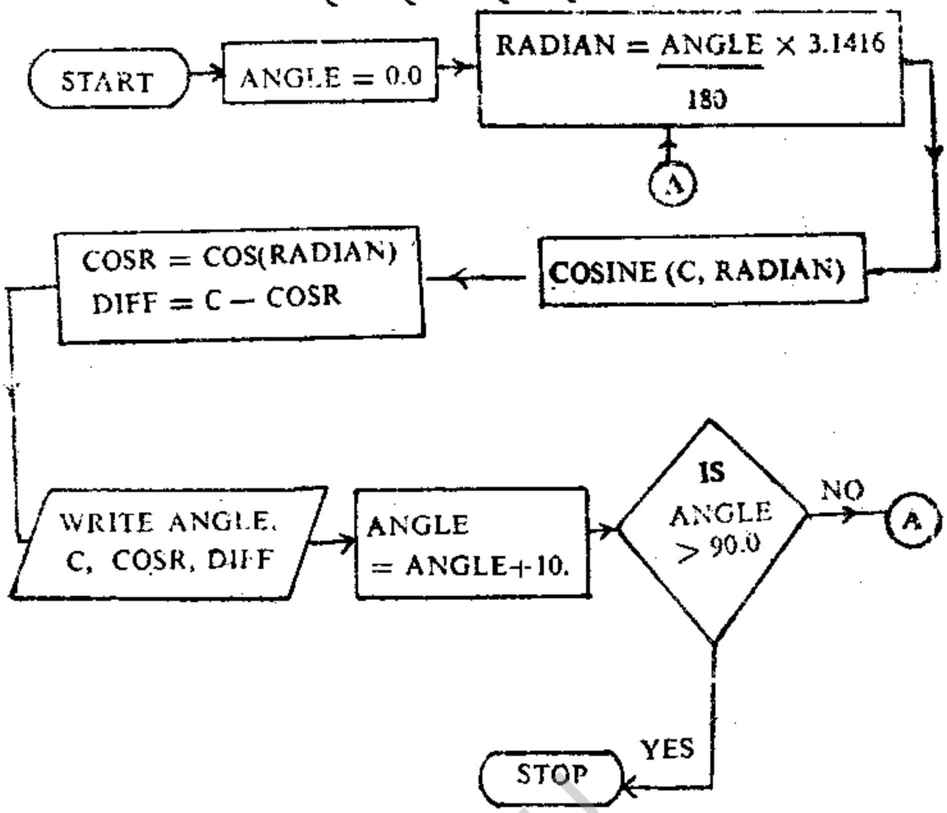
$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots - \frac{x^{10}}{10!}$$

విస్తరణను ఉపయోగించి గణించిన cos విలువకు భాండాగార ప్రమేయముతో వచ్చిన cos విలువకు తేడాను ముద్రించుటకు ప్రణాళి వ్రాయండి.

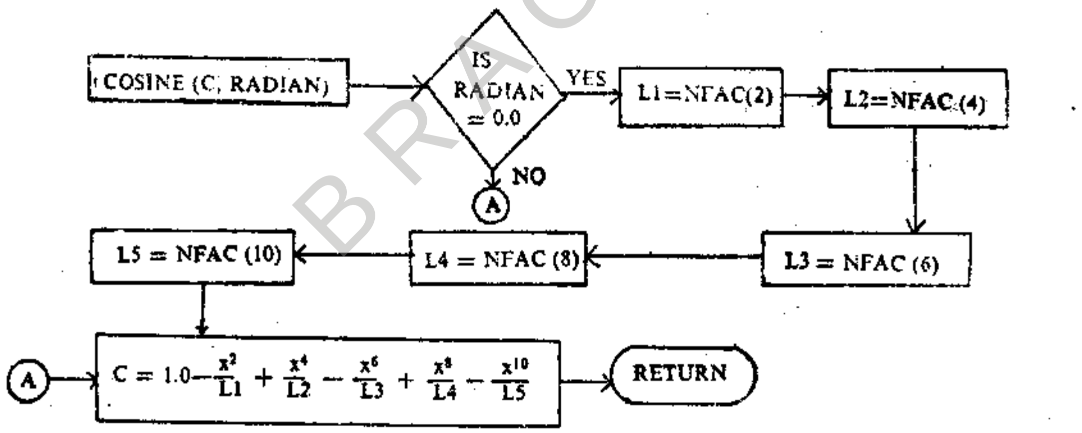
సాధన :

ముందుగా క్రమచిత్రం (flow chart) ప్రధాన ప్రణాళికు, cos (x) విలువను గణించే ఉప ప్రణాళికు, $n!$ ను గణించే సబ్ రొటీన్‌ను తయారుచేద్దాము.

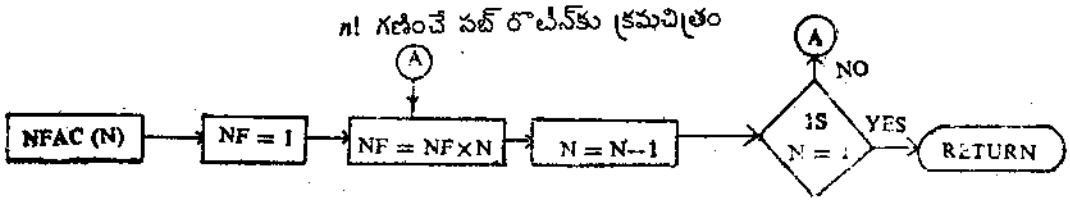
ప్రధాన ప్రణాళికి క్రమచిత్రం



COSINE ప్రమేయ ఉప ప్రణాళికి క్రమచిత్రం



n! గణించే సబ్ రొటీన్‌కు క్రమచిత్రం



దత్త COSX విస్తరణ నుపయోగించి COS X విలువను కనుగొనుటకు ఉపయోగించిన ప్ర.ప్ర పేరు COSINE (C, RADIAN). n! గణించుటకు వాడిన సబ్ రొటీన్ పేరు NFAC (N). COSINE ఉప ప్రణాళి NFAC (N) సబ్ రొటీన్‌ను వాడుకొంటున్నదని గ్రహించవచ్చు.

ఇప్పుడు ప్రణాళిలు వ్రాద్దాము

```
C       MAIN PROGRAM TO CALCULATE COSINE OF ANGLE
        ANGLE = 0.0
    5   RADIAN = ANGLE * 3.1416/180.
        COSR =  COS (RADIAN)
        DIFF = COS (C, RADIAN) - COSR
        WRITE (4, 100) ANGLE, COSR, C, DIFF
  100   FORMAT (F10.2, 3F15.4)
        ANGLE = ANGLE + 10.0
        IF (ANGLE . GT . 90.0) GO TO 200
        GO TO 5
  200   STOP
        END
C       COSINE FUNCTION SUBPROGRAM
        DIMENSION L(5)
        IF (RADIAN . NE. 0.0) GO TO 40
        CALL NFAC (L)
   40    X = RADIAN
        X 2 = X * X
        X 4 = X 2 * X 2
        X 6 = X 4 * X 2
        X 8 = X 4 * X 4
        X 10 = X6 * X 4
        C = 1.0 -X 2/L (1) + X 4/L (2) - X6/L (3) + X8/L (4) - X10/L (5)
        RETURN
        END
```

```
C       SUB ROUTINE NFAC (NR)
        DIMENSION NR (5)
        DO 6  I = 1, 5
        NR(I) = 1
        N = I * 2
8       NR (I) = NR (I) * N
        N = N – 1
        IF (N – 1) 6, 6, 8
6       CONTINUE
        RETURN
        END
```

18.7 సారాంశము

ఒక పెద్ద ప్రణాళిని అనేక చిన్న చిన్న ప్రణాళిలుగా ఏ విధంగా విభజించగలమో ఈ ఖండికలో నేర్చుకొన్నాం. ఇచ్చిన సమస్యలోని ప్రమేయాలననుసరించి, అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయము, ప్రమేయ ఉపప్రణాళి, సబ్‌రొటీన్ ఉపప్రణాళికలను వాడాము. ఒకే ఒక ప్రవచనములో రాబట్టగలిగే ఏకమూల్య ప్రమేయమును గణించగలవలసి వచ్చిన ప్పుడు అంకగణిత ప్రవచన ప్రమేయము వాడతాము. ఒక ఏకమూల్య ప్రమేయాన్ని ఒకటికన్న ఎక్కువ ప్రవచనాలలో నిర్వచించినప్పుడు, ఆ ప్రమేయాన్ని గణించడానికి ప్రమేయ ఉపప్రణాళి వాడతాము. ఒక ప్రమేయం ద్వారా అనేక విలువలను గణించాల్సి వచ్చినప్పుడు సబ్ రొటీన్‌లను వాడతాము. అంకగణిత ప్రమేయ ప్రవచనాలన్నీ ప్రణాళిలో అమలుపరచదగిన మొట్ట మొదటి ప్రవచనముకంటె ముందుగానే కనిపించాలి. ప్రమేయ ఉప ప్రణాళి పేరు ప్రధాన ప్రణాళిలో కనబడగానే, కంప్యూటర్ ప్రమేయ ఉపప్రణాళిను రాబట్టి దానిని ప్రధాన ప్రణాళికు అందించి ప్రధాన ప్రణాళిను అమలుపరుస్తుంది. ప్రధాన ప్రణాళి సబ్ రొటీన్‌ను CALL ప్రవచనం ద్వారా పిలుస్తుంది.

18.8 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు

I. క్రిందివానికి విపులంగా సమాధానాలివ్వండి.

i) a) ప్రమేయ ఉప ప్రణాళిని నిర్వచింపుము. ప్ర.ప్ర గణించిన ఫలితాన్ని ప్రధాన ప్రణాళికకు ఎలా అందజేస్తుందో తెలుపండి.

b) $A = 10 + f(x - y)$

$$B = \frac{f(x) + f\left(x^2 + y^2\right)}{6.72 f\left(x^2\right)}$$

$$C = \frac{f(\sin x) - \cos x}{x^3 + 2x \cos x + \sqrt{1 + f(\sin x)}}$$ లను

గణించడానికి ప్రణాళి వ్రాయండి.

ii) a) ప్రమేయ ఉప ప్రణాళి వ్రాసేటప్పుడు దృష్టిలో నుంచుకోవలసిన ముఖ్యాంశాలేమిటి?

b) $$f(x) = 2 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (x < 0), f(0) = 2$$

$$f(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (x > 0)$$ ను

గణించుటకు ప్ర.ప్ర. వ్రాయండి.

iii) a) సబ్ రొటీన్ ఉప ప్రణాళిని విశదీకరించి, దానిని వ్రాయుటకు పాటించవలసిన ముఖ్యాంశాలు తెలుపండి.

b) $P\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $Q\left(x_2, y_2, z_2\right)$ రెండు బిందువులు. PQ దూరాన్ని, PQ దిక్కొసైనులు (direction cosines of PQ) గణించుటకు సబ్ రొటీన్‌ను వ్రాయండి.

iv) a) ప్రమేయ ఉప ప్రణాళికు, సబ్‌రొటీన్ ఉప ప్రణాళిల ఉమ్మడి అంశాలు, భేదాలు వ్రాయండి.

b) ఒక దత్త మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక కనుగొనడానికి సబ్‌రొటీన్ ఉపప్రణాళిని వ్రాయండి.

II. క్రిందివానికి క్లుప్తంగా సమాధానాలివ్వండి.

i) అం.ప్ర. నిర్వచింపుము. ఒక ఉదాహరణనిచ్చి, దానిని ఒక ప్రణాళిలో వాడుము.

ii) $f(x) = x^2 + \sqrt{2x + 3x^2 + 4x^3}$ ను గణించడానికి ఒక అం.ప్ర. వ్రాయుము. దీనిని వాడి

$$A = \frac{8.56 + y^2}{y^2 + \sqrt{2y + 3y^2 + 4y^3}}$$ ను గణించటడానికి ప్రణాళి వ్రాయుము.

iii) A_{nxm}, B_{mxn} మాత్రికల లబ్ధముకు కనుగొనుటకు సబ్ రొటీన్ వ్రాయండి.

iv) A_{mxn}, B_{mxn} మాత్రికలయితే A + B, A – B కనుగొనుటకు సబ్ రొటీన్ వ్రాయండి.

v) $$A = x^2 + y^2 + \sin x$$

$$B = x \sin y + \cos x^2$$

$$C = y^3 + x^2 \cos x$$

అయితే A, B, C లను గణించుటకు సబ్ రొటీన్ వ్రాయండి.

REFERRENCES

1. **V. Rajaraman**

   Principles of Computer Programming
   Prentice - Hall of India Private Limited, New Delhi

2. **V. Rajaraman**

   Computer Oriented Numerical Methods
   Prentice - Hall of India Private Limited, New Delhi.

3. **K.D. Sarma**

   Programming in Fortran – IV
   Affiliated East – West Press Pvt. Ltd., New Delhi

4. **D.D. Mc. Cracken, W.S. Dorn**

   Numerical methods and Fortran Programming
   John Wiley & Son's, New York.

5. **G.B. Davis**

   Computer Data Processing
   Mc. Graw Hill.

MATHEMATICS - COURSE - IV

ASSIGNMENT - I

SECTION - A

1. అంతర్వేశనంను నిర్వచింపుడు. న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రం రాబట్టి $f(0) = 1, f(1) = 3, f(3) = 55$ దత్తాంశాన్ని తృప్తిపరిచే బహుపదిని అంచనావేయండి.

2. δ, μ పరికర్తలను నిర్వచించండి. మధ్యవిలువలకు బెస్సెల్ అంతర్వేశన సూత్రం రాబట్టండి. పైన తెలిపిన దత్తాంశం $y_{20} = 2854, y_{24} = 3162, y_{28} = 3544, y_{32} = 3992$ నుండి y_{25} ను రాబట్టండి.

3. కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు పద్ధతిని వివరించి, పరావలయానికి నార్మల్ సమీకరణాలను రాబట్టండి. దత్తాంశానికి పరావలయాన్ని సంధానింపుడు.

x :	2	4	6	8	10
y :	3.07	12.85	31.47	57.38	91.29

SECTION – B

1. ఒక ప్రమేయం యొక్క మొదటి భేదం $9x^2 + 11x + 5$ అయితే ఆ ప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి.

2. లెగ్రాంజ్ అంతర్వేశన సూత్రం ఉపయోగించి $\dfrac{3x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ను పాక్షిక భిన్నాల మొత్తంగా వ్రాయండి.

3. క్రింది పట్టిక నుండి $\log_{10} 47$ కు లెగ్రాంజ్ సూత్రము నుపయోగించి చేసిన అంతర్వేశనమునకు యదార్థతను కనుక్కోండి.

x :	40	42	45	48	49	50
$\log_{10}x$:	1.620600	1.6232493	1.6532126	1.6812413	1.6901960	1.9897000

MATHEMATICS - COURSE - IV

ASSIGNMENT - II

SECTION - A

1. $f(x) = 0$ సమీకరణానికి వాస్తవమూలం కనుక్కోడానికి న్యూటన్ రాఫ్సన్ పద్ధతిని విశదీకరించి ఈ పద్ధతి ద్వారా $2x - 3\sin x - 5 = 0$ సమీకరణానికి ఒక వాస్తవ మూలం కనుక్కోండి.

2. సంఖ్యాత్మక సమాకలనానికి సంబంధించిన సింప్సన్ 3/8 నియమాన్ని రాబట్టండి. ఈ నియమాన్ని $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$కు అనువర్తించడం ద్వారా πకు సుమారు విలువను అంచనావేయండి.

3. $\frac{dy}{dx} = f(x, y);\ y(x_0) = y_0$ అనే ప్రాథమిక విలువ సమస్యను టేలర్ పద్ధతి ద్వారా ఏ విధంగా సాధిస్తారో వివరించండి. ఈ పద్ధతి ద్వారా $\frac{dy}{dx} = x - y^2, y(0) = 1$ ను సాధించండి.

SECTION - B

1. విలోమ అంతర్వేశనంను విశదీకరించండి. పై దత్తాంశం నుండి 10 యొక్క ఘనమూలం రాబట్టడానికి పునరుక్త పద్ధతిని వాడండి.

x :	2	3	4	5
y :	8	27	64	125

2. $u_{n+1} - 6u_{n+1} + 8u_n = 2^n + 6n.$

   పైన తెల్పిన భేద సమీకరణాన్ని సాధించండి.

3. ఆయిలర్ పరివర్తన నుపయోగించి, 6 దశాంశ స్థానముల వరకు $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots\ldots$ శ్రేణి మొత్తమును కనుక్కోండి.

MATHEMATICS - COURSE - IV

ASSIGNMENT - III

SECTION - A

1. సమస్యా సాధనలో క్రమచిత్రాల ప్రాముఖ్యతను వివరించండి; $n!$ ను గణించడానికి క్రమచిత్రం వ్రాయండి.

2. $E = \frac{1}{2} CQ^2, C = 0.0000\,1, Q = 0.0025$

   $V = RT/P, R = 15.7, T = 12.87, P = 156.05.$

   తగిన ఫార్మాట్ నిర్దేశకాలతో, పైన తెలిపిన సూత్రాలనుపయోగించి, E, V లను కనుక్కొని వచ్చిన ఫలితాలను ముద్రించటానికి ప్రణాళి వ్రాయండి.

3. ప్రమేయ ఉప ప్రణాళి, సబ్‌రొటీన్ ఉపప్రణాళికల మధ్యనున్న ముఖ్యమైన భేదం ఏమిటి?
   $A = x^2 + y^2 + \sin x$, $B = x \sin y + \cos x^2$, $C = y^2 + x^2 \cos x$ అయితే పైన తెలిపిన A, B, C విలువలను గణించడానికి సబ్‌రొటీన్ వ్రాయండి.

SECTION - B

1. ఫోర్ట్రాన్ భాషలో పరిక్రియల వరుసక్రమాన్ని విశదీకరించండి. క్రింది వాటికి సరిపడే ఫోర్ట్రాన్ వాక్యాలను వ్రాయండి.

   (i) $v = \tan\theta + \log_e(\cos x + \sin y)$

   (ii) $x = r \cos\theta \sin\phi$

   (iii) $r = \frac{16\pi r}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4r}\right)$

2. 35044.34_6 కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

3. $A_{3\times4} \times B_{4\times5}$ మాత్రికా లబ్దాన్ని రాబట్టడానికి DO వాక్యాలనుపయోగించి ప్రణాళి వ్రాయండి.

FACULTY OF SCIENCE

B.SC. III YEAR (3 YEAR DEGREE COURSE) EXAMINATION - 1992

గణితశాస్త్రం – కోర్సు - IV

(సంఖ్యా విశ్లేషణము, కంప్యూటర్ ప్రోగ్రామింగ్ ప్రాథమిక సూత్రాలు)

Time : 3 hrs

Max. Marks : 100

Min Marks : 35

SECTION – A

క్రింది ప్రశ్నలలో ఏవైనా నాలుగు ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $4 \times 15 = 60$

1. $f(0) = -5, f(1) = 1, f(2) = 9, f(3) = 25, f(4) = 55, f(5) = 105$. అంతర్వేశనాన్ని విశదీకరించి, న్యూటన్ పురోగమన అంతర్వేశన సూత్రం రాబట్టండి. ఈ సూత్రాన్నుపయోగించి దత్తాంశానికి త్రిఘాత బహుపది $f(x)$ ను కనుక్కోండి. $f(3.2)$ విలువను అంచనావేయండి.

2. కేంద్రీయ భేదాలకు సంబంధించిన బెస్సల్ అంతర్వేశన సూత్రాన్ని రాబట్టండి. x యొక్క కొన్ని విలువలకు $y = x^4 + 10x^5$ ప్రమేయపు విలువలు క్రింది పట్టికలో ఈయబడినవి. $x = 2.27$ అయినప్పుడు y విలువను బెస్సల్ సూత్రమును ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

x :	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
y :	336.0000	427.8582	538.7888	671.6184	824.4400	1015.6250

3. ఈ క్రింది సమీకరణ సరణిని జాకోబీ పద్ధతిద్వారా సాధించండి.

$$13x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 18$$

$$2x_1 + 12x_2 + x_3 + 4x_4 = 13$$

$$3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 29$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 31.$$

4. సార్వత్రిక క్షేత్ర కలన సూత్రాన్ని రాబట్టి దాని నుండి సమలంబ చతుర్భుజాభ సూత్రం రాబట్టండి. ఈ సూత్రం ఉపయోగించి $\int_0^2 \left(1 + x^2\right) dx$ ను సంఖ్యాపరంగా అంచనావేయండి.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}, y(0) = 1$, ఇస్తే (i) అభివృద్ధిపరిచిన ఆయిలర్ పద్ధతి (ii) మోడిఫైడ్ ఆయిలర్ పద్ధతులను ఉపయోగించి $y(0.1)$ ను కనుక్కోండి.

6. కంప్యూటర్ ఏ సూత్రంపై ఆధారపడి పనిచేస్తుందో తెలపండి. సమస్యా సాధనలో కంప్యూటర్ల ప్రాముఖ్యాన్ని ఉదాహరణలతో వివరించండి. ఇచ్చిన 3 సంఖ్యలలో పెద్దది కనుక్కోడానికి క్రమచిత్రం వ్రాయండి.

7. ఫోర్ట్రాన్ భాషలోని మూడు ముఖ్యమైన నియంత్రణ వాక్యాలను తెలపండి. వాటి సాధారణ రూపాలను వ్రాసి అవి ఏ విధంగా పనిచేస్తాయో తెలపండి. $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n}$ అనే మాత్రికలను చదివి వాటి మొత్తాన్ని కనుక్కోవడానికి ప్రణాళి వ్రాయండి.

8. ప్రమేయపు ఉపప్రణాళి, సబ్‌రొటీన్ ఉపప్రణాళిల మధ్య నుండే తేడా ఏమి? 20×20 తరగతి కలిగిన రెండుమాత్రికల లబ్ధాన్ని కనుక్కోవడానికి సబ్‌రొటీన్ వ్రాయండి. దీనిని పిలిచే మెయిన్ ప్రోగ్రాం కూడా వ్రాసి మాత్రికా లబ్ధాన్ని ముద్రింపచేయండి.

SECTION – B

క్రింది ప్రశ్నలలో **ఐదింటికి** సమాధానాలివ్వండి. $5 \times 8 = 40$

9. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 24x^2 - 30x + 9$ అనే ప్రమేయాన్ని, దాని పారంపరిక భేదాలను క్రమగణిత సంకేతంలో వ్రాయండి. ఒక ప్రమేయం యొక్క మొదటి భేదం $9x^2 + 11x + 5$ అయితే ఆ ప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి.

10. $f(0) = 1\ f(1) = 3, f(3) = 55$ దత్తాంశాన్ని సంతృప్తిపరిచే బహుపది $f(x)$ ను న్యూటన్ విభాజిత భేద సూత్రం ఉపయోగించి కనుక్కోండి.

11. క్రింది దత్తాంశం నుపయోగించి $x = 30\ (1)\ 35$ కు u_x ను రాబట్టడానికి ఉపపట్టికను వాడండి.

x :	30	35	40	45	50
u_x :	0.86603	0.81915	0.76604	0.70711	0.64279

12. కనిష్ఠ వర్గాల ఉజ్జాయింపు ద్వారా క్రింది దత్తాంశానికి ద్విఘాత వక్రాన్ని సంధించండి.

x :	–2	–1	0	1	2
$f(x)$:	15	1	1	3	19

13. $2x - \log_{10} x = 7$ సమీకరణానికి రః పద్ధతి ద్వారా ఒక వాస్తవ మూలం కనుక్కోడానికి పునరుక్త పద్ధతిని వాడండి.

14. $y_{n+2} - 2\cos\alpha\, y_{n+1} + y_n = \cos \alpha n$ ను సాధించండి.

15. ఆయిలర్ మెక్లారిన్ సూత్రం ఉపయోగించి $\sum_{x=1}^{n} x^2$ ను కనుక్కోండి.

16. $\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$ ను $x = 2.0, 2.5$ ల కొరకు మిల్నే పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

17. ఫోర్ట్రాన్ పరిక్రియల వరుసక్రమాన్ని వివరించండి. కింద తెలిపిన ఫోర్ట్రాన్ వాక్యాలలో కనీసం ఒక దోషమైనా ఉంది. వాటిని గుర్తించండి.

i) Z = X * Y – 15, 200 ii) X * Y = Y * X

iii) 24 = I + J/5 – K iv) VEL = 3 (I – J)

v) 2R = PNR/100

18. i) 634.640625 ను ఆక్టల్ సరణిలోకి మార్చండి.

ii) 4B3F5.A9$_{16}$ కు సమానమైన దశాంశ సరణి సంఖ్య కనుక్కోండి.